193

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAI
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

25. BAND

QA1
M88
v. 25

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

25. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

66 F3030
QA1
M88
V.25

Inhaltsverzeichnis

Seite

Bernays, P., Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der „Principia Mathematica“ 305

Bernstein, S., Sur la nature analytique des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique. Extrait d'une correspondance avec M. Radó 505

Berwald, L., Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus 40

Blaschke, W., Über die Geometrie von Laguerre. VII. Kugelsysteme Ribaucours und vierfache Orthogonalsysteme 658

Bögel, K., Über partiell differenzierbare Funktionen 490

Brauer, A., Über einige spezielle diophantische Gleichungen 499

Chwistek, L., Über die Hypothesen der Mengenlehre 439

Doetsch, G., Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. III. Mitteilung. Der lineare Wärmeleiter mit beliebiger Anfangstemperatur. Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes 608

Enskog, D., Zur Begründung der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen 299

Feigl, G., Über das Archimedische Axiom 590

Finsler, P., Formale Beweise und die Entscheidbarkeit 676

Finsler, P., Über die Grundlegung der Mengenlehre. Erster Teil. Die Mengen und ihre Axiome 683

Gaßmann, Fr., Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppen 661

Hölder, E., Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Oberflächenspannung 188

Hölder, E., Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von Herrn Mazurkiewicz . . 754

Kneser, H., Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen . . 362

Knopp, K. und R. Schmidt, Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen 373

Koschmieder, L., Invarianten bei der Variation der Integrale, deren Integranden höhere Ableitungen enthalten 74

Krzenziessa, R., Thermoelastische Randwertaufgaben 209

Lachmann, K., Über den Konvergenzbereich des Verfahrens der schrittweisen Verbesserung bei einem Randwertproblem 405

Lecat, M., Quelques propriétés des déterminants supérieurs, orthosymétriques, circulants et cycliques 121

Mammana, G., Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari 734

Mazurkiewicz, St., Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten 749

Müntz, Ch. H., Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide 150

Ore, Ö., Bemerkungen zur Theorie der Differente 1

Ore, Ö., Existenzbeweise für algebraische Körper mit vorgeschriebenen Eigenschaften 474
Pasch, M., Betrachtungen zur Begründung der Mathematik (Zweite Abhandlung) 166
Paulus, Fr., Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung als Ausgangspunkt für die Umkehrung des Variationsproblems und ihre damit zusammenhängende Bedeutung für die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 348
Rademacher, H., Über eine Erweiterung des Goldbachschen Problems 627
Radó, T., Das Hilbertsche Theorem über den analytischen Charakter der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung 514
Rajchman, A. et A. Zygmund, Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson 261
Rogosinski, W., Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen (1. Mitteilung) 132
Schmidt, R., und K. Knopp, Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen 373
Stiemke, E. †, Über unendliche algebraische Zahlkörper 9
v. Szász, P., Über einen Mittelwertsatz 116
Szegö, G., Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. I. Entwicklungssätze 87
Szegö, G., Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome 172
Szegö, G., Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II: Zahlentheoretische Anwendungen 388
Thomas, T. Y., The identities of affinely connected manifolds 714
Thomas, T. Y., A projective theorie of affinely connected manifolds 723
Titchmarsh, E. C., Reciprocal formulae involving series and integrals 321
Ullrich, E., Zur Korrespondenz zweier Klassen von Limitierungsverfahren . . . 382
Zindler, K., Über Symmetrisierung konvexer Gebilde 602
Zygmund, A., et A. Rajchman, Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson 261
Zygmund, A., Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson 274
Zygmund, A., Sur un théorème de la théorie de la sommabilité 291
Zygmund, A., Une remarque sur un théorème de M. Kaczmarz 297
Autorenregister zu Band 1—25 755

Bemerkungen zur Theorie der Differente.

Von

Oystein Ore in Oslo.

Es sei K ein algebraischer Körper n-ten Grades und es soll die Körperdifferente $\mathfrak{d}$ von K bestimmt werden. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in K, ist p die zugehörige rationale Primzahl und weiter p durch $\mathfrak{p}^e$ genau teilbar, also

$$p = \mathfrak{p}^e \mathfrak{q},$$

wo $\mathfrak{q}$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, so wird die Körperdifferente $\mathfrak{d}$ bekanntlich dadurch bestimmt, daß allgemein $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{p}^{e-1}$ genau teilbar ist. Nur in dem Falle, daß e durch p teilbar ist, wird $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{p}^{e-1+\varrho}$ teilbar, wobei $\varrho \geqq 1$ ist.

Wie schon von Dedekind[1]) vermutet worden ist, kann man für die Zahlen ϱ eine obere Grenze angeben. Wenn nämlich der Exponent e durch p^s genau teilbar ist, so wird

$$\varrho \leqq es. \tag{1}$$

Die Richtigkeit von (1) ist erstens von Herrn Hensel[2]) unter Anwendung einer Theorie der p-adischen Zahlen bewiesen worden; zwei andere, vereinfachte Beweise hat Herr Bauer[3]) angegeben.

Ich werde hier zeigen, wie man in jedem Falle die Zahl ϱ bestimmen kann, und daraus folgt auch ein sehr einfacher Beweis der Dedekind-Henselschen Ungleichheit (1). Meine Methode hat weiter den Vorteil, daß sie nur im gegebenen Körper K operiert und auch nur einfache Sätze über Kongruenzen erfordert.

[1]) R. Dedekind, Über die Diskriminanten endlicher Körper, Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **29** (1882). Vgl. die Schlußbemerkung.

[2]) K. Hensel, Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, Math. Ann. **55** (1902), S. 301—336.

[3]) M. Bauer, Über die Differente eines algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. **73** (1921), S. 74—76. — M. Bauer, Verschiedene Bemerkungen über die Differente und die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers, Math. Zeitschr. **16**, S. 1—12.

§ 1.

Es sei also $\mathfrak{p}$ ein Primideal m-ten Grades, wofür

$$p = \mathfrak{p}^e \mathfrak{q}, \quad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1, \quad N\mathfrak{p} = p^m$$

gilt. Wenn dann $\varphi(x)$ eine Primfunktion m-ten Grades $(\mathrm{mod}\, p)$ ist, kann man bekanntlich eine Körperzahl ω so bestimmen, daß $\varphi(\omega)$ durch genau die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar wird und weiter $\varphi(\omega)$ zu $\mathfrak{q}$ relativ prim ist. Dann ist $\mathfrak{p} = (p, \varphi(\omega))$, und man bemerkt leicht, daß, wenn $f(\omega)$ ein Polynom in ω ist, eine Kongruenz

$$f(\omega) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p})$$

nur dann bestehen kann, wenn

$$f(x) \equiv 0 \,(\mathrm{modd}\, p, \varphi(x)).$$

Allgemeiner sieht man auch leicht, daß, wenn

$$f(\omega) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}^e)$$

ist,

$$f(x) \equiv 0 \,(\mathrm{modd}\, p, \varphi(x)^e)$$

gelten muß.

Es sei

$$F(x) = 0$$

die irreduzible Gleichung n-ten Grades, der ω genügt. Ich will die Form des Polynoms $F(x)$ untersuchen. $F(x)$ wird natürlich $(\mathrm{mod}\, p)$ durch $\varphi(x)$ teilbar, und wie schon von Dedekind[4]) bewiesen worden ist, wird

$$F(x) \equiv \varphi(x)^e Q(x) \,(\mathrm{mod}\, p), \tag{2}$$

wobei $Q(x)$ nicht $(\mathrm{mod}\, p)$ durch $\varphi(x)$ teilbar ist. Man hat also nach (2)

$$F(x) = \varphi(x)^e Q(x) + p M(x), \tag{3}$$

und aus der Tatsache, daß $\varphi(\omega)$ nur die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ enthält, folgt, daß $M(\omega)$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, d. h. $M(x)$ ist $(\mathrm{mod}\, p)$ nicht durch $\varphi(x)$ teilbar.

Aus einem Satze von Schönemann[5]) folgt nach (3), daß für jede Potenz p^h eine Zerlegung

$$F(x) \equiv \Phi_h(x) Q_h(x) \,(\mathrm{mod}\, p^h)$$

besteht, wobei

$$\Phi_h(x) \equiv \varphi(x)^e, \quad Q_h(x) \equiv Q(x) \,(\mathrm{mod}\, p)$$

ist. Setzt man daher

$$\Phi_h(x) = \varphi(x)^e + p N(x), \tag{4}$$

[4]) R. Dedekind, a. a. O. § 13.

[5]) Th. Schönemann, Von denjenigen Moduln usw., J. für Math. 32, § 61.

so zeigt man einfach, indem man mit $Q_h(x)$ multipliziert und mit (3) vergleicht, daß $N(x)$ nicht $(\mathrm{mod}\, p)$ durch $\varphi(x)$ teilbar ist. Es ist also bewiesen:

Man kann

$$F(x) \equiv Q(x)(\varphi(x)^e + pN(x)) \,(\mathrm{mod}\, p^h) \tag{5}$$

schreiben, wobei die Polynome $Q(x)$ und $N(x)$ nicht $(\mathrm{mod}\, p)$ durch $\varphi(x)$ teilbar sind, und der Exponent h in dieser Kongruenz kann beliebig groß gewählt werden.

§ 2.

Bekanntlich ist unter diesen Voraussetzungen der Führer $\mathfrak{f}$ des Ringes

$$o = [1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}]$$

nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar [6]). Aus der Gleichung

$$F'(\omega) = \mathfrak{f}\mathfrak{d}$$

ersieht man dann, daß die Zahl $F'(\omega)$ dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ wie die Körperdifferente $\mathfrak{d}$ enthält.

Nach (5) ist aber

$$\begin{aligned} F'(\omega) \equiv\ & Q(\omega)(e\varphi'(\omega)\varphi(\omega)^{e-1} + pN'(\omega)) \\ & + Q'(\omega)(\varphi(\omega)^e + pN(\omega)) \end{aligned} \,(\mathrm{mod}\, p^h). \tag{6}$$

Setzt man in (5) $x = \omega$, so wird, da $Q(\omega)$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist,

$$\varphi(\omega)^e + pN(\omega) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}^{eh}),$$

und folglich ist nach (6)

$$F'(\omega) \equiv Q(\omega)(e\varphi'(\omega)\varphi(\omega)^{e-1} + pN'(\omega)) \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}^{eh}).$$

Ich setze nun voraus, daß die Zahl eh größer als der jedenfalls endliche Exponent in der Potenz von p gewählt wird, die in $\mathfrak{d}$ aufgeht.

Dann wird $F'(\omega)$ und $Q(\omega)(e\varphi'(\omega)\varphi(\omega)^{e-1} + pN'(\omega))$ durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar, und da $Q(\omega)$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, wird die Zahl

$$\Phi_h'(\omega) = e\varphi'(\omega)\varphi(\omega)^{e-1} + pN'(\omega) \tag{7}$$

dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ wie die Körperdifferente enthalten.

Wenn e nicht durch p teilbar ist, folgt daraus sofort, daß $\mathfrak{d}$ durch genau $\mathfrak{p}^{e-1}$ teilbar wird. Wenn aber e durch p teilbar ist, wird $\mathfrak{d}$ sicher durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar.

---

[6]) Vgl. z. B. P. Bachmann, Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper, Leipzig 1905, Kap. 7, Nr. 15.

Man kann aber auch in diesem Falle einfach die genaue Potenz von $\mathfrak{p}$ bestimmen, welche $\mathfrak{d}$ enthält. Man bildet nämlich die Entwicklung $(p, \varphi(x))$ von $\Phi_h'(x)$,[7]) d. h. man schreibt dieses Polynom in der Form

$$\Phi_h'(x) = \sum_{i=0}^{e-1} A_i(x)\, p^{\alpha_i} \varphi(x)^i ,$$

wo der Grad von $A_i(x)$ kleiner als m ist, und p^{α_i} so gewählt, daß $A_i(x) \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist, wenn $A_i(x) \neq 0$. Wenn $A_i(x) = 0$ ist, wird ein solches Glied in den folgenden Untersuchunge. einfach weggelassen.

Man hat also

$$\Phi_h'(\omega) = \sum_{i=0}^{e-1} A_i(\omega)\, p^{\alpha_i} \varphi(\omega)^i , \tag{8}$$

und hier wird ein Glied

$$A_i(\omega)\, p^{\alpha_i} \varphi(\omega)^i$$

genau durch

$$\mathfrak{p}^{e\alpha_i + i}$$

teilbar. Zwei verschiedene Glieder in (8) können nicht durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar werden, denn aus

$$e\alpha_i + i = e\alpha_j + j$$

folgt

$$i \equiv j \pmod{e},$$

also $i = j$.

Ist daher R die kleinste unter den Zahlen

$$e\alpha_i + i \qquad (i = 0, 1, \ldots, e-1),$$

so wird die Körperdifferente genau durch $\mathfrak{p}^R$ teilbar. Die Zahl ϱ ist also durch

$$\varrho = R - e + 1$$

bestimmt.

§ 3.

Um nun die Dedekind-Henselsche Ungleichheit (1) zu beweisen, muß man also untersuchen, durch welche maximale Potenz von $\mathfrak{p}$ die Zahl $\Phi_h'(\omega)$ in (7) teilbar sein kann. Wenn $\varrho > se$ wäre, so würde, da $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{p}^{e-1+\varrho}$ teilbar ist, die Körperdifferente sicher durch $\mathfrak{p}^{(s+1)e}$ teilbar werden und man müßte eine Kongruenz

$$\Phi_h'(\omega) \equiv e\varphi'(\omega)\varphi(\omega)^{e-1} + pN'(\omega) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{(s+1)e}} \tag{9}$$

---

[7]) Man sehe Ö. Ore, Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien, Math. Zeitschr. **18**, S. 278–288, § 1; oder auch Ö. Ore, Zur Theorie der algebraischen Körper, Acta Math. **44**, Kap. II, § 2.

haben. Dabei ist also, wie früher bemerkt, die Zahl s dadurch definiert, daß e durch p^s genau teilbar ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß eine Kongruenz (9) nicht bestehen kann. Da der Grad von $\Phi_h'(x)$ kleiner als der Grad em von $\varphi(x)^e$ ist, so folgt leicht nach § 1, daß man auch die identische Kongruenz

$$(10) \qquad e\varphi'(x)\varphi(x)^{e-1} + pN'(x) \equiv 0 \pmod{p^{s+1}}$$

haben muß.

Die Unmöglichkeit dieser Kongruenz kann aber aus einer Bemerkung über „Integration" von höheren Kongruenzen bewiesen werden.

Wenn eine Kongruenz

$$a'(x) \equiv b'(x) \pmod{p}$$

besteht, folgt daraus leicht

$$a(x) \equiv b(x) + A(x^p) \pmod{p},$$

wobei $A(x)$ ein Polynom ist. Allgemeiner folgt aus

$$a'(x) \equiv b'(x) \pmod{p^r}$$

die Kongruenz

$$a(x) \equiv b(x) + A_0(x^{p^r}) + pA_1(x^{p^{r-1}}) + \ldots + p^{r-1}A_{r-1}(x^p), \pmod{p^r},$$

wobei alle $A_i(x)$ Polynome sind.

Wendet man dies auf (10) an, kommt also

$$\varphi(x)^e + pN(x) \equiv A_0(x^{p^{s-1}}) + pA_1(x^{p^s}) + \ldots + p^s A_s(x^p) \pmod{p^{s+1}}.$$

Eine solche Kongruenz ist aber unmöglich, denn daraus folgt

$$\varphi(x)^e \equiv A_0(x^{p^{s+1}}) \pmod{p}$$

und es ist bekanntlich

$$A_0(x^{p^{s+1}}) \equiv [A_0(x)]^{p^{s+1}}, \pmod{p},$$

also

$$\varphi(x)^e \equiv [A_0(x)]^{p^{s+1}}. \pmod{p}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren $(\mathrm{mod}\, p)$ ist aber diese Kongruenz nicht möglich, da e nicht durch eine höhere Potenz von p als p^s teilbar ist, während man auf die linke Seite Exponenten erhalten wird, welche durch p^{s+1} teilbar sind. Die Richtigkeit von (1) ist also bewiesen.

§ 4.

Zuletzt soll die folgende Frage behandelt werden:

Wenn eine Zahl ϱ so gegeben ist, daß

$$1 \leqq \varrho \leqq se, \qquad e = p^s e', \qquad (e', p) = 1$$

ist, gibt es dann auch einen solchen Körper K n-ten Grades, daß in K die Idealzerlegung $p = \mathfrak{p}^e \mathfrak{q}$ besteht, wobei $N\mathfrak{p} = p^m$, und weiter die Differente von K durch $\mathfrak{p}^{e-1+\varrho}$ genau teilbar ist?

Herr M. Bauer[5]) hat nachgewiesen, daß es, wenn ϱ seine obere oder untere Grenze erreicht, wenn also entweder $\varrho = se$ oder $\varrho = 1$ ist, immer Körper der gewünschten Art gibt.

Die hier berührte Frage wird durch den folgenden Satz allgemein gelöst:

Wenn $1 \leqq \varrho \leqq es$ ist, so gibt es immer einen solchen Körper, daß die Körperdifferente durch $\mathfrak{p}^{e-1+\varrho}$ genau teilbar ist, außer wenn ϱ gleich einer der Zahlen

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{llll} & p\,, & 2p\,, & \ldots,\ e-p, \\ e, & e+p^2, & e+2p^2, & \ldots,\ 2e-p^2, \\ 2e, & 2e+p^3, & 2e+2p^3, & \ldots,\ 3e-p^3, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (s-1)e, & (s-1)e+p^s, & (s-1)e+2p^s, & \ldots,\ es-p^s \end{array}\right.$$

ist. Wenn ϱ gleich einer der Zahlen (11) ist, gibt es keinen Körper der gewünschten Art.

Der erste Teil des Satzes läßt sich einfach beweisen. Durch verschiedene Wahl des Polynoms $N(x)$ kann man erreichen, daß die Zahl ϱ verschiedene Werte annimmt. Um speziell zu zeigen, daß $\varrho = se$ sein kann, braucht man nur $N(x) = m$ zu setzen, wobei m eine ganze rationale Zahl ist. Dann wird $N'(x) = 0$ und die Körperdifferente wird dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ wie

$$e\varphi'(\omega)\varphi(\omega)^{e-1}$$

enthalten, und $\mathfrak{d}$ ist folglich durch $\mathfrak{p}^{(s+1)e-1}$ genau teilbar, also $\varrho = se$.

Wenn aber $\varrho < se$ ist, wird also $\mathfrak{d}$ dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ wie die Zahl

$$e\varphi'(\omega)\varphi(\omega)^{e-1} + pN'(\omega)$$

enthalten, und da das erste Glied durch $\mathfrak{p}^{(s+1)e-1}$ teilbar wird, braucht man nur $pN'(\omega)$ so zu bestimmen, daß diese Zahl genau $\mathfrak{p}^{e-1+\varrho}$ enthält, d. h. man muß ein Polynom $N(x)$ so bestimmen, daß $N'(\omega)$ durch $\mathfrak{p}^{\varrho-1}$ genau teilbar ist.

Es wird jetzt angenommen, daß die Zahl ϱ nicht zu den Ausnahmezahlen (11) gehört. Wenn dann ϱ auch nicht durch p teilbar ist, kann man ϱ durch e dividieren und erhält

$$\varrho = \alpha e + \beta, \qquad \beta < e,$$

[5]) M. Bauer, Verschiedene Bemerkungen über die Differente usw., Math. Zeitschr. **10**, S. 1–12.

M. Bauer, Bemerkungen zur Theorie der Differente, Acta Litt. ac. Scient. Regiae Univ. Hungariae Francisco-Josephinae I. [1923], S. 195–198.

wobei α und β nicht negative, ganze rationale Zahlen sind. Da e durch p teilbar ist, kann auch nicht β durch p teilbar sein. Setzt man dann

$$N(x) = m + p^{\alpha}\varphi(x)^{\beta},$$

so wird

$$N'(\omega) = p^{\alpha}\beta\varphi'(\omega)\varphi(\omega)^{\beta-1},$$

und $N'(\omega)$ wird daher genau durch

$$\mathfrak{p}^{\alpha e+\beta-1} = \mathfrak{p}^{\varrho-1}$$

teilbar.

Ist aber ϱ durch p teilbar, so kann man auch

$$\varrho = \alpha e + \beta, \qquad \beta < e$$

schreiben, aber in diesem Falle wird β sicher durch p teilbar. Wenn aber β, wie vorausgesetzt, nicht zu den Ausnahmezahlen (1) gehört, so ist β nicht durch $p^{\alpha+1}$ teilbar, und wenn daher β durch p^{b} genau teilbar ist, wird $b \leqq \alpha$.

Setzt man dann

$$N(x) = m + p^{\alpha-b}\varphi(x)^{\beta},$$

so wird

$$N'(\omega) = \beta p^{\alpha-b}\varphi'(\omega)\varphi(\omega)^{\beta-1}$$

und $N'(\omega)$ ist folglich durch $\mathfrak{p}^{\alpha e+\beta-1} = \mathfrak{p}^{\varrho-1}$ genau teilbar.

Dadurch ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Man muß jedoch bei diesen Untersuchungen voraussetzen, daß die durch die spezielle Wahl von $N(x)$ entstandene Gleichung $F(x) = 0$ irreduzibel ausfällt, so daß ein Körper n-ten Grades definiert wird. Dies kann aber bekanntlich z. B. dadurch erreicht werden, daß man für die Koeffizienten in bezug auf eine andere Primzahl q die Bedingungen des Eisensteinschen Satzes vorschreibt.

Ich gehe jetzt zum zweiten Teile des Satzes über und führe den Nachweis, daß $N(x)$ nicht so gewählt werden kann, daß $N'(\omega)$ genau durch $\mathfrak{p}^{\varrho-1}$ teilbar wird, wenn ϱ zu den Zahlen (1) gehört.

Die Ausnahmezahlen (1) haben die Gestalt

$$\varrho = \alpha e + k p^{\alpha+1},$$

wobei α und k ganze rationale Zahlen sind, für die

$$0 \leqq \alpha < s, \qquad 0 \leqq k < \frac{e}{p^{\alpha+1}}$$

gilt. Aus der Voraussetzung

$$N'(\omega) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{\varrho-1}}$$

folgt wie früher

$$N'(x) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha}},$$

also $N'(x) = p^{\alpha} P(x)$, wo $P(x)$ ein Polynom ist. Da aber $N'(\omega)$ durch

$$p^{\alpha e + k p^{\alpha+1} - 1}$$

teilbar sein soll, folgt auch

$$P(x) \equiv \varphi(x)^{k p^{\alpha+1} - 1} Q(x) \pmod{p},$$

wo auch $Q(x)$ ein Polynom ist. Man hat also

$$N'(x) \equiv p^{\alpha} \varphi(x)^{k p^{\alpha+1} - 1} Q(x) \pmod{p^{\alpha+1}}, \tag{12}$$

und da $N'(\omega)$ genau durch p^{e-1} teilbar sein soll, kann $Q(x)$ nicht $(\mathrm{mod}\, p)$ durch $\varphi(x)$ teilbar sein.

Die Unmöglichkeit einer Kongruenz von der Form (12) kann z. B. folgendermaßen nachgewiesen werden:

Es sei ϑ eine Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$. Dann wird

$$\varphi(x) = (x - \vartheta)\varphi'(\vartheta) + (x - \vartheta)^2 \frac{\varphi''(\vartheta)}{2!} + \dots$$

und man kann das Polynom $N'(x)$ nach Potenzen von $x - \vartheta$ entwickeln. Dann ergibt nach (12)

$$N'(x) \equiv A_0 (x - \vartheta)^{k p^{\alpha+1} - 1} + A_1 (x - \vartheta)^{k p^{\alpha+1}} + \dots \pmod{p^{\alpha+1}}, \tag{13}$$

wobei die Reihe nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht. Die Koeffizienten A_i sind Polynome in ϑ, und speziell ist, wie man leicht bemerkt,

$$A_0 = p^{\alpha} \varphi'(\vartheta)^{k p^{\alpha+1} - 1} Q(\vartheta),$$

und hier ist sowohl $\varphi'(\vartheta)$ als $Q(\vartheta)$ zu p relativ prim. Eine Kongruenz von der Form (13) kann aber nicht bestehen. Denn denkt man sich auch $N(x)$ nach Potenzen von $x - \vartheta$ entwickelt, so muß darin sicher ein Glied $B(x - \vartheta)^{k p^{\alpha+1}}$ vorkommen, damit $N'(x)$ ein Glied

$$A_0 (x - \vartheta)^{k p^{\alpha+1} - 1}$$

enthält. Differenziert man aber $B(x - \vartheta)^{k p^{\alpha+1}}$, so entsteht

$$k p^{\alpha+1} B (x - \vartheta)^{k p^{\alpha+1} - 1},$$

also sicher ein durch $p^{\alpha+1}$ teilbares Glied. Eine Kongruenz von der Form (13) kann also nicht bestehen, und daher ist auch die Kongruenz (12) unmöglich, wodurch der Satz bewiesen ist.

Es sei zuletzt bemerkt, daß die Unmöglichkeit einer Kongruenz (12) auch ohne Einführung von algebraischen Zahlen gezeigt werden kann; der Beweis wird aber in diesem Falle etwas verwickelter.

(Eingegangen am 30. Oktober 1924.)

Über unendliche algebraische Zahlkörper[1]).

Von

Erich Stiemke (†).

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	9
Kap. 1.	Über unendliche Moduln	10
Kap. 2.	Ideale in unendlichen algebraischen Körpern . .	15
Kap. 3.	Beschränkte Ideale	23
Kap. 4.	Die Mächtigkeit der Ideale	29
Kap. 5.	Die Zerlegung der Zahlen	33
Kap. 6.	Der Körper aller p^{ν}-ten Einheitswurzeln	38

Einleitung.

Die Arithmetik der endlichen algebraischen Zahlkörper gründet sich auf den fundamentalen Satz von der eindeutigen Darstellung ihrer Zahlen durch Primideale. Es ist nicht möglich, etwas Ähnliches für die Gesamtheit aller algebraischen Zahlen zu beweisen. Dagegen soll in der vor-

[1]) Erich Stiemke, geboren am 12. April 1892, fiel am 10. September 1915 auf dem östlichen Kriegsschauplatz. Auf Grund der vorliegenden Arbeit wurde er im Juli 1914 von der philosophischen Fakultät der Berliner Universität zum Doktorexamen zugelassen. Aus äußeren Gründen kommt die Arbeit erst jetzt (in unveränderter Fassung) zum Abdruck.

Aller Rechnung fern, nur an den Begriffen selbst sich orientierend, mit wunderbarem Blick für das Wesentliche der Dinge — so hat dieser Zweiundzwanzigjährige eine Arbeit geschaffen, die durch die seitherige Entwicklung an keiner Stelle überholt ist. Diese neuere Entwicklung der Idealtheorie geht zu möglichst allgemeiner Struktur der Zerlegungssätze über, unter Beibehaltung wesentlicher Endlichkeitsbedingungen in Form von Kettensätzen; während hier die Endlichkeitsbedingungen möglichst gelockert werden, die Struktur der Zerlegung weitgehend beibehalten wird. Die Verbindung beider Gesichtspunkte wird der Idealtheorie neue Gebiete erschließen.

E. Noether

liegenden Arbeit untersucht werden, inwieweit man die Dedekindsche Idealtheorie auf unendliche algebraische Körper von geringerem Umfang erweitern kann. Es wird sich in der Tat zeigen, daß sie sich auf eine wohldefinierte Klasse unendlicher algebraischer Zahlkörper ausdehnen läßt.

Da jeder unendliche Körper unendlich viele unabhängige Zahlen enthält, ist es nötig, ein Kapitel über die Theorie der unendlichen Moduln vorauszuschicken, in dem vor allem ein Kriterium für die Existenz einer Basis entwickelt werden soll.

Die Ideale in unendlichen Körpern zeigen in vieler Beziehung ein von den endlichen Idealen durchaus abweichendes Verhalten. In der endlichen Idealtheorie hat man z. B. den Satz: Wenn ein Ideal $\mathfrak{a}$ durch ein anderes $\mathfrak{b}$ teilbar ist, so existiert ein drittes Ideal $\mathfrak{c}$, so daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ wird. Dieser Satz läßt sich nur in speziellen Fällen für unendliche Ideale aussprechen. In endlichen Körpern kann man aus $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgern. Auch dies ist, wie wir sehen werden, in unendlichen Körpern im allgemeinen nicht möglich. Ferner stellen sich eigentümliche Schwierigkeiten ein, die darauf beruhen, daß die Menge der Ideale in einem unendlichen algebraischen Körper im allgemeinen nicht abzählbar ist. Dies Hindernis kann bei den in Betracht kommenden Körpern dadurch umgangen werden, daß man nicht sämtliche Ideale des Körpers, sondern nur eine bestimmte abzählbare Menge von ihnen für die Zerlegung der Zahlen benutzt.

Trotz all dieser Abweichungen läßt sich ein Satz über die eindeutige Zerlegung der ganzen Zahlen aufstellen, der in allem Wesentlichen dem bekannten Satz aus der Theorie der endlichen Ideale gleicht.

Im letzten Kapitel wird diese Zerlegung schließlich im Körper aller p^{ν}-ten Einheitswurzeln wirklich ausgeführt.

Kapitel 1.

Über unendliche Moduln[2]).

Die Forderung, daß ein Modul, d. h. eine Gesamtheit von Zahlen, die sich durch (Addition und) Subtraktion reproduziert, „endlich" sei, bedeutet folgendes. Es sollen endlich viele Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ im Modul existieren, so daß alle seine Zahlen eindeutig in der Form

$$\omega = m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2 + \ldots + m_n\,\omega_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar sind. Der Modul heißt dann n-gliedrig, und das System der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ heißt eine Basis des Moduls.

[2]) Die Ergebnisse von Kap. 1 habe ich schon kurz veröffentlicht: Comptes Rendus 157 (1913), Sur les modules dénombrables.

Es liegt nahe, diese Definitionen folgendermaßen zu verallgemeinern:

Die Zahlen der endlichen oder unendlichen, abzählbaren Folge $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ heißen unabhängig, wenn eine homogene, lineare Relation

$$m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots + m_k \alpha_k = 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten bei endlichem k nur dann bestehen kann, wenn alle m_ν verschwinden.

Der unendliche Modul M besitzt die Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots$, wenn diese Zahlen ihm angehören, und wenn sich seine sämtlichen Zahlen in der Form

$$\omega = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \ldots + m_\nu \omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

mit ganzen Koeffizienten eindeutig darstellen lassen. Wir schreiben dann:

$$M = [\omega_1, \omega_2, \ldots].$$

Es ergibt sich nun die Frage: Wie muß ein unendlicher Modul beschaffen sein, damit er eine Basis besitzt? Da wir verlangen, daß die Basis abzählbar ist, so müssen die Zahlen des Moduls dieselbe Eigenschaft haben. Wir beschränken uns daher auf abzählbare Moduln.

Greift man aus einem abzählbaren Modul M endlich viel unabhängige Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ beliebig heraus, so genügen alle Zahlen α aus M, die von den α_i abhängig sind, linearen Relationen der Form:

$$k\alpha = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots + m_n \alpha_n.$$

Ihre Gesamtheit, die offenbar wieder ein Modul ist, nenne ich den durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestimmten *Abschnitt* von M.

Es gilt dann der Satz:

I. *Gegeben sei ein n-gliedriger Modul $M = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$. Durch die $n-1$ unabhängigen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ werde in ihm ein Abschnitt A bestimmt mit der Basis $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$. Dann lassen sich die $n-1$ Basiszahlen β_i von A durch eine n-te Zahl β_n zu einer Basis von M ergänzen.*

Fügen wir zu $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ zunächst irgendeine von ihnen unabhängige Zahl μ aus M hinzu, so daß

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \mu$$

ein vollständiges System unabhängiger Zahlen von M bilden, so folgt aus den Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned} \beta_1 &= k_{11}\omega_1 + k_{12}\omega_2 + \ldots + k_{1n}\omega_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n-1} &= k_{n-1,1}\omega_1 + k_{n-1,2}\omega_2 + \ldots + k_{n-1,n}\omega_n, \\ \mu &= k_{n1}\omega_1 + k_{n2}\omega_2 + \ldots + k_{nn}\omega_n, \end{aligned}$$

deren Determinante Δ von 0 verschieden ist, daß für jedes ω_i und also für jede Zahl ω aus M eine Relation besteht:

$$\Delta\omega = k_1\beta_1 + \ldots + k_{n-1}\beta_{n-1} + k_n\mu. \tag{2}$$

Durchläuft in (2) ω alle Zahlen aus M, so sei der kleinste von 0 verschiedene, positive Wert von k_n, der hierbei auftritt, gleich k, und zu ihm gehöre z. B. die Zahl α:

$$\Delta\alpha = l_1\beta_1 + \ldots + l_{n-1}\beta_{n-1} + k\mu.$$

Ist nun für die beliebige Zahl ω aus M in (2)

$$k_n = qk + r,$$

wo r den kleinsten positiven Rest von $k_n \bmod k$ bedeutet, so bilde man:

$$\Delta(\omega - q\alpha) = (k_1 - ql_1)\beta_1 + \ldots + (k_{n-1} - ql_{n-1})\beta_{n-1} + r\mu.$$

Wäre nun $r > 0$, so würde für die Zahl $\omega - q\alpha$ der Koeffizient von μ noch kleiner sein als k entgegen unserer Annahme. Daraus folgt:

$$\Delta(\omega - q\alpha) = (k_1 - ql_1)\beta_1 + \ldots + (k_{n-1} - ql_{n-1})\beta_{n-1}.$$

Die Zahl $\Delta(\omega - q\alpha)$ ist also im Abschnitt A enthalten. $\omega - q\alpha$ selbst ist daher ebenfalls von den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ abhängig und infolgedessen durch die β mit ganzen Koeffizienten darstellbar. So ergibt sich, daß alle $k_i - ql_i$ durch Δ teilbar sind, so daß

$$k_i - ql_i = m_i\Delta, \qquad \omega = m_1\beta_1 + \ldots + m_{n-1}\beta_{n-1} + q\alpha,$$

also $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \alpha$ eine Basis von M wird, die der Behauptung entspricht.

Man erkennt nun auch leicht, daß die Basiszahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ eines beliebigen ν-gliedrigen Abschnitts von M durch Hinzufügung von $n - \nu$ weiteren Zahlen zu einer Basis von M vervollständigt werden können. Denn seien $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \ldots, \omega_n$ $n - \nu$ Zahlen aus M, die zusammen mit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ n unabhängige Zahlen des Moduls ergeben. Dann ist der durch $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ in M bestimmbare Abschnitt A_ν auch Abschnitt des durch $\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \omega_{\nu+1}$ in M bestimmten Abschnitts $A_{\nu+1}$. $A_{\nu+1}$ besitzt daher nach dem Vorhergehenden eine Basis der Form $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \beta_{\nu+1}$. Ebenso ergibt sich, daß der durch $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}$ in M bestimmte Abschnitt $A_{\nu+2}$ eine Basis der Form $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \beta_{\nu+1}, \beta_{\nu+2}$ besitzt, usw., schließlich M selbst eine Basis $\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \beta_{\nu+1}, \ldots, \beta_n$.

Wir kehren nun zu den unendlichen Moduln zurück und definieren:

Ist jeder Abschnitt des abzählbaren Moduls M ein endlicher Modul, so wollen wir sagen:

M besitzt endliche Abschnitte.

Dann gilt der Satz:

II. *Ein abzählbarer Modul hat dann und nur dann eine Basis, wenn er endliche Abschnitte besitzt.*

Sei zunächst M ein solcher Modul mit endlichen Abschnitten. Seine Elemente seien, in einer Reihe geordnet:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots .$$

Dann läßt sich ein vollständiges System unabhängiger Zahlen in M etwa so bestimmen: Man streiche alle α_ν, die von α_1 linear abhängig sind, also die Form $\alpha_1 r$ haben, wenn r eine rationale Zahl bedeutet. Die erste Zahl der Folge, welche nicht diese Form hat, sei α_{ν_1}. Streicht man wieder alle von α_1 und α_{ν_1} abhängigen Zahlen, so sei die erste übrigbleibende α_{ν_2}. Indem man so fortfährt, erhält man offenbar in $\alpha_1, \alpha_{\nu_1}, \alpha_{\nu_2}, \ldots$ ein vollständiges System unabhängiger Zahlen von M. Sei jetzt

$$\omega_1', \omega_2', \omega_3', \ldots$$

ein solches System. Der durch ω_1' in M definierte Abschnitt ist dann nach Voraussetzung ein eingliedriger, endlicher Modul $[\omega_1]$. Der durch ω_1, ω_2' in M bestimmte Abschnitt besitzt nach I. eine Basis der Form ω_1, ω_2. Ebenso erkennen wir, daß der durch $\omega_1, \omega_2, \omega_3'$ definierte Abschnitt nach Satz I einem endlichen Modul der Form $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ gleich ist, usw. Daher wird

$$M = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots].$$

Denn der durch $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_\nu'$ bestimmte Abschnitt ist gleich dem durch $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu-1}, \omega_\nu'$ bestimmten, also gleich dem Modul $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu]$, und da für jede Zahl α aus M eine Beziehung gilt:

$$k\alpha = k_1\omega_1' + \ldots + k_\nu\omega_\nu',$$

muß sie in einem der Moduln $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu]$ vorkommen.

Es ergibt sich hier nicht nur die Existenz einer Basis, sondern, wie wir besonders hervorheben wollen, der etwas allgemeinere Satz[3]):

Besitzt der Modul M endliche Abschnitte und ist $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ein vollständiges System unabhängiger Zahlen aus M, so läßt sich eine Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots$ von M so finden, daß

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= k_{11}\omega_1, \\
\alpha_2 &= k_{21}\omega_1 + k_{22}\omega_2, \\
\alpha_3 &= k_{31}\omega_1 + k_{32}\omega_2 + k_{33}\omega_3, \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

wird.

[3]) Den entsprechenden Satz über endliche Moduln findet man z. B. bei Dedekind, Théorie des nombres entiers algébriques, S. 18.

Umgekehrt besitzt jeder mit einer Basis versehene Modul $M = [\omega_1, \omega_2, \ldots]$ endliche Abschnitte. Denn möge etwa ein Abschnitt durch die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gegeben sein, wo

$$\alpha_i = k_{i1}\omega_1 + k_{i2}\omega_2 + \ldots + k_{im}\omega_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

ist. Jede Zahl α des Abschnitts hat die Form

$$\alpha = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_n\alpha_n \qquad (r_i \text{ rational}).$$

Andererseits ist sie wegen (4) gleich

$$x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \ldots + x_m\omega_m,$$

wo die x_i sich zunächst als rational ergeben. Da aber α dem Modul angehört, läßt es sich eindeutig mit ganzen Koeffizienten aus den ω_i komponieren. Hieraus folgt, daß die x_i ganze Zahlen sind. Daher gehört jede Zahl des vorliegenden Abschnitts dem endlichen Modul $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m]$ an, der Abschnitt ist also nach einem bekannten Satz selbst ein endlicher Modul.

Kommt jede Zahl des Moduls M' in M vor, so heißt bekanntlich M' durch M teilbar ($M' \succ M$). Es ergibt sich die einfache Folgerung:

III. *Besitzt der Modul M eine Basis und ist der Modul M′ durch M teilbar, so besitzt auch M′ eine Basis.*

Wird nämlich durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ in M' ein Abschnitt bestimmt, so ist er durch den Abschnitt teilbar, welchen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ in M erzeugen. Dieser besitzt aber eine endliche Basis, folglich auch der Abschnitt von M'. Das ergibt nach Satz II die Behauptung.

Die Frage, wodurch ein *endlicher* Abschnitt ausgezeichnet ist, wird durch folgenden Satz beantwortet:

Dafür, daß der durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ im Modul M bestimmte Abschnitt ein endlicher Modul ist, ist notwendig und hinreichend, daß in den Zahlen α des Abschnitts

$$\alpha = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_r\alpha_r$$

der Generalnenner der r_i unterhalb einer endlichen Schranke bleibt.

Ist dies der Fall und ist etwa k der größte Wert dieses Generalnenners, so ist offenbar der Abschnitt ganz in dem endlichen Modul $\left[\frac{\alpha_1}{k!}, \frac{\alpha_2}{k!}, \ldots, \frac{\alpha_r}{k!}\right]$ enthalten, besitzt also selbst eine endliche Basis.

Sei umgekehrt $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ eine Basis des Abschnitts

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{r} m_{ik}\omega_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

so ist, da die α als unabhängig vorausgesetzt werden,

$$\Delta = |m_{ik}|$$

von 0 verschieden. $\Delta\omega_k$ ist durch die α_i mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar, und der oben erwähnte Generalnenner ist ein Teiler von Δ. also beschränkt.

Der Satz II gilt, wie man leicht übersieht, nicht nur, wenn es sich um einen Zahlmodul in engerem Sinne handelt, dessen Elemente sich durch gewöhnliche Addition und Subtraktion reproduzieren. Er bleibt bestehen. wenn man es mit einer unendlichen Abelschen Gruppe zu tun hat, deren Elemente aber sämtlich unendlich hohe Ordnung haben müssen, so daß aus $\alpha^k = \beta^k$, wenn α und β der Gruppe angehören, $\alpha = \beta$ gefolgert werden darf.

Wir wollen nun aus den eben bewiesenen Sätzen eine für das Spätere wichtige Folgerung über algebraische Zahlen ableiten.

Bekanntlich besitzen die ganzen Zahlen eines endlichen algebraischen Körpers vom Grade n eine Basis, die aus n unabhängigen Elementen besteht. Liegt ein unendlicher Körper algebraischer Zahlen vor, so greife man irgend m ganze Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ heraus und bilde den durch sie bestimmten Abschnitt, der alle ganzen Zahlen der Form

$$\alpha = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_m\alpha_m$$

umfaßt, wo die r_i rationale Zahlen bedeuten. Dieser Abschnitt ist ganz in dem endlichen, durch die Zahlen α_1 bis α_m erzeugten Zahlkörper $\mathsf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ enthalten, und zwar genauer in der Gesamtheit seiner ganzen Zahlen. Er besitzt daher wie diese eine endliche Basis, woraus nach Satz II unmittelbar folgt:

IV. *Die Gesamtheit aller ganzen algebraischen Zahlen, jedes endlichen oder unendlichen algebraischen Zahlkörpers, insbesondere also des Körpers aller algebraischen Zahlen, besitzt eine Basis.*

Nach Satz III können wir daher auch sagen:

Jeder aus ganzen algebraischen Zahlen bestehende Modul besitzt eine Basis.

Kapitel 2.

Ideale in unendlichen Körpern.

Adjungiert man zu einem endlichen algebraischen Körper $K_1 = \mathsf{P}(\alpha$ nacheinander die algebraischen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, so entsteht eine Folge endlicher Körper:

$$K_1 = \mathsf{P}(\alpha),\ K_2 = \mathsf{P}(\alpha, \alpha_1),\ K_3 = \mathsf{P}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2),\ \ldots,$$

von denen jeder vorangehende im folgenden enthalten ist. Die Gesamt-

heit der in sämtlichen K_ν auftretenden Zahlen ist wieder ein Körper, den man mit

$$K = \mathsf{P}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$$

bezeichnen kann. Kommen unter den α_ν unendlich viele linear unabhängige Zahlen vor, so ist der entstehende Körper K ein unendlicher algebraischer Körper über P. Da umgekehrt die Zahlen eines beliebigen unendlichen algebraischen Körpers K nach Cantor abzählbar sind, läßt sich auch jeder algebraische Körper in der Form $\lim_{\nu=\infty} K_\nu$ darstellen, wo K_1 ein endlicher Körper und $K_{\nu-1}$ in K_ν enthalten ist, indem man etwa sukzessive seine sämtlichen Zahlen dem Körper P der rationalen Zahlen adjungiert. Diese einfache Darstellung ist wohl von Dedekind [1]) zuerst benutzt worden.

Ist $\mathfrak{g}$ die Gesamtheit der ganzen algebraischen Zahlen des unendlichen Körpers K, $\mathfrak{g}_\nu$ die der ganzen Zahlen aus K_ν, so ist offenbar in demselben Sinne:

$$\mathfrak{g} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{g}_\nu.$$

Die Körperfolge $K_1, K_2, \ldots$ kann ersichtlich auf unendlich viele Arten gewählt werden. Wir denken aber zunächst eine bestimmte Folge willkürlich zugrunde gelegt.

Als „*Modul in* $\mathfrak{g}$" werde im folgenden ein durch $\mathfrak{g}$ teilbarer Modul bezeichnet, dem ein vollständiges System unabhängiger Zahlen aus $\mathfrak{g}$ angehört. Dann können wir analog wie für endliche Körper definieren:

Ein Modul $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{g}$ *heißt ein (ganzes) Ideal des Körpers* K, *wenn die Gleichung besteht*:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{a}.$$

Bildet man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $\mathfrak{a}_\nu$ (im folgenden kurz mit *k. g. V.* bezeichnet) des Ideals $\mathfrak{a}$ und der Gesamtheit $\mathfrak{g}_\nu$, so entsteht offenbar ein „Modul in $\mathfrak{g}_\nu$". Außerdem ist

$$\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{g}_\nu \succ \mathfrak{a}\,\mathfrak{g} \succ \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{g}_\nu \succ \mathfrak{g}_\nu, \qquad \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{g}_\nu \succ \mathfrak{a}_\nu,$$

woraus wegen $\mathfrak{a}_\nu \succ \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{g}_\nu$, $\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{a}_\nu$ folgt.

Das k. g. V. des Ideals $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{g}$ *und der Gesamtheit* $\mathfrak{g}_\nu$ *ist ein Ideal in* $\mathfrak{g}_\nu$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$ eine Folge von ganzen Idealen aus $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \ldots$ und ist $\mathfrak{a}_1 \succ \mathfrak{a}_2 \succ \mathfrak{a}_3 \succ \ldots$, so ist die Gesamtheit der Zahlen, die in all diesen Idealen auftreten:

$$\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu$$

[1]) Dedekind, Über die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen, Festschrift der Gött. Gesellsch. d. Wissensch., Berlin 1901.

rstens ein Modul in $\mathfrak{g}$. Sind zweitens $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\nu$ irgendwelche ganze Zahlen aus K, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ beliebige Zahlen aus den $\mathfrak{a}_\nu$, so ist

$$\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_2 + \ldots + \alpha_\nu\gamma_\nu$$

durch ein Ideal $\mathfrak{a}_\mu$ der obigen Folge teilbar. Daher ergibt sich:

Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ *von* K *läßt sich in der Form*

$$\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu$$

darstellen, wobei $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$ *Ideale der Körper* $K_1, K_2, \ldots$ *bedeuten mit der Eigenschaft, daß* $\mathfrak{a}_1 \succ \mathfrak{a}_2 \succ \mathfrak{a}_3 \succ \ldots$ *ist.*

Auch diese Darstellung ist nicht eindeutig. Wenn man aber eine bestimmte Körperfolge $K_1, K_2, K_3, \ldots$ zugrunde gelegt hat, so gibt es unter allen möglichen Darstellungen von $\mathfrak{a}$ in der Form $\lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu$ eine ausgezeichnete, nämlich die, bei der $\mathfrak{a}_\nu$ das k. g. V. von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}_\nu$ ist. Bezeichnet $\mathfrak{a}_\nu$ dieses k. g. V., und ist $\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{b}_\nu$ $[\mathfrak{b}_1 \succ \mathfrak{b}_2 \succ \mathfrak{b}_3 \succ \ldots]$ irgendeine andere Darstellung von $\mathfrak{a}$, in der auch $\mathfrak{b}_\nu$ ein Ideal von K_ν bedeutet, so ist $\mathfrak{b}_\nu$ durch das k. g. V. von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}_\nu$ teilbar, $\mathfrak{b}_\nu \succ \mathfrak{a}_\nu$. Folglich hat bei der Zerlegung in Primideale $\mathfrak{a}_\nu$ eine möglichst geringe Anzahl von Teilern.

Ist in $\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_\lambda$ das k. g. V. von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}_\lambda$, so ist $\mathfrak{a}_\lambda$ auch das k. g. V. eines jeden folgenden $\mathfrak{a}_\mu$ $(\mu > \lambda)$ und der Gesamtheit $\mathfrak{g}_\lambda$. Denn ist etwa $\mathfrak{a}'_\lambda$ das k. g. V. von $\mathfrak{a}_\mu$ und $\mathfrak{g}_\lambda$, so ist:

$$\mathfrak{a}'_\lambda \succ \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}'_\lambda \succ \mathfrak{g}_\lambda, \qquad \mathfrak{a}'_\lambda \succ \mathfrak{a}_\lambda.$$

Andrerseits ist

$$\mathfrak{a}_\lambda \succ \mathfrak{a}_\mu, \qquad \mathfrak{a}_\lambda \succ \mathfrak{g}_\lambda, \qquad \mathfrak{a}_\lambda \succ \mathfrak{a}'_\lambda.$$

Dies ergibt in der Tat $\mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}'_\lambda$.

Der Körper K_ν sei vom Grade n_ν. Dann enthält $\mathfrak{g}_\nu$ n_ν unabhängige Zahlen. $\mathfrak{a}_\nu$ sei das k. g. V. des Ideals $\mathfrak{a}$ und der Gesamtheit $\mathfrak{g}_\nu$. Man greife aus $\mathfrak{a}_\nu$ n_ν unabhängige Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_\nu}$ heraus. Sie bestimmen in $\mathfrak{a}$ einen Abschnitt, dessen Zahlen die Form haben:

$$\frac{1}{k}(k_1\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n) = \frac{1}{k}\alpha,$$

wo α eine Zahl aus $\mathfrak{a}_\nu$ bedeutet. $\frac{\alpha}{k}$ gehört dem Ideal $\mathfrak{a}$ an, ist also eine ganze algebraische Zahl. Da sie im Körper K_ν vorkommt, ist sie durch $\mathfrak{a}_\nu$ teilbar. Dies ergibt:

Das k. g. V. $\mathfrak{a}_\nu$ *des Ideals* $\mathfrak{a}$ *und der Gesamtheit* $\mathfrak{g}_\nu$ *ist ein Abschnitt von* $\mathfrak{a}$.

Hieraus folgt nach den Sätzen des ersten Kapitels leicht daß man eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$ folgendermaßen herstellen kann:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= k_{11}\omega_1, \\ \alpha_2 &= k_{21}\omega_1 + k_{22}\omega_2, \\ \alpha_3 &= k_{31}\omega_1 + k_{32}\omega_2 + k_{33}\omega_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Dabei bedeuten, wenn wieder n_ν der Grad des Körpers K_ν ist, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_\nu}$ eine Basis von $\mathfrak{a}_\nu$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n_\nu}$ eine Basis von $\mathfrak{g}_\nu$.

Jedes endliche Ideal ist Teiler einer ganzen rationalen Zahl k. Sei etwa $\mathfrak{a}_1$ Teiler von k, so folgt aus $k \succ \mathfrak{a}_1$: $k\mathfrak{g} \succ \mathfrak{a}$. Bei der Auflösung der Gleichungen (1) nach den ω_i ergibt sich ω_i als homogene, lineare Funktion von α_1 bis α_i, in der α_i den Koeffizienten $\frac{1}{k_{ii}}$ erhält. Da nun $k\omega_i$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, muß $\frac{k}{k_{ii}}$ eine ganze Zahl sein, k_{ii} muß in k aufgehen. Dies hat zur Folge, daß die k_{ii} absolut beschränkt sind. Nun lassen sich die übrigen Koeffizienten $k_{\alpha\beta}$ durch unimodulare Substitutionen der ω_i nach den k_{ii} reduzieren. Setzt man z. B. $\alpha_2' = \alpha_2 - x\alpha_1$, so bilden $\alpha_1, \alpha_2', \alpha_3, \ldots$ wieder eine Basis von $\mathfrak{a}$, und es ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= k_{11}\omega_1, \\ \alpha_2' &= (k_{21} - xk_{11})\omega_1 + k_{22}\omega, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Entsprechend kann man für α_3 $\alpha_3' = \alpha_3 - x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2$ einführen und dabei die Koeffizienten x_1 und x_2 so bestimmen, daß in

$$\alpha_3' = k_{31}'\omega_1 + k_{32}'\omega_2 + k_{33}\omega_3$$

k_{31}' und k_{32}' beliebige zu k_{31} resp. k_{32} mod k_{11} resp. k_{22} kongruente Werte erhalten. So kann man fortfahren, und da die Diagonalkoeffizienten $k_{11}, k_{22}, \ldots$ absolut beschränkt sind, ergibt sich:

Die Basen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und $\omega_1, \omega_2, \ldots$ in (1) können so angenommen werden, daß die sämtlichen Koeffizienten $k_{\alpha\beta}$ absolut beschränkt sind.

In der Theorie der endlichen Körper spielen gewisse ganze rationale Zahlen eine große Rolle und zwar vor allem die Körperdiskriminante und deren Primteiler. Sei

$$K = \lim_{\nu = \infty} K_\nu$$

ein unendlicher Körper, so ist, da K_ν in $K_{\nu+1}$ enthalten ist, nach einem bekannten Satz die Diskriminante Δ_ν von K_ν ein echter Divisor der Diskriminante $\Delta_{\nu+1}$ von $K_{\nu+1}$, und zwar ist genauer:

$$\Delta_{\nu+1} = \Delta_\nu^r n(\Delta_k),$$

wo r den Quotienten der Grade von $K_{\nu+1}$ und K_ν bezeichnet, während $n(\Delta_k)$ die in K_ν angenommene Norm der Relativdiskriminante Δ_k ist.

Hieraus folgt, daß nicht nur Δ_ν selbst, sondern sogar der Exponent jeder in einem der Δ_ν aufgehenden Primzahlpotenz mit ν über alle Grenzen wächst. Die in den Δ_ν aufgehenden Primzahlen sind in ihrer Gesamtheit unabhängig von der zufälligen Wahl der Körperfolge K_ν. Denn legen wir eine andere Folge $K_1', K_2', \ldots$ zugrunde, so daß ebenfalls

$$K_1' > K_2' > K_3' > \ldots \quad \text{und} \quad K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu'$$

wird, so muß die erzeugende Zahl ϑ des Körpers K_ν' in K und also in einem der Körper K_ν vorkommen, etwa zuerst in K_m. Dann ist K_ν' in K_m enthalten, und also sind die Diskriminantenteiler von K_ν' auch solche von K_m. Wir können daher das System der in allen Δ_ν auftretenden Primzahlen und jede aus ihnen gebildete Zahl als *Diskriminantenteiler des unendlichen Körpers* K bezeichnen.

Ähnlich liegen die Dinge bei den Normen der Zahlen und Ideale. Sei

$$\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu$$

ein Ideal von K. Wir denken uns eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$ aufgestellt von der Art wie in (1). Ist dann K_ν vom Grade n_ν, so wird

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_\nu) = k_{11} k_{22} \ldots k_{n_\nu, n_\nu}.$$

Hier sind nach dem oben Bemerkten die k_{ii} beschränkt und in sämtlichen Normen $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_\nu)$ werden daher im ganzen nur endlich viel Primzahlen auftreten, etwa $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Ist dann der Exponent von p_i in allen $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_\nu)$ beschränkt und der höchste auftretende gleich k_i, so sagen wir $p_i^{k_i}$ sei die höchste in $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_\nu)$ aufgehende Potenz von p_i. Ist der Exponent unbeschränkt, so sagen wir, $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ sei durch p_i^∞ teilbar. Daß diese Zerlegung der Norm von der speziellen Wahl der Körperfolge unabhängig ist, erkennt man leicht wie oben.

Ist $\mathfrak{c}$ Ideal eines endlichen Körpers, so gilt bekanntlich die Relation $\mathfrak{c}^0 = \mathfrak{g}$, wo $\mathfrak{c}^0$ die Gesamtheit der Zahlen ζ bedeutet, für welche die Beziehung

$$\mathfrak{c}\zeta > \mathfrak{c}$$

gilt. Dasselbe läßt sich auch leicht für unendliche Ideale nachweisen. Sei $\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu$ ein solches, wobei $\mathfrak{a}_\nu$ das k. g. V. von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}_\nu$ bedeutet, so bezeichne wieder $\mathfrak{a}^0$ die Gesamtheit der Zahlen ζ, für die

$$\mathfrak{a}\zeta > \mathfrak{a}$$

ist. Hieraus folgt erstens wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{g} > \mathfrak{a}$, daß jede ganze Zahl γ des Körpers zu den Zahlen ζ gehört, also

$$\mathfrak{g} > \mathfrak{a}^0. \tag{2}$$

Genügt umgekehrt ζ obiger Relation, so hat es die Form $\zeta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, wo α_1 und α_2 zu $\mathfrak{a}$ gehören, ist also im Körper K enthalten. Es gehört daher einem der Körper K_ν an, etwa K_m. Dann ist:

$$\mathfrak{a}_m \zeta \succ \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}_m \zeta \succ K_m, \quad \mathfrak{a}_m \zeta \succ \mathfrak{a}_m, \quad \zeta \succ \mathfrak{a}_m^0 = \mathfrak{g}_m.$$

Folglich ist ζ eine ganze Zahl des Körpers, d. h. $\mathfrak{a}^0 \succ \mathfrak{g}$. Dies ergibt nach (2) $\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{g}$, was zu beweisen war.

Um überhaupt an eine Zerlegung der Zahlen des unendlichen Körpers durch Ideale denken zu können, haben wir vor allem die Existenz von Primidealen nachzuweisen. Wir definieren zunächst:

Ein Ideal $\mathfrak{p}$ *von* $K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$ *heißt ein Primideal, wenn es außer durch sich selbst und durch* $\mathfrak{g}$ *dureh kein anderes Ideal des Körpers teilbar ist.*

Sei $\mathfrak{g}_\nu$ die Gesamtheit der ganzen Zahlen aus K_ν und $\mathfrak{p}_1$ ein Primideal aus K_1. Dann ist

$$\mathfrak{p}_1 \succ \mathfrak{p}_1 \mathfrak{g}_2$$

und $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{g}_2$ ein Ideal in $\mathfrak{g}_2$, dessen Zerlegung innerhalb K_2

$$\mathfrak{p}_1 \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{p}_1'^{k_1} \mathfrak{p}_2'^{k_2} \dots \mathfrak{p}_{\nu_2}'^{k_{\nu_2}}$$

sein möge. Dann ist auch

$$\mathfrak{p}_1 \succ \mathfrak{p}_1'$$

Ebenso schließt man, daß das Primideal $\mathfrak{p}_1'$ des Körpers K_2 durch ein Primideal von K_3 teilbar ist usf. Man erhält so eine Folge von Primidealen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots \text{ aus } K_1, K_2, K_3, \dots$$

derart, daß $\mathfrak{p}_1 \succ \mathfrak{p}_2 \succ \mathfrak{p}_3 \dots$ ist.

$$\mathfrak{p} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_\nu$$

definiert daher ein Ideal des unendlichen Körpers, und ich behaupte, daß dies Ideal ein Primideal ist. Zunächst ist klar, daß $\mathfrak{p}_\nu$ das k. g. V. von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{g}_\nu$ sein muß. Denn ist $\mathfrak{a}_\nu$ dieses k. g. V., so folgt $\mathfrak{p}_\nu \succ \mathfrak{a}_\nu$, d. h. $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{g}_\nu$ oder $\mathfrak{p}_\nu$. Das erste verbietet sich von selbst, da die 1 nicht in $\mathfrak{p}$ vorkommt, folglich $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$. Wäre nur $\mathfrak{p}$ durch ein Ideal $\mathfrak{a}$ teilbar und als Grenzwert der k. g. V.

$$\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu,$$

so würde folgen:

$$\mathfrak{p}_\nu \succ \mathfrak{a}_\nu.$$

Hieraus ergibt sich wieder entweder $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{g}_\nu$ oder $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$. Wäre das erste der Fall, so käme die 1 in $\mathfrak{a}_\nu$, also auch in allen folgenden $\mathfrak{a}_\mu$ vor, es

wäre $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. Im andern Fall sind alle $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$, d. h. $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ ist also ein Primideal.

Man erkennt nun auch leicht, daß jedes beliebige Ideal mindestens durch ein Primideal teilbar ist. Denn sei als Grenzwert der k. g. V.

$$\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu,$$

und ist hierin

$$\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1}\, \mathfrak{p}_{\nu 2} \cdots \mathfrak{p}_{\nu n_\nu},$$

wo die Primideale $\mathfrak{p}_{\nu\varkappa}$ aus $\mathfrak{g}_\nu$ nicht verschieden zu sein brauchen, so folgt aus $\mathfrak{a}_1 \succ \mathfrak{a}_2 : \mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_2 \succ \mathfrak{a}_2$, d. h.

$$(\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{g}_2)(\mathfrak{p}_{12}\mathfrak{g}_2)\cdots(\mathfrak{p}_{1n_1}\mathfrak{g}_2) \succ \mathfrak{p}_{21}\mathfrak{p}_{22}\cdots\mathfrak{p}_{2n_2},$$
$$(\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{g}_2)(\mathfrak{p}_{12}\mathfrak{g}_2)\cdots(\mathfrak{p}_{1n_1}\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{p}_{21}\mathfrak{p}_{22}\cdots\mathfrak{p}_{2n_2}\mathfrak{j}_2.$$

Die $\mathfrak{p}_{1\varkappa}\mathfrak{g}_2$ sind jetzt Ideale in $\mathfrak{g}_2$. Greifen wir eins von ihnen beliebig heraus, etwa $\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{g}_2$, so muß es durch eins der Primideale $\mathfrak{p}_{2\nu}$ teilbar sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, also $\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{g}_2$ zu allen $\mathfrak{p}_{2\nu}$ teilerfremd, so müßte $\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{g}_2$ in $\mathfrak{j}_2$ aufgehen:

$$\mathfrak{j}_2 = (\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{g}_2)\mathfrak{j}_2',$$
$$(\mathfrak{p}_{12}\mathfrak{g}_2)\cdots(\mathfrak{p}_{1n_1}\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{p}_{21}\mathfrak{p}_{22}\cdots\mathfrak{p}_{2n_2}\mathfrak{j}_2',$$
$$\mathfrak{p}_{12}\mathfrak{p}_{13}\cdots\mathfrak{p}_{1n_1} \succ \mathfrak{p}_{21}\mathfrak{p}_{22}\cdots\mathfrak{p}_{2n_2} = \mathfrak{a}_2.$$

Nun war aber $\mathfrak{a}_1$ das k. g. V. von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}_1$, also (s. S. 17) von $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{g}_1$, während hiernach das umfassendere Ideal $\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{p}_{11}}$ durch $\mathfrak{a}_2$ teilbar wäre. Folglich war unsere Annahme nicht richtig, $\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{g}_2$ ist durch eins der $\mathfrak{p}_{2\nu}$, etwa durch $\mathfrak{p}_{2\varkappa}$ teilbar, und also auch

$$\mathfrak{p}_{11} \succ \mathfrak{p}_{2\varkappa}.$$

Genau so schließt man, daß $\mathfrak{p}_{2\varkappa}$ durch eins der $\mathfrak{p}_{3\nu}$, etwa durch $\mathfrak{p}_{3\lambda}$ teilbar ist usf. Die Folge dieser Primideale

$$\mathfrak{p}_{11} \succ \mathfrak{p}_{2\varkappa} \succ \mathfrak{p}_{3\lambda} \cdots$$

konvergiert gegen ein unendliches Primideal $\mathfrak{p}$, durch welches $\mathfrak{a}$ offenbar teilbar ist.

Alle bisherigen Überlegungen gelten ohne jede Einschränkung über die Natur der betrachteten unendlichen Körper, insbesondere auch für den Körper aller algebraischen Zahlen.

Der Hauptsatz der Idealtheorie für endliche Körper läßt zwei gleichbedeutende Formulierungen zu:

1. Es existiert zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ ein zweites $\mathfrak{a}'$, so daß $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ ein Hauptideal wird.

2. Ist $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}'$ teilbar ($\mathfrak{a} \succ \mathfrak{a}'$), so existiert ein Ideal $\mathfrak{a}''$ derart, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$ wird.

Angenommen, der Satz bestände in seiner ersten Form auch für unendliche Körperideale, und es sei für die Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \quad \mathfrak{a}\mathfrak{a}'',$$

so multipliziere man die Gleichung mit dem Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$, für welches $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}$ ein Hauptideal ist. Dann folgt in bekannter Weise $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}''$. Es läßt sich nun an Beispielen zeigen, daß ein solcher Schluß für Ideale unendlicher Körper nicht mehr allgemein zulässig ist.

Wir betrachten zu dem Zweck einen endlichen, durch die ganze algebraische Zahl ϑ, die keine Einheit ist, erzeugten Körper $K_1 = \mathsf{P}(\vartheta)$, adjungieren einen Wert von $\vartheta^{\frac{1}{2}}$: $K_2 = K_1(\vartheta^{\frac{1}{2}})$, weiter einen Wert von $\vartheta^{\frac{1}{3}}$: $K_2(\vartheta^{\frac{1}{3}}) = K_3$ usf. Dann ist $K_\nu \succ K_{\nu+1}$, und $K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$ ist ein unendlicher Körper. Die Gesamtheit derjenigen ganzen Zahlen aus K, die durch eine der Zahlen $\vartheta, \vartheta^{\frac{1}{2}}, \vartheta^{\frac{1}{3}}, \ldots$ teilbar sind, bilden, wie man sofort erkennt, ein Ideal in $\mathfrak{g}$, das auch von $\mathfrak{g}$ verschieden ist, da es die Zahl 1 nicht enthält. Dies Ideal heiße $\mathfrak{n}$. Dann ist natürlich

$$\mathfrak{n}^2 \succ \mathfrak{n}. \tag{3}$$

Gehört aber die Zahl α dem Ideal $\mathfrak{n}$ an, ist also

$$\alpha = \vartheta^{\frac{1}{q}}\omega,$$

wo q eine ganze positive Zahl bedeutet, und versteht man unter $\vartheta^{\frac{1}{q}}$ den im Körper K_q enthaltenen Wert, so ist auch ω eine Zahl aus K und

$$\alpha = \vartheta^{\frac{1}{2q}}\left(\vartheta^{\frac{1}{2q}}\omega\right)$$

ist, wenn wieder $\vartheta^{\frac{1}{2q}}$ den im Körper K_{2q} vorkommenden Wert bedeutet, eine Zahl aus $\mathfrak{n}^2$, also

$$\mathfrak{n} \succ \mathfrak{n}^2.$$

In Verbindung mit (3) ergibt dies $\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}$. Hieraus kann man also nicht wie in endlichen Körpern $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ folgern.

$K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$ sei ein beliebiger unendlicher Körper. Dann bilden alle Ideale von K, welche die Form

$$\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{g}$$

haben, wo $\mathfrak{a}_\nu$ Ideal in irgendeinem der Körper K_ν ist, eine Klasse von Idealen des unendlichen Körpers, für die man das Fortbestehen des Hauptsatzes unmittelbar erkennt. Ist nämlich in dem endlichen Körper K_ν

$\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{a}'_\nu = \alpha \mathfrak{g}_\nu$ ein Hauptideal, so wird $(\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{g})(\mathfrak{a}'_\nu \mathfrak{g}) = \alpha \mathfrak{g}$. Hieraus erschließt man die Gültigkeit des Hauptsatzes auch in der zweiten Form wie für endliche Ideale.

Jedoch werden im allgemeinen die Primideale dieser Klasse von Idealen nicht angehören.

Kapitel 3.

Beschränkte Ideale.

Ist $\mathfrak{a}$ ein unendliches Ideal des Körpers

$$K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$$

und $\mathfrak{a}_\nu$ das k. g. V. von $\mathfrak{a}$ und K_ν, so sei innerhalb K_ν in Primideale zerlegt:

$$\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1} \mathfrak{p}_{\nu 2} \dots \mathfrak{p}_{\nu n_\nu}, \tag{1}$$

wobei die $\mathfrak{p}_{\nu \varkappa}$ nicht voneinander verschieden zu sein brauchen. Dann wird im allgemeinen n_ν mit steigendem ν über alle Grenzen wachsen. Wir definieren:

Ist für das Ideal $\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu$, *wo* $\mathfrak{a}_\nu$ *das k. g. V. von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{g}_\nu$ *bedeutet, die Anzahl der Teiler von* $\mathfrak{a}_\nu$ *bei wachsendem* ν *beschränkt, so heißt* $\mathfrak{a}$ *ein beschränktes Ideal.*

Es gelten die einfachen Sätze:

Sind $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei beschränkte Ideale, so sind auch* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ *beschränkt.*

Dies folgt einfach aus den Formeln

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \lim_{\nu=\infty} (\mathfrak{a}_\nu + \mathfrak{b}_\nu) \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{b}_\nu,$$

sowie aus der Tatsache, daß jedes Ideal, das in einem beschränkten aufgeht, wieder beschränkt sein muß. Es ist also wegen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$$

auch $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ beschränkt.

Unter den so definierten beschränkten Idealen befinden sich insbesondere die Ideale mit endlicher Norm, deren im vorigen Kapitel näher bestimmte Norm also keine Primzahlpotenz mit dem Exponenten ∞ enthält. Denn für ein solches Ideal $\mathfrak{a}$ müssen die in K_ν genommenen Normen eines jeden $\mathfrak{a}_\nu$ unterhalb einer festen Grenze bleiben, und hieraus folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{a}$ beschränkt sein muß. Man überzeugt sich leicht, daß auch die Ideale mit endlicher Norm des Körpers K für sich ein System bilden, das sich durch die Operationen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ reproduziert.

Daß es beschränkte Ideale gibt, ist unmittelbar ersichtlich, da jedes Primideal ein solches ist. Wir beweisen den Satz:

Jedes beschränkte Ideal des Körpers K ist nur durch eine endliche Anzahl von Idealen teilbar.

$\mathfrak{a}$ sei ein beschränktes Ideal und durch die Ideale $\mathfrak{b}^{(1)}, \mathfrak{b}^{(2)}, \mathfrak{b}^{(3)}, \ldots$ teilbar. Ferner sei

$$\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu, \qquad \mathfrak{b}^{(1)} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{b}_\nu^{(1)}, \qquad \mathfrak{b}^{(2)} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{b}_\nu^{(2)}, \ldots$$

Dabei sollen $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu^{(1)}$, $\mathfrak{b}_\nu^{(2)}$, ... die k. g. V. der Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^{(1)}$, $\mathfrak{b}^{(2)}$, ... und der Gesamtheit $\mathfrak{g}_\nu$ bedeuten. Ist dann $\mathfrak{b}^{(\alpha)}$ von $\mathfrak{b}^{(\beta)}$ verschieden, so wird für hinreichend großes ν — etwa für $\nu > m_{\alpha\beta}$ — $\mathfrak{b}_\nu^{(\alpha)}$ von $\mathfrak{b}_\nu^{(\beta)}$ verschieden sein. Denn wären sie immer wieder einander gleich, so käme jede Zahl aus $\mathfrak{b}^{(\alpha)}$ in $\mathfrak{b}^{(\beta)}$ vor und umgekehrt. Bestimmt man für je zwei der Ideale $\mathfrak{b}^{(1)}, \mathfrak{b}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{b}^{(n)}$ die Zahl $m_{\alpha\beta}$ und wählt $N > m_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$, so ist

$$\mathfrak{a}_N > \mathfrak{b}_N^{(\alpha)},$$
$$\mathfrak{a}_N = \mathfrak{b}_N^{(\alpha)} \mathfrak{b}_N^{(\alpha)\prime} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

und die $\mathfrak{b}_N^{(\alpha)}$ sind alle voneinander verschieden. $\mathfrak{a}_N$ hat also mindestens n verschiedene Teiler. Gäbe es daher unendlich viele $\mathfrak{b}^{(\nu)}$, so ließe sich zu jedem n $\mathfrak{a}_N$ so bestimmen, daß es mehr als n verschiedene Idealteiler hat, $\mathfrak{a}$ wäre also nicht beschränkt. Damit ist der Beweis erbracht.

Wir gehen nun an die Zerlegung der beschränkten Ideale. Sei zunächst $\mathfrak{p}$ ein Primideal:

$$\mathfrak{p} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_\nu.$$

Wir bilden die Potenz $\mathfrak{p}^m$. Man kann sie in der Form schreiben:

$$\mathfrak{p}^m = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_\nu^m.$$

Hier ist zwar für alle ν $\mathfrak{p}_\nu^m$ durch $\mathfrak{p}_{\nu+1}^m$ teilbar, $\mathfrak{p}_\nu^m$ wird aber nicht genau das k. g. V. von $\mathfrak{p}^m$ und $\mathfrak{g}_\nu$ darstellen. $\mathfrak{p}_\nu^m$ muß durch dieses k. g. V. teilbar sein, es hat also die Form $\mathfrak{p}_\nu^{m_\nu}$:

$$\mathfrak{p}^m = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_\nu^{m_\nu}, \quad m_\nu \leqq m. \tag{2}$$

Angenommen, m_ν wäre durchweg kleiner als m. Dann wäre

$$\mathfrak{p}^{m-1} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_\nu^{m-1}$$

durch $\mathfrak{p}^m$ teilbar, und da offenbar $\mathfrak{p}^{m-1}$ in $\mathfrak{p}^m$ aufgeht, so würde folgen:

$$\mathfrak{p}^{m-1} = \mathfrak{p}^m.$$

Ist allgemein $\mathfrak{p}^\beta = \mathfrak{p}^\alpha$ $(\beta > \alpha)$, so ist, wenn m irgendeine ganze Zahl zwischen α und β bedeutet:

$$\mathfrak{p}^\beta > \mathfrak{p}^m > \mathfrak{p}^\alpha,$$

also wegen $\mathfrak{p}^\beta = \mathfrak{p}^\alpha$:

$$\mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^\alpha.$$

Infolgedessen wird z. B.

$$\mathfrak{p}^{\alpha+1} = \mathfrak{p}^\alpha$$

und durch Multiplikation mit $\mathfrak{p}^{\beta-\alpha}$,

$$\mathfrak{p}^{\beta+1} = \mathfrak{p}^\beta = \mathfrak{p}^\alpha.$$

So ergibt sich, daß $\mathfrak{p}^\alpha$ allen höheren Potenzen $\mathfrak{p}^\nu$ $(\nu \geqq \alpha)$ gleich sein muß. (Vgl. S. 22.) Bezeichnen wir den kleinsten Exponenten α, für den dies eintritt, als den *Grad von* $\mathfrak{p}$, und nehmen wir an, daß oben (in (2)) m kleiner oder höchstens gleich diesem Grade ist, so muß in (2) m_ν schließlich gleich m werden. Aus $\mathfrak{p}_\nu^m > \mathfrak{p}_{\nu+1}^{m_\nu+1}$ folgt dann:

$$(3) \qquad (\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{g}_{\nu+1})^m = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{m_\nu+1} \mathfrak{j}_{\nu+1}.$$

Wie wir oben (S. 21) sahen, muß hier $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{g}_{\nu+1}$ durch $\mathfrak{p}_{\nu+1}$ teilbar sein. Wäre nun $m_{\nu+1} < m$, so könnte man $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{m_\nu+1}$ fortheben und behielte links noch eine Potenz von $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{g}_{\nu+1}$ übrig, die nun in $\mathfrak{j}_{\nu+1}$ aufgehen müßte. Man könnte daher in (3) durch $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{g}_{\nu+1}$ heben und fände, daß schon

$$\mathfrak{p}_\nu^{m-1} > \mathfrak{p}_{\nu+1}^{m_\nu+1}$$

wäre. Das widerspricht aber der Forderung, daß $\mathfrak{p}_\nu^m$ das k. g. V. von $\mathfrak{p}^m$ und $\mathfrak{g}_\nu$, also auch von $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{m_\nu+1}$ und $\mathfrak{g}_\nu$ sein soll (vgl. S. 17). Hieraus folgt

$$(4) \qquad m_{\nu+1} \geqq m,$$

d. h. wegen (2):

$$m_{\nu+1} = m.$$

So schließt man allgemein $m_{\nu+1} = m_{\nu+2} = \ldots = m$. Von einer gewissen Stelle an sind alle Exponenten gleich m.

Sei jetzt im allgemeinen Fall ein beschränktes Ideal $\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu$ gegeben:

$$\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{\alpha_{\nu 1}} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{\alpha_{\nu 2}} \ldots \mathfrak{p}_{\nu n_\nu}^{\alpha_{\nu n_\nu}}.$$

Hier sollen die $\mathfrak{p}_{\nu\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n_\nu)$ verschieden sein und nach Voraussetzung sowohl n_ν beschränkt wie auch jeder der Exponenten $\alpha_{\nu\varkappa}$. Aus $\mathfrak{a}_\nu > \mathfrak{a}_{\nu+1}$ folgt:

$$(5) \quad (\mathfrak{p}_{\nu 1} \mathfrak{g}_{\nu+1})^{\alpha_{\nu 1}} (\mathfrak{p}_{\nu 2} \mathfrak{g}_{\nu+1})^{\alpha_{\nu 2}} \ldots (\mathfrak{p}_{\nu n_\nu} \mathfrak{g}_{\nu-1})^{\alpha_{\nu n_\nu}} = \mathfrak{p}_{\nu-1.1}^{\alpha_{\nu+1.1}} \ldots \mathfrak{p}_{\nu+1.n_{\nu+1}}^{\alpha_{\nu+1.n_{\nu+1}}} \mathfrak{j}_{\nu-1}.$$

Wir haben S. 21 gesehen, daß $\mathfrak{p}_{\nu 1}$ durch eins der Ideale $\mathfrak{p}_{\nu+1.\varkappa}$, etwa durch $\mathfrak{p}_{\nu+1.1}$, teilbar sein muß. Ein anderes $\mathfrak{p}_{\nu\varkappa}$ kann dann nicht ebenfalls

durch $\mathfrak{p}_{\nu+1,1}$ teilbar sein. Denn aus $\mathfrak{p}_{\nu 1} \succ \mathfrak{p}_{\nu+1,1}$ folgt, daß $\mathfrak{p}_{\nu 1}$ das k. g. V. von $\mathfrak{p}_{\nu+1,1}$ und $\mathfrak{g}_\nu$ ist, da $\mathfrak{p}_{\nu 1}$ durch dieses k. g. V. teilbar sein muß und doch die 1 nicht enthält. Hieraus erkennt man, daß zu jedem Ideal $\mathfrak{p}_{\nu\varkappa}$ links ein anderes Ideal $\mathfrak{p}_{\nu+1,\lambda}$ rechts gehört, durch welches es teilbar ist, daß also rechts mindestens ebensoviel Primidealpotenzen stehen wie links, d. h. n_ν wächst monoton. Da es beschränkt ist, muß es von einer gewissen Stelle an konstant sein, gleich n. Wir denken uns den Index ν bereits so groß gewählt, daß $n_{\nu+1} = n_\nu = n$ ist. Dann entspricht nicht nur jedem Primideal $\mathfrak{p}_{\nu\varkappa}$ eindeutig ein Primideal $\mathfrak{p}_{\nu+1,\lambda}$, das in $\mathfrak{p}_{\nu\varkappa}$ aufgeht, sondern auch umgekehrt, und wir denken uns die Anordnung so getroffen, daß

$$\mathfrak{p}_{\nu\varkappa} \succ \mathfrak{p}_{\nu+1,\varkappa}$$

ist. Wäre nun z. B. $\alpha_{\nu 1} > \alpha_{\nu+1,1}$, so würde aus (5) wie oben folgen, daß man $\mathfrak{p}_{\nu+1,1}^{\alpha_{\nu+1,1}}$ gegen einen Teil der Faktoren von $(\mathfrak{p}_{\nu 1}\mathfrak{g}_{\nu+1})^{\alpha_{\nu 1}}$ heben könnte. Weil aber $\mathfrak{p}_{\nu 1}\mathfrak{g}_{\nu+1}$ zu den übrigen $\mathfrak{p}_{\nu+1,\varkappa}$ teilerfremd ist, so würde sich hieraus ergeben, daß $\mathfrak{p}_{\nu 1}\mathfrak{g}_{\nu+1}$ mindestens einmal in $\mathfrak{j}_{\nu+1}$ aufgeht. Streicht man nun $\mathfrak{p}_{\nu 1}\mathfrak{g}_{\nu+1}$ einmal links aus der Potenz $(\mathfrak{p}_{\nu 1}\mathfrak{g}_{\nu+1})^{\alpha_{\nu 1}}$ und einmal rechts aus $\mathfrak{j}_{\nu+1}$, so sieht man, daß schon $\frac{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{p}_{\nu 1}}$ durch $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ teilbar wäre. Dies ist wieder nicht möglich, weil $\mathfrak{a}_\nu$ das k. g. V. von $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{g}_\nu$ sein muß. Daher wird jeder der Exponenten $\alpha_{\nu\varkappa}$ für hinreichend großes ν konstant werden, so daß wir für $\nu > M$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_\nu &= \mathfrak{p}_{\nu 1}^{\alpha_1}\ \mathfrak{p}_{\nu 2}^{\alpha_2}\ \dots\ \mathfrak{p}_{\nu n}^{\alpha_n} \\
\mathfrak{a}_{\nu+1} &= \mathfrak{p}_{\nu+1,1}^{\alpha_1}\,\mathfrak{p}_{\nu+1,2}^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{p}_{\nu+1,n}^{\alpha_n} \qquad (6)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{p}_{\nu\varkappa} &\succ \mathfrak{p}_{\nu+1,\varkappa} \succ \mathfrak{p}_{\nu+2,\varkappa}\cdots
\end{aligned}$$

schreiben können. Setzen wir $\lim\limits_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu\varkappa} = \mathfrak{p}_\varkappa$, so bedeutet dies:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1}\,\mathfrak{p}_2^{\alpha_2}\dots\mathfrak{p}_n^{\alpha_n}. \qquad (7)$$

Verlangen wir noch, wenn m_i den Grad von $\mathfrak{p}_i$ bedeutet — dieser Grad kann auch unendlich groß sein —

$$\alpha_i \leqq m_i,$$

so ist die Zerlegung (7) auch eindeutig. Denn eine andere Darstellung von $\mathfrak{a}$ in dieser Form dürfte kein von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$ enthalten. Aus

$$\mathfrak{a} \succ \mathfrak{p}$$

würde nämlich sonst

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{p} \succ \mathfrak{p}$$

folgen, während doch nach den Formeln (6) offenbar

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$$

ist. Hat man aber

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\beta_1}\mathfrak{p}_2^{\beta_2}\dots\mathfrak{p}_n^{\beta_n},$$

und ist etwa $\alpha_1 < \beta_1$, so ergibt sich

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_1^{\beta_1} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1}\mathfrak{p}_2^{\alpha_2}\dots\mathfrak{p}_n^{\alpha_n} + \mathfrak{p}_1^{\beta_1} = \mathfrak{p}_1^{\beta_1}\mathfrak{p}_2^{\beta_2}\dots\mathfrak{p}_n^{\beta_n} + \mathfrak{p}_1^{\beta_1}, \qquad \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} = \mathfrak{p}_1^{\nu_1},$$

was unmöglich ist, falls nach unserer Annahme α_1 und $\beta_1 \leqq m_1$. Dasselbe gilt für $\alpha_1 > \beta_1$. Es muß also in der Tat $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$ sein.

Da die Gesamtheit der beschränkten Ideale hiernach identisch ist mit der Gesamtheit aller Ideale des Körpers von der Form (7), so erkennt man nachträglich, daß unsere Definition des beschränkten Ideals nicht etwa von der Wahl der gegen K konvergierenden Körperfolge $K_1, K_2, \dots$ abhängig ist.

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beschränkte Ideale und ist

$$\mathfrak{a} \succ \mathfrak{b},$$

so gehe man in den k. g. V. mit den $\mathfrak{g}_\nu$ so weit, daß die Zerlegung (6) gilt, also

$$\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{\alpha_1}\dots\mathfrak{p}_{\nu n}^{\alpha_n},$$

$$\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{q}_{\nu 1}^{\beta_1}\dots\mathfrak{q}_{\nu m}^{\beta_m}.$$

Dann folgt aus $\mathfrak{a}_\nu \succ \mathfrak{b}_\nu$, daß die $\mathfrak{q}_{\nu\varkappa}$ unter den $\mathfrak{p}_{\nu\varkappa}$ vorkommen müssen:

$$\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{\gamma_1}\dots\mathfrak{p}_{\nu n}^{\gamma_n} \qquad (\gamma_i \leqq \alpha_i).$$

Setzt man $\mathfrak{c} = \lim\limits_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu 1}^{\alpha_1-\gamma_1}\dots\mathfrak{p}_{\nu n}^{\alpha_n-\gamma_n} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1-\gamma_1}\dots\mathfrak{p}_n^{\alpha_n-\gamma_n}$, so wird:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

ganz wie es der Hauptsatz der endlichen Idealtheorie verlangt.

Wir beweisen noch einen wegen seiner Allgemeinheit bemerkenswerten Satz, dem wir folgende Definition vorausschicken.

Ist $K = \lim\limits_{\nu=\infty} K_\nu$ ein unendlicher Körper und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \dots$ eine ganz beliebige Folge von Idealen aus $K_1, K_2, K_3, \dots$, in der also nicht mehr $\mathfrak{a}_\nu$ durch $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ teilbar zu sein braucht, so fasse ich alle Zahlen, die von irgendeinem Index ν an in sämtlichen $\mathfrak{a}_\nu$ vorkommen, zu einer Gesamtheit zusammen und bezeichne diese mit

$$\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu.$$

Seien jetzt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ zwei ganz beliebige, auch unbeschränkte Ideale, und sind $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}'_\nu$ die k. g. V. von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{g}_\nu$, so können wir schreiben:

$$\mathfrak{a} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}_\nu, \qquad \mathfrak{a}' = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}'_\nu.$$

Dann gilt der Satz:

Ist $\mathfrak{a} \succ \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a}'_\nu \mathfrak{a}''_\nu$, so setze man:

$$\mathfrak{a}'' = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}''_\nu .$$

Existiert dann überhaupt ein Ideal $\mathfrak{a}'''$, so daß

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \mathfrak{a}'''$$

wird, so ist auch

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' (\mathfrak{g}\mathfrak{a}'') = \mathfrak{a}' \mathfrak{a}'' .$$

Die neue Grenzwertdefinition ist deshalb nötig, weil hier im allgemeinen nicht mehr $\mathfrak{a}''_\nu \succ \mathfrak{a}''_{\nu+1}$ sein wird, sondern oft sogar umgekehrt $\mathfrak{a}''_{\nu+1} \succ \mathfrak{a}''_\nu$. Wir zeigen zuerst, daß

$$\mathfrak{a}' \mathfrak{a}'' \succ \mathfrak{a} \tag{8}$$

ist. Irgendeine Zahl aus $\mathfrak{a}' \mathfrak{a}''$ hat die Form

$$\alpha'_1 \alpha''_1 + \alpha'_2 \alpha''_2 + \ldots + \alpha'_\nu \alpha''_\nu ,$$

wo die α'_i zu $\mathfrak{a}'$, die α''_i zu $\mathfrak{a}''$ gehören. Die α''_i kommen von einem gewissen Index an, etwa für $\nu > m$, in allen $\mathfrak{a}''_\nu$ vor. Wir können m so groß wählen, daß auch alle α'_i für $\nu > m$ in $\mathfrak{a}'_\nu$ auftreten. Dann ist obige Summe für $\nu > m$ durch $\mathfrak{a}'_\nu \mathfrak{a}''_\nu$ teilbar, d. h. durch $\mathfrak{a}_\nu$ und infolgedessen auch durch $\mathfrak{a}$.

Setzt man umgekehrt als Grenzwert der k. g. V.

$$\mathfrak{a}''' = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}'''_\nu ,$$

so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \mathfrak{a}''' = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{a}'_\nu \mathfrak{a}'''_\nu$, folglich

$$\mathfrak{a}'_\nu \mathfrak{a}'''_\nu \succ \mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a}'_\nu \mathfrak{a}''_\nu ,$$

$$\mathfrak{a}'''_\nu \succ \mathfrak{a}''_\nu .$$

Ebenso kann man schließen:

$$\mathfrak{a}'''_{\nu+1} \succ \mathfrak{a}''_{\nu+1}, \quad \mathfrak{a}'''_{\nu+2} \succ \mathfrak{a}''_{\nu+2}, \quad \ldots$$

und da $\mathfrak{a}'''_\nu$ durch $\mathfrak{a}'''_{\nu+1}$, $\mathfrak{a}'''_{\nu+2}$ usw. teilbar ist:

$$\mathfrak{a}'''_\nu \succ \mathfrak{a}''_\nu , \quad \mathfrak{a}'''_\nu \succ \mathfrak{a}''_{\nu+1}, \quad \mathfrak{a}'''_\nu \succ \mathfrak{a}''_{\nu+2}, \quad \ldots ,$$

d. h. $\mathfrak{a}'''_\nu$ ist für $\mu \geqq \nu$ durch alle $\mathfrak{a}''_\mu$, also durch $\mathfrak{a}''$ teilbar:

$$\mathfrak{a}''' \succ \mathfrak{a}'' .$$

(Es ergibt sich zugleich, daß nicht nur $\mathfrak{g}\mathfrak{a}''$, sondern $\mathfrak{a}''$ selbst ein Ideal in K ist.) Nun erhält man:

$$\mathfrak{a}' \mathfrak{a}''' \succ \mathfrak{a}' \mathfrak{a}'' , \tag{9}$$

$$\mathfrak{a} \succ \mathfrak{a}' \mathfrak{a}'' .$$

(8) und (9) haben zur Folge $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \mathfrak{a}''$, wie zu beweisen war.

Kapitel 4.

Die Mächtigkeit der Ideale.

Wenn wir die ganze Zahl α des unendlichen Körpers $K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$ als Grenzwert der k. g. V. in der Form

$$\alpha = \lim_{\nu=\infty} \alpha \mathfrak{g}_\nu = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_{\nu 1}} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{k_{\nu 2}} \dots \mathfrak{p}_{\nu m_\nu}^{k_{\nu m_\nu}}$$

dargestellt haben (wobei $\alpha \succ \mathfrak{g}_1$ angenommen wird, was natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet), so ist leicht zu erkennen, daß die m_ν für jedes α beschränkt sein müssen, wenn eine eindeutige Produktdarstellung der Zahlen des Körpers möglich sein soll. Denn wäre dies nicht der Fall, so sei etwa

$$\mathfrak{p}_{\nu\alpha}^{h_{\nu\alpha}} = \pi_{\nu\alpha} \mathfrak{g}_\nu \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, m_\nu)$$

ein Hauptideal, also $\pi_{\nu\alpha}$ eine ganze Zahl des Körpers K_ν. Dann ist

$$\alpha = \pi_{\nu 1}^{r_{\nu 1}} \pi_{\nu 2}^{r_{\nu 2}} \dots \pi_{\nu m_\nu}^{r_{\nu m_\nu}} \qquad (r_{\nu\alpha} \text{ rational} \geqq 0),$$

wobei die $\pi_{\nu\alpha}^{r_{\nu\alpha}}$ paarweis teilerfremd sind. Auf Einheiten ist bei dieser Darstellung keine Rücksicht genommen. Hieraus würde, falls m_ν mit ν über alle Grenzen wächst, folgen, daß es Potenzen von α gibt, die innerhalb $\mathfrak{g}$ in beliebig viele zu je zweien teilerfremde Faktoren zerfallen, was offenbar mit einer Darstellung durch Primideale, wie wir sie anstreben, unvereinbar ist. Wir müssen daher fordern, daß für jedes α m_ν beschränkt ist — es genügt offenbar auch, dies nur für jede natürliche Primzahl p vorauszusetzen. Wir werden sehen, daß es sowohl Körper gibt, in denen diese Bedingung erfüllt ist, wie auch solche, in denen sie nicht gilt. Nur die ersten kommen für uns in Betracht.

Um die hier auftretenden Möglichkeiten genauer zu übersehen, nehmen wir zunächst an, es handle sich um Galoissche Körper. Sei K_1 ein endlicher Normalkörper und in dem anderen endlichen Normalkörper K_2 enthalten. Die Primzahl p hat in K_1 die Zerlegung

$$p = (\mathfrak{P} \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{n_2-1})^{r_1}.$$

Wenn dann eins der $\mathfrak{P}_i$, etwa $\mathfrak{P}$ in K_2 zerfällt, so daß $\mathfrak{P}$ durch die Primideale $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \dots, \mathfrak{P}_\nu'$ von K_2 teilbar ist, so sei

$$\mathfrak{P}_i' = s_i \mathfrak{P}_1' \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu),$$

wenn s_i eine Substitution von K_2 bedeutet. Wendet man s_i auf $\mathfrak{P}$ an, so kann kein Primideal $\mathfrak{P}_1$ entstehen, das von $\mathfrak{P}$ verschieden ist, da sonst

$\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{P}_i'$ teilbar wäre, also das k. g. V. von $\mathfrak{P}_i'$ und K_1 sein müßte, während doch $\mathfrak{P}$ dieses k. g. V. ist. Daher wird:

$$s_i \mathfrak{P} = \mathfrak{P}.$$

Ist nun

$$s_{\nu+1} \mathfrak{P}_1' = \mathfrak{P}_{\nu+1}',$$

wobei $\mathfrak{P}_{\nu+1}'$ von $\mathfrak{P}_1'$ bis $\mathfrak{P}_\nu'$ verschieden ist, und

$$s_{\nu+1} \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1,$$

so ist $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{P}$ verschieden (da sonst $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{P}_{\nu+1}'$ teilbar wäre), und es ist auch

$$(s_{\nu+1} s_i) \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

daher wegen

$$\mathfrak{P} \succ \mathfrak{P}_1'$$

$$(s_{\nu+1} s_i) \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \succ (s_{\nu+1} s_i) \mathfrak{P}_1' \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$\mathfrak{P}_1 \succ \mathfrak{P}_{\nu+1}', \ \mathfrak{P}_{\nu+2}', \ \ldots, \ \mathfrak{P}_{2\nu}'.$$

Man sieht leicht, daß diese Ideale voneinander verschieden sind, und es ergibt sich: Zerfällt eins der $\mathfrak{P}_i$ in K_2 in ν verschiedene Primidealpotenzen, so gilt dasselbe für alle übrigen.

Wir schicken nun eine kurze Hilfsbetrachtung voraus. Das Intervall $0 \ldots 1$ werde in h_1 gleiche Teile zerlegt. Jedes der Teilintervalle wieder in h_2 gleiche Teile, jedes der so erhaltenen in h_3, usf. Wir treffen noch die Festsetzung, daß nur der rechte Endpunkt eines jeden Intervalls ihm zugehören soll. Sei P irgendein Punkt zwischen 0 und 1. P liege im k_1-ten Intervall der ersten Reihe von h_1 Intervallen. Dies k_1-te Intervall zerfällt in h_2 Teilintervalle der zweiten Reihe — P liege im k_2-ten unter ihnen. Dieses zerfällt wieder in h_3 Intervalle der dritten Reihe; P liege im k_3-ten unter ihnen, usf. So wird jedem Punkt P außer dem Punkte 0 eine Folge ganzer Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ zugeordnet, und wenn alle h_ν, wie wir annehmen wollen, größer als 1 sind, entspricht offenbar auch umgekehrt der Folge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ $(k_i \leqq h_i)$ ein ganz bestimmter Punkt zwischen 0 und 1.

Sei jetzt $K = \lim_{\nu = \infty} K_\nu$ ein unendlicher Körper und jedes K_ν ein Normalkörper. Dann heißt auch K ein unendlicher Normalkörper. Die Primzahl p habe in K_ν die folgende Zerlegung:

$$p = (\mathfrak{p}_{\nu 1} \mathfrak{p}_{\nu 2} \cdots \mathfrak{p}_{\nu m_\nu})^{n_\nu}.$$

Dann zerfällt nach dem obigen jedes der $\mathfrak{p}_{\nu i}$ in $K_{\nu+1}$ in gleich viel, etwa $h_{\nu+1}$ Primideale. Für jedes $\mathfrak{p}_{\nu i}$ denken wir uns diese $h_{\nu+1}$ Primideale in bestimmter Weise geordnet als erstes, zweites, ..., $h_{\nu+1}$-tes. Wenn m_ν nicht beschränkt ist, so können wir etwa alle Körper K_ν fortlassen, für

die $h_\nu = 1$ wird, nehmen also h_ν durchweg > 1 an. Dann erhält man ein beliebiges Primideal von K, durch das p teilbar ist, folgendermaßen. Man geht aus von $\mathfrak{p}_{1\,k_1} = \mathfrak{p}_{1\,k_1'}$. Dies Ideal ist durch h_2 Primideale von K_2 teilbar, z. B. durch das k_2-te von ihnen: $\mathfrak{p}_{2\,k_2'}$. $\mathfrak{p}_{2\,k_2'}$ ist durch h_3 Primideale von K_3 teilbar, z. B. durch das k_3-te von ihnen: $\mathfrak{p}_{3\,k_3'}$ usf. Dann entspricht, da

$$\lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu\,k_\nu'}$$

ein in p aufgehendes Primideal ist, jedem Primideal von K, durch das p teilbar ist, umkehrbar eindeutig eine Folge ganzer Zahlen

$$k_1, k_2, k_3, \ldots \qquad (k_i \leqq h_i).$$

Teilt man nun das Intervall 0 bis 1 wie oben ein, so entspricht diese Folge einem bestimmten Punkt des Intervalls und umgekehrt. Aus dieser Zuordnung ergibt sich sofort der Satz:

Die Primidealteiler der Primzahl p haben in einem unendlichen Galoisschen Körper $K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$, $\mathfrak{g} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{g}_\nu$ die Mächtigkeit des Kontinuums, falls die Anzahl der Primidealteiler von $p\mathfrak{g}_\nu$ innerhalb $\mathfrak{g}_\nu$ mit ν über alle Grenzen wächst.

Wir wollen jetzt zeigen, daß dieser Fall in der Tat eintreten kann und zwar am Beispiel des Körpers aller algebraischen Zahlen, indem wir zunächst folgenden Hilfssatz beweisen:

Jede ganze algebraische Zahl α läßt sich als Produkt von zwei zueinander teilerfremden Faktoren darstellen, deren keiner eine Einheit ist.

α kann innerhalb $\mathsf{P}(\alpha)$ offenbar als Primidealpotenz vorausgesetzt werden, da sonst die Behauptung schon zuzugeben ist. Es sei $\alpha = \mathfrak{p}^m$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathsf{P}(\alpha)$ bedeutet, und $N(\alpha) = p^k$. Ferner sei q eine von p verschiedene ungerade Primzahl. Dann setze man $\beta - 2\alpha = q$, so daß $(\beta, 2\alpha) = 1$ wird. Sei π ein Primidealteiler von q. Dann ist:

$$(1) \qquad (\pi, 2) = 1; \quad (\pi, \beta) = 1; \quad (\pi, \alpha) = 1; \quad (\pi, p) = 1.$$

ξ sei eine ganze Zahl aus $\mathsf{P}(\alpha)$, die zwar durch π, aber nicht durch π^2 teilbar ist. Man setze $\beta' = \beta + p\xi$. Dann ist auch $(\beta', \alpha) = 1$, da sonst $\mathfrak{p}$ in β aufginge. Ist nun $\beta^2 - 4\alpha^2 \equiv 0 \pmod{\pi^2}$, so wird

$$\beta'^2 - 4\alpha^2 \equiv \beta^2 - 4\alpha^2 + p^2\xi^2 + 2\beta p\xi \equiv 2\beta p\xi \pmod{\pi^2}.$$

Daher ist wegen (1) $\beta'^2 - 4\alpha^2$ zwar durch π, aber nicht durch π^2 teilbar. Infolgedessen ist eine der beiden Gleichungen

$$x^2 - \beta x + \alpha^2 = 0, \qquad x^2 - \beta' x + \alpha^2 = 0$$

in $\mathsf{P}(\alpha)$ irreduzibel. Die irreduzible Gleichung kann keine Einheit zur

Wurzel haben; denn die Relativnorm α^2 ihrer Wurzeln x_1 und x_2 ist keine Einheit[5]). Wegen

$$x_1 + x_2 = \beta \text{ resp. } \beta' \quad \text{und} \quad x_1 x_2 = \alpha^2$$

sind sie aber teilerfremd, und also liefert

$$\alpha = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

die verlangte Zerlegung.

Aus dem Beweis geht hervor, daß diese Zerlegung immer schon in einem Körper vierten Grades über $\mathsf{P}(\alpha)$ ausführbar ist.

Sei $\alpha = \delta_1 \delta_2$ und $(\delta_1, \delta_2) = 1$, so kann man δ_1 wieder in zwei teilerfremde Faktoren zerlegen: $\delta_1 = \delta_1' \delta_2'$, von denen jeder auch zu δ_2 teilerfremd ist:

$$\alpha = \delta_1' \delta_2' \delta_2.$$

Ebenso kann man $\delta_1' = \delta_1'' \delta_2''$ setzen, wobei δ_1'' nicht nur zu δ_2'', sondern auch zu δ_2' und δ_2 teilerfremd ist. Fährt man in dieser Weise fort, so ergibt sich:

$$\alpha = \delta_1^{(\nu+1)} \delta_2^{(\nu+1)} \delta_2^{(\nu)} \dots \delta_2,$$

wobei die Faktoren paarweis teilerfremd sind, d. h. jede ganze algebraische Zahl kann in beliebig viele paarweis teilerfremde Faktoren zerlegt werden, die keine Einheiten sind.

Ist nun $K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$ der Körper aller algebraischen Zahlen, so kann man offenbar K_ν als Normalkörper voraussetzen, indem man andernfalls jedes K_ν durch den kleinsten Normalkörper über K_ν ersetzt. Nun zerfällt nach dem Hilfssatz jede ganze algebraische Zahl, z. B. die Primzahl p innerhalb K, in beliebig viel zu je zweien teilerfremde Faktoren, und daraus schließt man, daß p in K_ν für hinreichend großes ν in beliebig viele verschiedene Primidealpotenzen zerfällt, so daß m_ν nicht beschränkt ist.

Die Primideale des Körpers aller algebraischen Zahlen haben die Mächtigkeit des Kontinuums.

Hiermit sind aber die durch das Überhandnehmen der Ideale hervorgerufenen Schwierigkeiten noch nicht erschöpft.

Sei in $K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$ $\mathfrak{p}_1$ ein Primideal von K_1. Es habe die Eigenschaft, daß es in K_2 in lauter gleiche Primideale zerfällt, also:

$$\mathfrak{p}_1 \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{p}_2^{h_2}.$$

$\mathfrak{p}_2$ habe dieselbe Eigenschaft in bezug auf K_3 usf. Wir finden daher:

$$\mathfrak{p}_1 \mathfrak{g} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_\nu^{x_\nu}. \tag{2}$$

[5]) Bei dem Beweis dieses Satzes hat mich Herr Dr. Jacobsthal in dankenswerter Weise unterstützt.

Daß dieser Fall eintreten kann, werden wir im letzten Kapitel an einem Beispiel erkennen. Zerfällt allgemein $\mathfrak{p}_{\nu-1}$ innerhalb K_ν in die Potenz $\mathfrak{p}_\nu^{h_\nu}$, so wird

$$x_\nu = h_\nu x_{\nu-1}.$$

Nun sei $\mathfrak{p}_\nu^{\lambda_\nu}$ das k. g. V. von $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{\lambda_{\nu+1}}$ und K_ν. Dann folgt wegen

$$\mathfrak{g}_{\nu+1}\mathfrak{p}_\nu^{\lambda_\nu} > \mathfrak{p}_{\nu+1}^{\lambda_{\nu+1}}:$$

$$\text{a)} \qquad \lambda_{\nu+1} \leqq h_{\nu+1}\lambda_\nu,$$

und weil $\mathfrak{p}_\nu^{\lambda_\nu-1}$ nicht mehr durch $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{\lambda_{\nu+1}}$ teilbar ist:

$$\text{b)} \qquad \lambda_{\nu+1} \geqq h_{\nu+1}(\lambda_\nu - 1).$$

Wenn umgekehrt $\lambda_{\nu+1}$ die Ungleichheiten a) und b) befriedigt, so ist $\mathfrak{p}_\nu^{\lambda_\nu}$ das k. g. V. von $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{\lambda_{\nu+1}}$ und $\mathfrak{g}_\nu$. Setzt man daher

$$\pi = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_\nu^{\lambda_\nu}$$

so an, daß $\lambda_1 = 1$ ist und die λ_ν im übrigen die Ungleichheiten a) und b) erfüllen, so ist $\mathfrak{p}_\nu^{\lambda_\nu}$ das k. g. V. von π mit $\mathfrak{g}_\nu$, und π ist ein Teiler von $\mathfrak{p}_1\mathfrak{g}$. (Hieraus ergibt sich auch, daß in (2) $\mathfrak{p}_\nu^{x_\nu}$ das k. g. V. von $\mathfrak{p}_1\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_\nu$ ist.) Setzen wir jetzt

$$\lambda_\nu \equiv k_\nu \pmod{h_\nu} \qquad 0 < k_\nu \leqq h_\nu,$$

so können wir dem Ideal $\lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_\nu^{\lambda_\nu}$ den Punkt zwischen 0 und 1 zuordnen, dem in der Hilfsbetrachtung von S. 30 die Folge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ entspricht. Damit ist bewiesen, daß, falls x_ν mit ν über alle Grenzen wächst, die Ideale, durch welche $\mathfrak{p}_1\mathfrak{g}$ teilbar ist, die Mächtigkeit des Kontinuums haben[6]).

Während wir den ersten Fall, daß die Menge der Primideale nicht abzählbar ist, dadurch ausschließen können, daß wir m_ν (S. 29) für jede Primzahl als beschränkt annehmen, ist dies letzte eine noch unbehobene Schwierigkeit, mit der wir uns im nächsten Kapitel auseinandersetzen werden.

Kapitel 5.

Die Zerlegung der Zahlen.

Sei wieder $K = \lim_{\nu=\infty} K_\nu$ der vorliegende unendliche Körper. Ist p eine natürliche Primzahl, so werde als Grenzwert der k. g. V. mit den K_ν:

$$(1) \qquad p\mathfrak{g} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_{\nu 1}} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{k_{\nu 2}} \ldots \mathfrak{p}_{\nu m_\nu}^{k_{\nu m_\nu}},$$

[6]) Auf ganz ähnliche Weise läßt sich die von Dedekind in der S. 16 zitierten Arbeit ausgesprochene Behauptung beweisen, „daß der Inbegriff $\mathfrak{E}$ aller Substitutionen ε eines unendlichen Körpers in gewissem Sinne eine stetige Mannigfaltigkeit bildet".

wobei nun m_ν beschränkt sein soll. Da jedes $\mathfrak{p}_{\nu\alpha}$ durch mindestens ein $\mathfrak{p}_{\nu+1,\beta}$ teilbar ist und nicht zwei durch dasselbe, so wächst m_ν beständig und wird daher schließlich seinen größten Wert m erreichen. Nehmen wir an, daß dies schon im Körper K_1 der Fall ist, so ergibt sich:

$$(2) \qquad p\mathfrak{g} = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_{\nu 1}} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{k_{\nu 2}} \dots \mathfrak{p}_{\nu m}^{k_{\nu m}}.$$

Wir denken die $\mathfrak{p}_{\nu\alpha}$ so angeordnet, daß $\mathfrak{p}_{\nu\alpha} > \mathfrak{p}_{\nu+1,\alpha}$ ist. Dann ist p nur durch die endlich vielen Primideale

$$(3) \qquad \mathfrak{p}_\alpha = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

teilbar. Hieraus folgt, daß die Primideale von K abzählbar sind. Ist ferner z. B. der Exponent $k_{\nu 1}$ in der Zerlegung (2) von p beschränkt, so sind, da jede Zahl α aus $\mathfrak{g}$ Teiler einer ganzen rationalen Zahl ist, auch in jeder andern Zahl α aus $\mathfrak{g}$, die durch $\mathfrak{p}_1$ teilbar und in der Form (2) dargestellt ist, die Exponenten der $\mathfrak{p}_{\nu 1}$ beschränkt. Da $k_{\nu 1}$, was genau wie S. 32, 33 folgt, mit wachsendem ν niemals abnimmt, erreicht es sein Maximum k_1. Für hinreichend großes ν ist daher:

$$p\mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_1} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{k_{\nu 2}} \dots \mathfrak{p}_{\nu m}^{k_{\nu m}}.$$

Da $p\mathfrak{g}_{\nu+1} = \mathfrak{g}_{\nu+1}(p\mathfrak{g}_\nu)$ ist und $\mathfrak{p}_{\nu 1}$ innerhalb $\mathfrak{g}_{\nu+1}$ nur in eine Potenz von $\mathfrak{p}_{\nu+1,1}$ zerfällt, so erkennt man leicht, daß

$$\mathfrak{p}_{\nu+1,1}^{k_1} = \mathfrak{g}_{\nu+1} \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_1}$$

und ebenso allgemein

$$\mathfrak{p}_{\nu+\mu,1}^{k_1} = \mathfrak{g}_{\nu+\mu} \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_1}$$

wird. Damit ist aber bewiesen, daß

$$\mathfrak{p}_1^{k_1} = \mathfrak{g}\, \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_1}$$

ist und also zu dem S. 22, 23 besprochenen Typus von Idealen gehört. Wird etwa $\mathfrak{p}_{\nu 1}^{k} = \alpha\mathfrak{g}_\nu$ ein Hauptideal in K_ν, so folgt:

$$\mathfrak{p}_1^{k k_1} = \alpha^{k_1}\mathfrak{g},$$

d. h. eine gewisse Potenz jedes dieser Primideale mit beschränkten Exponenten ist ein Hauptideal. Hieraus ergibt sich sofort, daß die Gleichung

$$\mathfrak{p}^\alpha = \mathfrak{p}^\beta$$

für solche Primideale von K nur bestehen kann, wenn $\alpha = \beta$ ist.

Nehmen wir zweitens an, $k_{\nu 1}$ wachse mit ν über alle Grenzen. Wir hatten oben festgesetzt, K_1 möge so gewählt werden, daß p schon inner-

halb dieses Körpers in die Höchstzahl, nämlich m verschiedene Primidealpotenzen zerfällt. Daraus folgt, indem man

$$\mathfrak{p}\,\mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_{\nu 1}} \dots \mathfrak{p}_{\nu m}^{k_{\nu m}}$$

mit $\mathfrak{g}_{\nu+1}$ multipliziert, daß

$$\mathfrak{p}_{\nu+1,1}^{k_{\nu+1,1}} = (\mathfrak{g}_{\nu+1}\mathfrak{p}_{\nu 1})^{k_{\nu 1}} \tag{4}$$

sein muß. Es ist also auch $\mathfrak{g}_{\nu+1}\mathfrak{p}_{\nu 1}$ selbst eine Potenz von $\mathfrak{p}_{\nu+1,1}$:

$$\mathfrak{g}_{\nu+1}\mathfrak{p}_{\nu 1} = \mathfrak{p}_{\nu+1,1}^{h_{\nu+1,1}}, \tag{5}$$

so daß sich aus (4) ergibt:

$$k_{\nu+1,1} = h_{\nu+1,1}\,k_{\nu 1}.$$

Infolge von (5) wird ferner:

$$\mathfrak{p}_{\nu 1}^{h_{21}h_{31}\dots h_{\nu 1}} = \mathfrak{g}_\nu \mathfrak{p}_{11}. \tag{6}$$

Nun sei α eine beliebige ganze Zahl des Körpers K, die durch $\mathfrak{p}_1 = \lim\limits_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu 1}$ teilbar ist. Sie komme zum erstenmal in dem endlichen Körper K_λ vor und habe dort die Form:

$$\alpha\,\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{p}_{\lambda 1}^{\alpha_{\lambda 1}}\mathfrak{a}_\lambda \qquad (\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{p}_{\lambda 1}) = 1.$$

Dann erscheint also das Hauptideal $\alpha\mathfrak{g}$ als Grenzwert der Folge

$$\alpha\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{p}_{\lambda 1}^{\alpha_{\lambda 1}}\mathfrak{a}_\lambda,\ \alpha\mathfrak{g}_{\lambda+1} = \mathfrak{p}_{\lambda+1,1}^{\alpha_{\lambda+1,1}}\mathfrak{a}_{\lambda+1},\ \alpha\mathfrak{g}_{\lambda+2} = \mathfrak{p}_{\lambda+2,1}^{\alpha_{\lambda+2,1}}\mathfrak{a}_{\lambda+2},\ \dots.$$

Andererseits erhält man das zweite Glied dieser Folge aus dem ersten durch Multiplikation mit $\mathfrak{g}_{\lambda+1}$:

$$\alpha\mathfrak{g}_{\lambda+1} = (\mathfrak{p}_{\lambda 1}^{\alpha_{\lambda 1}}\mathfrak{g}_{\lambda+1})(\mathfrak{a}_\lambda\mathfrak{g}_{\lambda+1}) = \mathfrak{p}_{\lambda+1,1}^{\alpha_{\lambda+1,1}}\mathfrak{a}_{\lambda+1}.$$

Beachtet man (5), so ergibt sich hieraus, da $\mathfrak{a}_\lambda\mathfrak{g}_{\lambda+1}$ natürlich wieder zu $\mathfrak{p}_{\lambda 1}$ und also zu $\mathfrak{p}_{\lambda+1,1}$ teilerfremd ist:

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu 1}^{\alpha_{\nu 1}} = \mathfrak{g}\,\mathfrak{p}_{\lambda 1}^{\alpha_{\lambda 1}}, \\ &2.\quad \alpha_{\nu+1,1} = h_{\nu+1}\alpha_{\nu 1} \end{aligned}\right\} \nu > \lambda.$$

Daher ist der Bruch

$$r = \frac{\alpha_{\nu 1}}{h_{21}h_{31}\dots h_{\nu 1}} \tag{7}$$

für $\nu > \lambda$ von ν unabhängig. Nun findet man nach (6):

$$(\mathfrak{p}_{\nu 1}^{\alpha_{\nu 1}})^{h_{21}h_{31}\dots h_{\nu 1}} = (\mathfrak{g}_\nu \mathfrak{p}_{11})^{\alpha_{\nu 1}},$$

wir werden deshalb formal

$$\lim_{\nu=\infty} \mathfrak{p}_{\nu 1}^{\alpha_{\nu 1}} = (\mathfrak{g}\,\mathfrak{p}_{11})^r$$

schreiben. Ist also die q-te Potenz von $\mathfrak{p}_{\nu 1}^{a_{\nu 1}}$ gleich einer Potenz $(\mathfrak{g}_\nu \mathfrak{p}_{11})^k$, so setzen wir

$$\mathfrak{g}\mathfrak{p}_{\nu 1}^{a_{\nu 1}} = (\mathfrak{g}\mathfrak{p}_{11})^{\frac{k}{q}} = (\mathfrak{g}\mathfrak{p}_{11})^r.$$

Diese Bezeichnungsweise rechtfertigt sich vor allem durch das augenscheinlich richtige Multiplikationsgesetz:

$$(\mathfrak{g}\mathfrak{p}_{11})^{r_1}(\mathfrak{g}\mathfrak{p}_{11})^{r_2} = (\mathfrak{g}\mathfrak{p}_{11})^{r_1+r_2}.$$

Ferner ergibt sich, wenn $\mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_1 a_{\nu 1}} = \alpha_1 \mathfrak{g}_\nu$ ein Hauptideal ist (in K_ν):

$$(\mathfrak{g}\mathfrak{p}_{\nu 1}^{a_{\nu 1}})^{k_1} = (\mathfrak{g}\mathfrak{p}_{11}^{r})^{k_1} = \alpha_1 \mathfrak{g}$$

als Hauptideal von K.

Sei nun

$$\alpha \mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_{\nu 1}} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{k_{\nu 2}} \dots \mathfrak{p}_{\nu m}^{k_{\nu m}}$$

für irgendeine Zahl α aus $\mathfrak{g}$, die schon in K_ν vorkommt. Wir nehmen die Körperfolge $K_1, K_2, \dots$ wieder so an, daß jede der endlich vielen natürlichen Primzahlen, in denen die Teiler von α aufgehen, schon innerhalb K_1 in die maximale Anzahl von Primidealen zerfällt. Ist dann $k_{\nu 1}$ beschränkt und der höchste Wert, den dieser Exponent annimmt, gleich k_1, so wird offenbar mit Rücksicht auf (3):

$$\alpha \mathfrak{g} = \mathfrak{p}_1^{k_1} \lim_{\nu = \infty} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{k_{\nu 2}} \dots \mathfrak{p}_{\nu m}^{k_{\nu m}}.$$

Ist dagegen $k_{\nu 1}$ unbeschränkt, so setze man der obigen Definition entsprechend:

$$\lim_{\nu = \infty} \mathfrak{p}_{\nu 1}^{k_{\nu 1}} = \mathfrak{p}_{11} \mathfrak{g}^{r_1} = \pi_1^{r_1}.$$

Dann wird:

$$\alpha \mathfrak{g} = \pi_1^{r_1} \lim_{\nu = \infty} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{k_{\nu 2}} \dots \mathfrak{p}_{\nu m}^{k_{\nu m}}.$$

Indem man dies Verfahren m-mal wiederholt, findet man

$$\alpha \mathfrak{g} = \alpha = \pi_1^{r_1} \pi_2^{r_2} \dots \pi_\nu^{r_\nu} \mathfrak{p}_1^{k_1} \mathfrak{p}_2^{k_2} \dots \mathfrak{p}_\mu^{k_\mu}.$$

Dabei entsprechen die $\pi_\varkappa$ solchen Primidealteilern einer Primzahl p, deren Exponenten $k_{\nu\varkappa}$ in (2) bei wachsendem ν nicht beschränkt sind. Aus der Tatsache, daß eine gewisse Potenz eines jeden der $\pi_\varkappa$ und $\mathfrak{p}_\varkappa$ ein Hauptideal ist, ergibt sich wie in der Theorie der endlichen Ideale die Eindeutigkeit dieser Darstellung. Aus (7) folgt, daß der Nenner von r_1 z. B. Teiler eines Produktes $h_{21} h_{31} \dots h_{\nu 1}$ ist. Wenn umgekehrt $r = \frac{k}{h_{21} h_{31} \dots h_{\nu 1}}$ gesetzt wird, so folgt

$$\pi_1^r = \mathfrak{g}\mathfrak{p}_{11}^k.$$

Nun gibt es Zahlen α in $\mathfrak{g}_\nu$, die genau durch $\mathfrak{p}_{\nu 1}^k$ teilbar sind. Daher wird $\alpha\mathfrak{g}$ genau durch π_1^r teilbar sein. Ebenso erkennt man leicht, daß es Zahlen in $\mathfrak{g}$ gibt, die genau durch $\mathfrak{p}_1^k$ teilbar sind für ein beliebiges ganzes k, so daß das System der $\pi_\varkappa$ und $\mathfrak{p}_\varkappa$ gerade ausreicht, um die Zahlen aus $\mathfrak{g}$ eindeutig darzustellen, wenn wir die Nenner der $r_\varkappa$ in der angegebenen Weise beschränken. Man erkennt, daß es sich hier um eine Kombination der S. 22, 23 erwähnten Ideale und der in Kap. 3 behandelten beschränkten Ideale handelt. Wir fassen die Ergebnisse in folgenden Sätzen zusammen:

1. *Ist jede natürliche Primzahl nur durch endlich viele Primideale des unendlichen Körpers K teilbar, so gibt es ein System von Idealen*

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$$

in K derart, daß sich jede ganze Zahl α aus K eindeutig in der Form

$$\alpha = \pi_1^{r_1} \pi_2^{r_2} \ldots \pi_\nu^{r_\nu} \mathfrak{p}_1^{k_1} \mathfrak{p}_2^{k_2} \ldots \mathfrak{p}_\mu^{k_\mu}$$

darstellen läßt. Dabei sind die r_i rationale, die k_i ganze positive Zahlen, Zu jedem π_i existiert eine Folge ganzer Zahlen: $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, h_3^{(i)}, \ldots$ von der Beschaffenheit, daß man alle ganzen algebraischen Zahlen aus K erhält und jede nur einmal, wenn die k_i alle positiven ganzen Zahlen, die r_i alle positiven Brüche durchlaufen, deren Nenner in einem der Produkte $h_1^{(i)} h_2^{(i)} \ldots h_\nu^{(i)}$ aufgehen.

Man sieht sofort, daß hier nur abzählbar viele Ideale benutzt werden, und daß sich die auftretenden Ideale durch Multiplikation reproduzieren. Dem Satz des vorigen Kapitels über Galoissche Körper tritt hier der andere zur Seite:

2. *Ein unendlicher Normalkörper besitzt dann und nur dann eine Idealbasis im Sinne von Satz* 1, *wenn er abzählbar viel Primideale enthält.*

Wir sprechen noch den folgenden Satz aus, den man auf Grund unserer Überlegungen sofort als richtig erkennt:

3. *Lassen sich die Zahlen eines unendlichen Körpers K im Sinne von Satz* 1 *durch Ideale eindeutig darstellen, so gilt dasselbe für die Zahlen eines jeden Teilkörpers von K.*

Es ist jetzt vor allem noch zu zeigen, daß es Körper dieser Art wirklich gibt, und wir wenden uns daher im letzten Kapitel einem Beispiel zu.

Kapitel 6.

Der Körper aller p^ν-ten Einheitswurzeln[7]).

Adjungiert man dem Körper P der rationalen Zahlen nacheinander die p-ten, p^2-ten, ... Einheitswurzeln, wobei p eine natürliche Primzahl bedeutet, so entsteht eine Folge von Normalkörpern Ω_p, Ω_{p^2}, .., und wir bezeichnen

$$\Omega = \lim_{\nu=\infty} \Omega_{p^\nu}$$

als den Körper aller p^ν-ten Einheitswurzeln. Die Zerlegungsgesetze im endlichen Körper Ω_{p^ν} der p^ν-ten Einheitswurzeln sind bekannt. Seine Diskriminante hat die Form:

$$\Delta_\nu = (-1)^{\frac{\varphi(p^\nu)}{2}} p^{p^{\nu-1}[\nu(p-1)-1]},$$

so daß die Potenzen von p als die Diskriminantenteiler des Körpers Ω anzusprechen sind. Betrachten wir zunächst die Primzahl p. Sie ist in Ω_{p^ν} gleich einem Produkt von $\varphi(p^\nu) = p^{\nu-1}(p-1)$ gleichen Primidealen:

$$p\mathfrak{g}_\nu = \pi_\nu^{p^{\nu-1}(p-1)},$$

wenn $\mathfrak{g}_\nu$ die Gesamtheit der ganzen Zahlen von Ω_{p^ν} ist. Man erkennt hieraus, daß π_ν in $\Omega_{p^{\nu+1}}$ jedesmal in p Primideale zerfällt, und es ist demnach klar, daß wir den S. 33 besprochenen Fall vor uns haben:

p ist durch eine Menge von Idealen des Körpers Ω teilbar, welche die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Aber entsprechend den Entwicklungen des vorangehenden Kapitels brauchen wir für die Darstellung der Zahlen von Ω nicht alle Ideale, durch die p teilbar ist, vielmehr nur solche von der Form

$$\mathfrak{g}\pi_\nu^k,$$

denen wir ähnlich wie dort das Zeichen

$$\frac{k}{p^{p^{\nu-1}(p-1)}}$$

zuordnen werden, da die $\varphi(p^\nu)$-te Potenz von π_ν gleich $p\mathfrak{g}_\nu$ ist.

Ist aber q eine von p verschiedene Primzahl und gehört q mod p^ν zum Exponenten f_ν, ist ferner $\varphi(p^\nu) = p^{\nu-1}(p-1) = e_\nu f_\nu$, so zerfällt q innerhalb K_ν in e_ν verschiedene Primideale. Damit also unsere Voraussetzungen erfüllt sind, haben wir nachzuweisen, daß e_ν bei wachsendem ν beschränkt ist.

Daß f_ν, wenn ν wächst, niemals abnimmt, ist der Bedeutung von f zufolge klar. Ferner muß f_ν über alle Grenzen wachsen, denn p^ν wird

[7]) Vgl. die S. 16 zitierte Arbeit von Dedekind.

beliebig groß; damit also $q^{f_\nu}-1$ durch p^ν teilbar ist, muß auch f_ν unbegrenzt zunehmen. Da nun f_ν ein Teiler von $p^{\nu-1}(p-1)$ ist, müssen bei wachsendem ν schließlich die Teiler von $p-1$, die in den f_ν überhaupt vorkommen, erschöpft werden, und f_ν wird sich dann nur noch um Faktoren vermehren, die Potenzen von p sind. Wir können daher ν so groß annehmen, daß

$$1.\quad f_{\nu+1}=pm$$

wird, wo m alle in den f_ν auftretenden Teiler von $p-1$ enthält, daß

$$2.\quad m\geqq f_2$$

ist. Dann wird $q^{f_{\nu+1}}\equiv 1 \pmod{p^{\nu+1}}$ und q^m-1 mindestens durch p^2 teilbar. Wir behaupten: Dann ist q^m-1 mindestens durch p^ν teilbar. Es ist nämlich:

$$q^{pm}-1=(q^m-1)(q^{m(p-1)}+q^{m(p-2)}+\ldots+q^m+1)\equiv 0 \pmod{p^{\nu+1}}.$$

Nun war

$$q^m\equiv 1 \pmod{p^2},$$
$$q^{xm}\equiv 1 \pmod{p^2},$$

also:

$$q^{m(p-1)}+q^{m(p-2)}+\ldots+q^m+1\equiv p \pmod{p^2}.$$

Dieser Ausdruck ist also durch p, aber nicht mehr durch p^2 teilbar, deshalb q^m-1 mindestens durch p^ν. Gehört also q für hinreichend großes ν mod p^ν zum Exponenten f_ν, so kann es nicht auch mod $p^{\nu+1}$ zum Exponenten $f_{\nu+1}=f_\nu$ gehören, da sonst nach dem eben Bewiesenen $q^{\frac{f_\nu}{p}}-1$ durch p^ν teilbar wäre, gegen die Bedeutung von f_ν. Hieraus folgt, daß von einem gewissen Werte des ν an:

$$f_{\nu+1}\geqq pf_\nu,\qquad e_{\nu+1}\leqq e_\nu$$

wird, q. e. d.

So ergibt sich der Zerlegungssatz für den Körper Ω:

Die ganzen Zahlen des Körpers Ω aller p^ν-ten Einheitswurzeln lassen sich eindeutig in der Form darstellen:

$$\sqrt[p^\nu(p-1)]{p^k}\,\mathfrak{p}_1^{k_1}\mathfrak{p}_2^{k_2}\ldots\mathfrak{p}_m^{k_m}.$$

Dabei bedeutet $\sqrt[p^\nu(p-1)]{p^k}$ die k-te Potenz eines wohlbestimmten Ideals von Ω, welches ein Teiler von p ist, während die $\mathfrak{p}_i$ die Primideale des Körpers Ω sind, die in den anderen Primzahlen aufgehen.

Ebenso wie der Körper Ω lassen sich nach Satz 3 S. 37 die Teilkörper von Ω, insbesondere der größte in Ω enthaltene Körper reeller Zahlen, behandeln. Dasselbe gilt aber offenbar noch von vielen anderen unendlichen Kreisteilungskörpern.

(Eingegangen am 15. März 1925.)

Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus.

Von

L. Berwald in Prag.

In einem metrischen *allgemeinen Raume*[1]), d. h. in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, der durch das Grundintegral eines regulären Variationsproblems einfachster Art eine Maßbestimmung aufgeprägt ist, läßt sich eine Parallelübertragung erklären, die in rein analytischer Form zuerst bei Fräulein E. Noether[2]) auftritt. Die Funktionen, welche diese Parallelübertragung bestimmen, hängen im allgemeinen außer vom Orte in der Mannigfaltigkeit auch noch von einem Vektorfelde ab, das vorher in der Mannigfaltigkeit ausgezeichnet werden muß.

In der vorliegenden Abhandlung wird zunächst diese Parallelübertragung besprochen und die mit ihr zusammenhängenden Grundbegriffe, namentlich der des Krümmungstensors, aufgestellt. Es ist bemerkenswert, daß sich in einem allgemeinen Raum der Krümmungstensor durch Differentiation ableiten läßt aus einem einfacher gebauten Tensor, dem „Grundtensor" der Krümmung (§ 1).

Sodann wird die Aufgabe behandelt, einen allgemeinen Raum aus der in ihm herrschenden Parallelübertragung zu bestimmen. Sie läuft hinaus auf die Bestimmung der Grundfunktionen der regulären Variationsprobleme, welche ein System von n vorgegebenen Differentialgleichungen zweiter

[1]) Der Name „allgemeiner Raum" dürfte von Herrn P. Finsler herrühren. Vgl. P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Diss. Göttingen 1918. — Nicht metrische allgemeine Räume treten auf bei L. Berwald, Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Maßbestimmung. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **34** (1925).

[2]) E. Noether, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke. Göttinger Nachr. (math.-phys. Kl.) 1918, S. 37–44. Siehe auch L. Berwald, a. a. O. [1]).

Ordnung als Differentialgleichungen der Extremalen zulassen [3]). Dabei wird von den gegebenen Differentialgleichungen angenommen, daß sie nach den zweiten Ableitungen aufgelöst und in den ersten Ableitungen von zweiter Dimension homogen sind, und daß der „Bogen" (das Grundintegral) des Variationsproblems unabhängige Veränderliche ist. Die Aufgabe wird hier auf die Integration eines Systems von n homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in $2n$ Veränderlichen zurückgeführt [4]) (§ 2).

Weiterhin werden die Methoden des absoluten Differentialkalküls von Ricci auf allgemeine Räume übertragen (§ 3), und damit eine einfache formale Grundlage für differentialgeometrische Untersuchungen über allgemeine Räume geschaffen.

Im § 4 wird die Längen- und Winkelmessung in allgemeinen Räumen besprochen und das Verhalten der Längen und Winkel bei Parallelübertragung untersucht. Dabei ergibt sich, daß ein allgemeiner Raum in der Regel eine Streckenkrümmung hat.

Es folgt ein eingehendes Studium der Krümmungsverhältnisse eines zweidimensionalen allgemeinen Raumes (§ 5). Diese hängen in letzter Linie von einem Skalar ab, dessen Identität mit einer von Herrn A. L. Underhill [5]) eingeführten Invariante nachgewiesen wird. An diesen Nachweis schließen sich Bemerkungen geometrischer Natur an über die Normalform der zweiten Variation, die man bei Verwendung der Underhillschen Invariante erhält, und eine entsprechende Normalform der Jacobischen Differentialgleichung. Zum Schlusse wird noch die Bedingung dafür abgeleitet, daß ein zweidimensionaler allgemeiner Raum keine Streckenkrümmung besitzt.

---

[3]) Für den Fall, daß diese Differentialgleichungen die besondere Form $\frac{d^2x^i}{ds^2} = p\left(x, \frac{dx}{ds}\right)\frac{dx^i}{ds}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ besitzen, vgl. die weitgehenden Untersuchungen von W. Wirtinger, Über allgemeine Maßbestimmungen, in welchen die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden. Monatsh. Math. Phys. **32** (1923), S. 1—14.

[4]) Über dieses „inverse Problem der Variationsrechnung" vgl. etwa für $n = 2$ G. Darboux, Théorie des surfaces III., Paris 1894, Nr. 604 f.; O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909, bes. S. 37 f.; für $n > 2$: A. Hirsch, Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Math. Ann. **49** (1897), S. 49—72. Weitere Literaturangaben bei G. Hamel, Über die Geometrien, in denen die Geraden die kürzesten sind. Math. Ann. **57** (1903), S. 231—264, bes. S. 234 f.

[5]) A. L. Underhill, Invariants of the function $f(x, y, x', y')$ in the calculus of variations. Trans. Amer. Math. Soc. **9** (1908), S. 316—338. Vgl. auch O. Bolza, a. a. O. [4]), S. 227 f.

Endlich werden (§ 6) für einen allgemeinen Raum von mehr als zwei Dimensionen die Analoga des Riemannschen Krümmungsmaßes und der Richtungsinvariante der Krümmung aufgestellt. Die geometrische Erklärung der Richtungsinvariante der Krümmung läßt sich in naheliegender Weise auf die des Krümmungsmaßes zurückführen. Für dieses wird eine geometrische Definition gegeben, die eine Übertragung der von Herrn T. Levi-Civita herrührenden Parallelogrammoid-Definition des Riemannschen Krümmungsmaßes auf allgemeine Räume darstellt.

Der Kürze halber wurde davon abgesehen, die metrischen Elemente und die affinen (d. h. die vom Parallelismus herrührenden) voneinander zu trennen. In dieser Hinsicht sei auf den Innsbrucker Vortrag des Verfassers [1]) verwiesen.

* * *

Die vorliegende Abhandlung war schon vollendet, als eine Arbeit des Herrn J. L. Synge[5a]) erschien, in welcher für einen allgemeinen Raum gleichfalls der Fundamentaltensor $g_{ik}(x, dx)$ (Nr. 11) und der Begrifi des Winkels zweier Vektoren in bezug auf das Linienelement einer Kurve (Nr. 17) eingeführt wird. Beide finden sich auch schon in dem erwähnten Vortrage des Verfassers. Herr Synge betrachtet auch eine Parallelübertragung eines willkürlichen Vektors längs einer gegebenen Kurve; diese ist jedoch verschieden von der Parallelübertragung, die im Innsbrucker Vortrage des Verfassers und hier verwendet wird.

(Zusatz bei der Korrektur.) Das über die Arbeit von Synge Gesagte gilt auch von einer Abhandlung von J. H. Taylor[5b]), die während des Druckes der vorliegenden Untersuchung publiziert wurde. Bei Herrn Taylor tritt auch noch der Begriff der Maßzahl eines Vektors in Bezug auf ein Linienelement (Nr. 17) auf. Seine Abhandlung ist früher zur Veröffentlichung eingesandt worden, als die Arbeiten des Herrn Synge und des Verfassers.

§ 1.

Parallelübertragung in allgemeinen Räumen.

1. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M, die auf ein System von Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^n$ bezogen ist, wird zu einem (metrischen) *allgemeinen Raume* dadurch, daß das Integral

---

[5a]) J. L. Synge, A generalisation of the Riemannian line-element. Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), S. 61—67.

[5b]) J. H. Taylor, A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas. Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), S. 246—264.

$$(1)\qquad s = \int_{t_0}^{t} F(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t);\ \dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t), \ldots, \dot{x}^n(t))\,dt$$
$$= \int_{t_0}^{t} F(x, \dot{x})\,dt = \int_{t_0}^{t} F(x, dx)$$

auf jeder in ihr enthaltenen Kurve als *Bogenlänge* erklärt wird.

Von der Funktion $F(x, \dot{x})$ setzen wir voraus, daß sie für alle Wertesysteme der x^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aus M und für alle möglichen Wertesysteme der $\dot{x}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — mit Ausnahme des Wertesystems $(0, 0, \ldots, 0)$, das wir von der Betrachtung ausschließen — analytisch regulär und positiv, ferner in den $\dot{x}^i$ positiv-homogen von erster Dimension ist. $x^i = x^i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist die als regulär vorausgesetzte Parameterdarstellung eines mit Richtungssinn (dem Sinn der wachsenden t) versehenen, also orientierten, reellen analytisch regulären Kurvenstückes („Kurve“) in M; $\dot{x} = \frac{dx^i(t)}{dt}$.[6])

Im folgenden denken wir uns in der Regel die Bogenlänge s als unabhängige Veränderliche eingeführt. Die Ableitung nach s bezeichnen wir durch angehängte Striche: $x'^i = \frac{dx^i(s)}{ds}$, usw. Dann gilt wegen (1) identisch in s:

$$(2)\qquad F(x, x') = 1.$$

2. Da $F(x, x')$ in den x' positiv-homogen von erster Dimension ist, so bestehen die Identitäten

$$(3)\qquad x'^i F_{x'^i} = 1,\ ^7)$$

$$(4)\qquad x'^i F_{x'^i x'^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus (4) folgt

$$(5)\qquad x'^1 : x'^2 : \ldots : x'^n = A^{j1} : A^{j2} : \ldots : A^{jn} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

wenn A^{ij} das algebraische Komplement von $F_{x'^i x'^j}$ in der Determinante $|F_{x'^i x'^j}|$ bezeichnet. Es existiert also eine Funktion $F_1(x, x')$, welche den Gleichungen

$$(6)\qquad x'^i x'^j F_1 = A^{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Sie kann folgendermaßen dargestellt werden:

---

[6]) Man kommt natürlich auch schon mit schwächeren Voraussetzungen aus. Vgl., für $n = 2$, O. Bolza, a. a. O. [4]), bes. §§ 25, 28. — Genaueres über den verwendeten Kurvenbegriff findet man bei P. Finsler, a. a. O. [1]) S. 14, und, für $n = 2$, bei O. Bolza, a. a. O. [4]), § 25.

[7]) Angehängte Zeiger bezeichnen partielle Ableitungen. Ferner ist über jeden Zeiger, der in einer Formel einmal oben und einmal unten auftritt, von 1 bis n zu summieren.

$$(7)\quad F_1(x,x') = -\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n}(x'^i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n}(z^i)^2}\begin{vmatrix} F_{x'^1x'^1} & F_{x'^1x'^2} & \dots & F_{x'^1x'^n} & x'^1 \\ F_{x'^2x'^1} & F_{x'^2x'^2} & \dots & F_{x'^2x'^n} & x'^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{x'^nx'^1} & F_{x'^nx'^2} & \dots & F_{x'^nx'^n} & x'^n \\ z^1 & z^2 & \dots & z^n & 0 \end{vmatrix},$$

wobei $z^1, z^2, \dots, z^n$ n willkürliche reelle Zahlen bedeuten, die nicht alle Null sind. F_1 ist in den x' positiv-homogen von der Dimension $-(n+1)$.

Wir setzen im folgenden voraus, daß $F_1(x,x')$ für alle Wertesysteme der x^i $(i=1,2,\dots,n)$ aus M und für alle möglichen Wertesysteme der x'^i $(i=1,2,\dots,n)$ außer dem Wertesystem $(0,0,\dots,0)$ von Null verschieden ist. Das Variationsproblem $\delta s = 0$ ist dann in unserer Mannigfaltigkeit *regulär*.

3. Nach Voraussetzung (Nr. 1) ist sicher eines der x', etwa x'^k, von Null verschieden. Daher lassen sich aus $n-1$ der Differentialgleichungen der Extremalen des Variationsproblems $\delta s = 0$,[8]) nämlich den Gleichungen

$$(8)\quad x'^j F_{x'^ix'^j} + x''^j F_{x'^ix'^j} - F_{x^i} = 0 \qquad (i=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n)$$

und der aus (2) durch Differentiation nach s hervorgehenden Gleichung

$$(9)\qquad x'^j F_{x^j} + x''^j F_{x'^j} = 0$$

die zweiten Ableitungen der x berechnen. Denn die Determinante D der Koeffizienten der x'' im linearen Gleichungssystem (8), (9) hat bei geeigneter Anordnung der Gleichungen den Wert

$$(10)\qquad D = A^k\, F_{x'^j} = F_1 \cdot x'^k x'^j \cdot F_{x'^jx'^j} = x'^n F_1,$$

und ist somit (Nr. 2) beständig von Null verschieden.

Den aus (8) und (9) für die x'' erhaltenen Funktionen

$$(11)\qquad x''^i = -\varphi^i(x,x') \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

haftet noch eine gewisse Unbestimmtheit an. Sie werden völlig bestimmt durch die Festsetzung, daß sie in den x' *positiv-homogen von zweiter Dimension* sein sollen, so daß

$$(12)\qquad \frac{\partial \varphi^i}{\partial x'^j} x'^j = \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x'^j \partial x'^k} x'^j x'^k = 2\varphi^i,$$

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x'^j \partial x'^k} x'^j = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x'^k}.$$

---

[8]) Die letzte der n Differentialgleichungen der Extremalen ist wegen der Identität

$$(x'^j F_{x'^ix'^j} + x''^j F_{x'^ix'^j} - F_{x^i})\, x'^i = 0$$

eine Folge der Gleichungen (8).

Die so definierten Funktionen φ^i spielen eine wichtige Rolle bei der Erklärung der Parallelübertragung in unserem allgemeinen Raum, von dem wir von jetzt ab auch noch voraussetzen, daß er kein Riemannscher Raum ist.

4. Um zur Parallelübertragung zu gelangen, ordnen wir zunächst jedem Punkte (x) unseres Raumes einen infinitesimalen[9]) Vektor (dx) in diesem Punkte zu, den wir das *ausgezeichnete Linienelement* des Punktes (x) nennen. Die Komponenten dx^i des ausgezeichneten Linienelementes setzen wir als — im übrigen beliebige — infinitesimale reelle analytische und reguläre Funktionen der x voraus. Zur Unterscheidung von ihnen bezeichnen wir die Komponenten willkürlicher Linienelemente mit δx^i, $\delta_1 x^i$, usw.

Wir erklären dann als *parallele Übertragung* des kontravarianten Vektors (ξ) im Punkte (x) von (x) nach dem unendlich benachbarten Punkte $(x+\delta x)$ den Übergang vom Vektor (ξ) im Punkte (x) zum Vektor $(\xi+\delta\xi)$ im Punkte $(x+\delta x)$, wenn $(\delta\xi)$ die Komponenten hat

$$(14)\quad \delta\xi^i = -\Gamma^i_{kl}(x,dx)\,\xi^k\,\delta x^l;\quad \Gamma^i_{kl}(x,dx) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^i(x,dx)}{\partial dx^k\,\partial dx^l},$$
$$(i=1,2,\ldots,n).$$

In (14) sind die Γ^i_{kl} in den dx *positiv-homogen von nullter Dimension* und symmetrisch in den beiden unteren Zeigern.

Die parallele Übertragung eines kovarianten Vektors (η) im Punkte (x) von (x) nach dem unendlich benachbarten Punkte $(x+dx)$ ist eindeutig erklärt durch die Forderung, daß bei simultaner Parallelverschiebung dieses Vektors (η) und eines *beliebigen* kontravarianten Vektors (ξ) die Invariante $\xi^i\eta_i$ ungeändert bleibt. Analog für irgendwelche Tensoren.

Die Parallelübertragung in einem allgemeinen Raum hängt nach dem Vorhergehenden im allgemeinen außer vom Orte in der Mannigfaltigkeit auch noch ab von der Wahl des Feldes der ausgezeichneten Linienelemente.

5. Durch den Prozeß der parallelen Herumführung eines willkürlichen Vektors (ξ) im Punkte (x) um ein infinitesimales Parallelogramm gelangt man, wenn dabei das ausgezeichnete Linienelement (dx) des Punktes (x) gleichfalls parallel zu sich selbst mitgeführt wird, zum *Krümmungstensor* des allgemeinen Raumes. Man erhält

$$(15)\quad \delta_1\delta\xi^i - \delta\delta_1\xi^i = -\tfrac{1}{2}K^i_{k.lm}(x,dx)\,\xi^k(\delta x^l\delta_1 x^m - \delta x^m\delta_1 x^l),$$

[9]) Es ist für die folgende Erklärung des Parallelismus unwesentlich, daß der Vektor infinitesimal ist.

wo

$$(16)\quad K^{i}_{k.lm}(x,dx)=\frac{\partial\Gamma^{i}_{kl}}{\partial x^{m}}-\frac{\partial\Gamma^{i}_{km}}{\partial x^{l}}+\Gamma^{r}_{kl}\Gamma^{i}_{rm}-\Gamma^{r}_{km}\Gamma^{i}_{rl}-\left(\frac{\partial\Gamma^{i}_{kl}}{\partial dx^{r}}\Gamma^{r}_{mp}-\frac{\partial\Gamma^{i}_{km}}{\partial dx^{r}}\Gamma^{r}_{lp}\right)dx^{p}$$

oder

$$(16a)\quad K^{i}_{k.lm}(x,dx)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{3}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial x^{m}\partial dx^{k}\partial dx^{l}}-\frac{\partial^{3}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial x^{l}\partial dx^{k}\partial dx^{m}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^{2}\varphi^{r}(x,dx)}{\partial dx^{k}\partial dx^{l}}\frac{\partial^{2}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial dx^{r}\partial dx^{m}}-\frac{\partial^{2}\varphi^{r}(x,dx)}{\partial dx^{k}\partial dx^{m}}\frac{\partial^{2}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial dx^{r}\partial dx^{l}}+\frac{\partial^{3}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial dx^{k}\partial dx^{m}\partial dx^{r}}\frac{\partial\varphi^{r}(x,dx)}{\partial dx^{l}}-\frac{\partial^{3}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial dx^{k}\partial dx^{l}\partial dx^{r}}\frac{\partial\varphi^{r}(x,dx)}{\partial dx^{m}}\right)$$

die Komponenten des Krümmungstensors sind. Sie sind, wie die $\Gamma^{i}_{kl}(x,dx)$ in den *dx positiv-homogen von nullter Dimension*, und besitzen in den unteren Zeigern *zyklische*, in den beiden letzten Zeigern *schiefe Symmetrie*.

6. Wenn man insbesondere anstatt eines beliebigen Vektors (ξ) das ausgezeichnete Linienelement (dx) des Punktes (x) um ein infinitesimales Parallelogramm parallel zu sich selbst herumführt, so gelangt man zu einem einfacher gebauten Tensor, den wir den *Grundtensor der Krümmung* des allgemeinen Raumes nennen. Man erhält

$$(17)\quad \delta_{1}\delta dx^{i}-\delta\delta_{1}dx^{i}=-\frac{1}{2}K^{i}_{.lm}(x,dx)\cdot(\delta x^{l}\delta_{1}x^{m}-\delta x^{m}\delta_{1}x^{l}),$$

wo

$$(18)\quad K^{i}_{.lm}(x,dx)=dx^{k}K^{i}_{k.lm}(x,dx)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial x^{m}\partial dx^{l}}-\frac{\partial^{2}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial x^{l}\partial dx^{m}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^{2}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial dx^{m}\partial dx^{r}}\frac{\partial\varphi^{r}(x,dx)}{\partial dx^{l}}-\frac{\partial^{2}\varphi^{i}(x,dx)}{\partial dx^{l}\partial dx^{r}}\frac{\partial\varphi^{r}(x,dx)}{\partial dx^{m}}\right)$$

die Komponenten des Grundtensors der Krümmung sind. Sie sind in den unteren Zeigern *schiefsymmetrisch* und in den *dx von erster Dimension positiv-homogen*, so daß erst $K^{p}_{.ik}(x,dx)\cdot[F(x,dx)]^{-1}$ unabhängig von der Wahl des Parameters ist.

Die Komponenten des Krümmungstensors sind die Ableitungen der Komponenten des Grundtensors der Krümmung nach den dx:

$$(19)\quad \frac{\partial K^{p}_{.ik}(x,dx)}{\partial dx^{l}}=K^{p}_{l.ik}(x,dx).$$

Für den Krümmungstensor gilt also noch die Identität

$$(19a)\quad \frac{\partial K^{p}_{q.ik}(x,dx)}{\partial dx^{l}}dx^{q}=0.$$

7. Wenn die Γ_{kl}^{i} bloße Ortsfunktionen sind, die Parallelübertragung also von der Wahl des ausgezeichneten Linienelementes unabhängig ist, so ist der allgemeine Raum *affin-zusammenhängend* im Sinn von H. Weyl. Wenn außerdem noch der Krümmungstensor Null ist, so ist dieser affin-zusammenhängende Raum *euklidisch-affin*, d. h. die durch (14) erklärte Vektorübertragung ist integrabel.

Die Eigenschaft eines allgemeinen Raumes, *affin-zusammenhängend* (*euklidisch-affin*) zu sein, bleibt bei Punkttransformationen erhalten[9a]).

§ 2.

Über die Bestimmung eines allgemeinen Raumes aus der in ihm herrschenden Parallelübertragung.

8. Die Parallelübertragung in einem allgemeinen Raume war bestimmt durch ein System von $\frac{n^2(n+1)}{2}$ (reellen und regulär-analytischen) Funktionen $\Gamma_{kl}^{i}(x, x')$, die in den x' positiv-homogen von nullter Dimension sind, die Symmetrieeigenschaft $\Gamma_{kl}^{i}(x, x') = \Gamma_{lk}^{i}(x, x')$ besitzen und endlich den Bedingungen

$$\frac{\partial \Gamma_{kl}^{i}(x, x')}{\partial x'^{m}} = \frac{\partial \Gamma_{mk}^{i}(x, x')}{\partial x'^{l}} = \frac{\partial \Gamma_{ml}^{i}(x, x')}{\partial x'^{k}} \tag{14a}$$

$$(i, k, l, m = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Um alle allgemeinen Räume (d. h. die zugehörigen Grundfunktionen $F(x, x')$) zu bestimmen, die diese Komponenten $\Gamma_{kl}^{i}(x, x')$ der Parallelübertragung haben, bilden wir die n Funktionen

$$\varphi^{i}(x, x') = \Gamma_{kl}^{i}(x, x')\, x'^{k} x'^{l} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

deren zweite Ableitungen nach den x' wegen (14a) und der Homogenitätseigenschaft der $\Gamma_{kl}^{i}(x, x')$ mit dem Doppelten der $\Gamma_{kl}^{i}(x, x')$ zusammenfallen. Die Gleichungen (11), mit diesen Funktionen $\varphi^{i}(x, x')$ gebildet, sind die Differentialgleichungen der Extremalen in den gesuchten allgemeinen Räumen. Die gestellte Aufgabe reduziert sich somit auf folgende:

Es sollen alle allgemeinen Räume bestimmt werden, in denen die Differentialgleichungen der Extremalen die Gestalt (11) *haben, wobei die unabhängige Veränderliche s der Bogen der Extremalen ist und die* $\varphi^{i}(x, x')$ *gegebene* (*reelle und regulär-analytische*) *Funktionen, die in den* x' *positiv-homogen von zweiter Dimension sind.*

[9a]) Vgl. die Bemerkung vor Gleichung (38).

9. Wenn $F(x, x')$ die Grundfunktion eines regulären Variationsproblems ist, das der Aufgabe Genüge leistet, so bestehen die Gleichungen

$$x'^j F_{x'^j} - \varphi^j F_{x'^j} = 0, \tag{21}$$

$$x'^j F_{x'^i x^j} - \varphi^j F_{x'^i x'^j} - F_{x^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

identisch in den x, x'. Durch Differentiation von (21) nach x'^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ folgen die Gleichungen

$$x'^j F_{x^j x'^i} - \varphi^j F_{x'^i x'^j} + F_{x^i} - \frac{\partial \varphi^j}{\partial x'^i} F_{x'^j} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{23}$$

identisch in x, x'. Addition, bzw. Subtraktion je zweier entsprechenden Gleichungen (22) und (23) gibt nach Division durch zwei das mit (22), (23) äquivalente System:

$$x'^j F_{x^j x'^i} - \varphi^j F_{x'^i x'^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x'^i} F_{x'^j} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

$$F_{x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x'^i} F_{x'^k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

identisch in x, x'. Hier ist noch (24) eine Folge von (25), denn durch Differentiation von (25) nach x'^j folgt

$$F_{x^i x'^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x'^i} F_{x'^k x'^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x'^i \partial x'^j} F_{x'^k} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

und hieraus ergeben sich durch Multiplikation mit x'^i, Summierung über i und Vertauschung der Zeiger i und j wegen (12) und (13) eben die Gleichungen (24).

Aus (21) und (22) — genauer aus (21) und $n - 1$ der Gleichungen (22) — folgen also die n unabhängigen Gleichungen (25). Umgekehrt kann man aus (25) wieder das System (21), (22) ableiten. Zunächst erhält man auf die eben angegebene Weise aus (25) die Gleichungen (24), durch Multiplikation mit x'^i und Summierung über i aber wegen (12) die Gleichungen (21). Differentiation von (21) nach x'^i gibt (23), und Subtraktion der mit zwei multiplizierten Gleichungen (25) von (23) endlich (22)[10].

[10]) Es ist vielleicht nicht überflüssig, die Gleichungen dieses Abschnittes mit Verwendung der kovarianten Differentiation (§ 3) auch in invarianter Form zu schreiben. Man hat dann

$$x'^j F_{/j}(x, x') = 0, \tag{21}$$

$$x'^j F_{x'^i/j}(x, x') - F_{/i}(x, x') = 0, \tag{22}$$

$$x'^j F_{x'^i/j}(x, x') + F_{/i}(x, x') = 0, \tag{23}$$

also

$$x'^j F_{x'^i/j}(x, x') = 0, \tag{24}$$

$$F_{/i}(x, x') = 0. \tag{25}$$

Die am Schlusse von Nr. 8 ausgesprochene Aufgabe läßt sich also auf die Integration des Systems

$$X_i F \equiv F_{x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x'^i} F_{x'^k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

von n homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen für die Funktion $F(x, x')$ der $2n$ unabhängigen Veränderlichen x, x' und somit auf die Theorie der vollständigen Systeme zurückführen.

Es sei noch bemerkt, daß die Klammerausdrücke der Gleichungen (25) die Gestalt

$$(X_k X_l - X_l X_k) F = K^q_{\cdot kl} F_{x'^q} \tag{25a}$$

haben, wo die $K^q_{\cdot kl}$ die Komponenten des Grundtensors der Krümmung sind.

In den Gleichungen dieses Abschnittes sind der einfacheren Schreibweise wegen überall die Argumente x, x' unterdrückt worden.

10. Als Anwendung bestimmen wir noch die allgemeinen Räume, die euklidisch-affin sind. Dazu brauchen wir nur zu bemerken, daß in jedem euklidisch-affinen Raum durch eine Koordinatentransformation sämtliche $\Gamma^i_{kl}(x)$ zum Verschwinden gebracht werden können[11]). Beziehen wir also einen allgemeinen Raum, der euklidisch-affin ist, von vornherein auf ein solches „lineares" Koordinatensystem, in dem alle $\Gamma^i_{kl}(x)$ Null sind, so sind nach (12) und (14) auch alle $\varphi^i(x, x')$ Null. Die Gleichungen (25) reduzieren sich jetzt auf $F_{x^i}(x, x') = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, und zeigen, daß F eine (bis auf die Regularitäts- und Homogeneitätsbedingungen) beliebige Funktion der x' allein ist.

Die allgemeinen Räume, in denen die Parallelübertragung nur vom Orte abhängt und außerdem integrabel ist, sind also identisch mit den Minkowskischen Räumen, d. h. die Grundfunktion des zugehörigen Variationsproblems kann durch eine Punkttransformation auf die Form $F(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)$ gebracht werden, die nur von den Ableitungen der Koordinaten, nicht aber von den Koordinaten selbst abhängt.

§ 3.

Übertragung der Methoden des absoluten Differentialkalküls auf allgemeine Räume.

11. Als *Fundamentaltensor* in einem allgemeinen Raume erklären wir den kovarianten Tensor 2. Stufe mit den Komponenten

[11]) Vgl. etwa H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, bes. S. 22 f.

$$(27)\quad g_{ik}(x,\dot{x}) = g_{ki}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2[F(x,\dot{x})]^2}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^k}$$
$$= F(x,\dot{x})F_{\dot{x}^i\dot{x}^k}(x,\dot{x}) + F_{\dot{x}^i}(x,\dot{x})F_{\dot{x}^k}(x,\dot{x}),$$
$$(i,k=1,2,\ldots,n),$$

die in den $\dot{x}$ *positiv-homogen von nullter Dimension* sind, so daß man

$$(27a)\quad \begin{cases} g_{ik}(x,\dot{x}) = g_{ik}(x,x') = g_{ik}(x,dx), \\ g_{ik}(x,\dot{x})\cdot\dot{x}^k = F(x,\dot{x})F_{\dot{x}^i}(x,\dot{x}), \quad g_{ik}(x,\dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^k = [F(x,\dot{x})]^2 \end{cases}$$

hat.

Die Determinante G der g_{ik} besitzt den Wert

$$(28)\qquad G(x,\dot{x}) = [F(x,\dot{x})]^{n+1}\cdot F_1(x,\dot{x}),$$

wo $F_1(x,\dot{x})$ die durch (7) erklärte Funktion ist. Somit ist G von Null verschieden, und es existiert auch das zu den g_{ik} reziproke System $g^{ik} = g^{ki}$. Die $g^{ik}(x,\dot{x})$ sind, ebenso wie G, *positiv-homogen von nullter Dimension* in den $\dot{x}$.

Mittels der g_{ik} und g^{ik} kann man das Hinaufziehen und Herunterziehen der Zeiger ganz in der üblichen Weise erklären. Dann hat z. B. der Vektor mit den kontravarianten Komponenten

$$(29)\qquad \xi^i = x'^i = \frac{x^i}{F(x,\dot{x})}$$

die kovarianten Komponenten

$$(29a)\qquad \xi_i = F_{x'^i}(x,x') = F_{\dot{x}^i}(x,\dot{x}),$$

und der Vektor mit den kontravarianten Komponenten

$$(30)\qquad \eta^i = x''^i + \varphi^i(x,x')$$

die kovarianten Komponenten

$$(30a)\qquad \eta_i = x''^k F_{x'^i x'^k}(x,x') + x'^k F_{x'^i x^k}(x,x') - F_{x^i}(x,x'),$$

also die Lagrangeschen Ausdrücke.

Mit Hilfe des Fundamentaltensors $g_{ik}(x,\dot{x})$ läßt sich ein Längen- und Winkelbegriff definieren, der in § 4 besprochen wird.

12. Im folgenden bilden wir aus gegebenen Tensoren, die von den x und $\dot{x}$ abhängen, neue Tensoren durch den *Prozeß der kovarianten Ableitung*. Dabei wählen wir der bequemeren Schreibweise wegen als unabhängige Veränderliche den Bogen s. Es ist aber zu beachten, daß alle Formeln, die wir entwickeln werden, auch gültig bleiben, wenn man überall s durch einen gleichsinnig wachsenden Parameter t, also die x' durch die

$\dot{x}$ ersetzt, oder überall statt der Ableitungen der x die Differentiale dx schreibt [12]).

Es seien $\xi^{k_1, k_2, \ldots, k_m}_{\cdot\cdot\cdot

Insbesondere sind für $\xi^i = x'^l$ und für $\xi_l = F_{x'^l}(x, x')$ [13]) die kovarianten Ableitungen Null:

$$x'^l{}_{/i} = 0, \qquad F_{x'^l/i} = 0, \tag{35}$$

wie aus den Homogenitätseigenschaften der $\varphi^i(x, x')$ und etwa aus (26) folgt.

Die kovariante Ableitung der ersten kovarianten Ableitung eines Tensors (Komponenten: $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}$) nennen wir seine *zweite kovariante Ableitung* (Komponenten: $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/ij}$), usf. Für die kovarianten Ableitungen bestehen dieselben Rechenregeln wie für gewöhnliche partielle Ableitungen.

13. Bei *Vertauschung der Zeiger in den zweiten kovarianten Ableitungen* gelten die Formeln

$$\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/ij} - \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/ji} = -\frac{\partial \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}}{\partial x'^p} K_{q\cdot ij}^{\ \ p} x'^q + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \xi^{k_1 k_2 \cdots k_{\mu-1} p k_{\mu+1} \cdots k_m}_{\cdot\qquad\qquad\qquad\cdot\,(l)} K_{p\cdot ij}^{\ \ k_\mu}$$

$$- \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \xi^{(k)}_{\cdot\, l_1 l_2 \cdots l_{\varrho-1} p l_{\varrho+1} \cdots l_r} K_{l_\varrho\cdot ij}^{\ \ p}, \tag{36}$$

also z. B.

$$\begin{cases} f_{/ik} - f_{/ki} = -\dfrac{\partial f}{\partial x'^p} K_{q\cdot ik}^{\ \ p} x'^q; \\ \xi_{i/kl} - \xi_{i/lk} = -\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x'^p} K_{q\cdot kl}^{\ \ p} x'^q - \xi_p K_{i\cdot kl}^{\ \ p}. \end{cases} \tag{36a}$$

In diesen Formeln kann man nach (18) für $K_{q\cdot ij}^{\ \ p} x'^q$ auch $K^p_{\cdot ij}$ schreiben. Die Argumente x, x' sind hier und im folgenden wieder unterdrückt.

Für die *Vertauschung der kovarianten Differentiation und der gewöhnlichen partiellen Differentiation nach den x'* gelten, wenn

$$\left(\frac{\partial \ldots}{\partial x'^l}\right)_{/k} = \ldots{}_{/x'^l/k}, \qquad \frac{\partial (\ldots{}_{/k})}{\partial x'^l} = \ldots{}_{/k/x'^l} \text{ [14])}$$

gesetzt wird, die Formeln

---

[13]) Sind $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}(x, x')$ die Komponenten eines Tensors $(m+r)$-ter Stufe, so sind $\frac{\partial}{\partial x'^s}[\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}(x, x')]$ die Komponenten eines *Tensors* $(m+r+1)$-ter Stufe. Mit anderen Worten: Ableitung nach x' erzeugt aus einem Tensor wieder einen Tensor, dessen Komponenten einen kovarianten Zeiger mehr haben.

[14]) Statt $f_{/x'^l}$ schreiben wir einfacher $f_{x'^l}$, usw. — Vorzuziehen ist hier die (leider noch nicht genügend eingebürgerte) Bezeichnung der verschiedenen Differentiationen durch vorgesetzte Operatoren. Vgl. J. A. Schouten, Der Ricciikalkül, Berlin 1924, Einleitung.

$$(37)\quad \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/x'^i/j} - \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/j/x'^i} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \xi^{k_1 k_2 \cdots k_{\mu-1}\, p\, k_{\mu+1}\cdots k_m}_{\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad

Differentiiert man (40a) nach x'^l und beachtet dabei, daß wegen der Definition (27) und der Homogenitätseigenschaft der g_{ik}

$$\frac{\partial g_{pm}(x,x')}{\partial x'^l}x'^m = \frac{\partial g_{pl}(x,x')}{\partial x'^m}x'^m = 0$$

ist, so folgt schließlich noch

$$K_{lik}(x,x') + x'^m K_{lmik}(x,x') = 0 \tag{40b}$$

identisch in x, x'. In (40b) sind $K_{lmik}(x,x') = g_{pm}(x,x')\,K_l{}^p{}_{.ik}(x,x')$ die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors.

15. Aus den Gleichungen (27) und (37) folgen unschwer die Identitäten, die hier an die Stelle des sogenannten *Lemmas von Ricci* treten:

$$g_{ik.l}(x,x') = \frac{1}{2}g_{pq}(x,x')\cdot x'^q\,\frac{\partial^3\varphi^p(x,x')}{\partial x'^i\partial x'^k\partial x'^l} \tag{41}$$

$$= \frac{1}{2}F(x,x')\,F_{x'^p}(x,x')\,\frac{\partial^3\varphi^p(x,x')}{\partial x'^i\partial x'^k\partial x'^l}.$$

Im Anschluß an (41) berechnen wir späterer Anwendung halber auch die logarithmische Ableitung der Determinante G der g_{ik} (Nr. 11) nach dem Bogen s der Extremalen des Variationsproblems $\delta s = 0$, die das Anfangselement (x, x') hat. Es ist

$$\frac{d\log G(x,x')}{ds} = \frac{dg_{ik}(x,x')}{ds}g^{ik}(x,x')$$

$$= \left[g_{ik.l}(x,x') + \frac{1}{2}g_{pk}(x,x')\frac{\partial^2\varphi^p(x,x')}{\partial x'^l\partial x'^i} + \frac{1}{2}g_{ip}(x,x')\frac{\partial^2\varphi^p(x,x')}{\partial x'^l\partial x'^k}\right]x'^l g^{ik}(x,x'$$

Nach leichter Rechnung ergibt sich:

$$\frac{d\log G(x,x')}{ds} = \frac{\partial\varphi^i(x,x')}{\partial x'^i}. \tag{42}$$

An die Stelle der *Bianchischen Identität* tritt hier, zunächst für den *Grundtensor der Krümmung*, die Identität

$$K^r{}_{.kl\ m}(x,x') + K^r{}_{.mk\ l}(x,x') + K^r{}_{.lm\ k}(x,x') = 0, \tag{43}$$

und für den *Krümmungstensor* die Identität

$$K_i{}^r{}_{.kl\ m}(x,x') + K_i{}^r{}_{.mk\ l}(x,x') + K_i{}^r{}_{.lm\ k}(x,x') + \frac{1}{2}x'^q \tag{44}$$

$$\cdot\left(K_q{}^p{}_{.kl}(x,x')\frac{\partial^3\varphi^r(x,x')}{\partial x'^i\partial x'^p\partial x'^m} + K_q{}^p{}_{.mk}(x,x')\frac{\partial^3\varphi^r(x,x')}{\partial x'^i\partial x'^p\partial x'^l}\right.$$

$$\left. + K_q{}^p{}_{.lm}(x,x')\frac{\partial^3\varphi^r(x,x')}{\partial x'^i\partial x'^p\partial x'^k}\right) = 0.$$

Da die Ableitung dieser Identitäten nicht so ganz auf der Hand liegt, deuten wir sie kurz an. Zunächst folgt für einen beliebigen Skalar $f(x, x')$ aus der ersten Gleichung (36a) durch kovariante Differentiation bei Berücksichtigung von (35) und (37a)

$$f_{ikl}(x, x') - f_{kil}(x, x')$$
$$= -f_{l,x'^p}(x, x') K^{\ p}_{q\cdot ik}(x, x') \cdot x'^q - f_{x'^p}(x, x') K^{\ p}_{q\cdot ik\ l}(x, x') \cdot x'^q .$$

Addiert man hierzu die Identität (vgl. (36))

$$f_{kil}(x, x') - f_{kli}(x, x')$$
$$= f_p(x, x') K^{\ p}_{k\cdot li}(x, x') + f_{k\ x'^p}(x, x') K^{\ p}_{q\cdot li}(x, x') \cdot x'^q ,$$

so ergibt sich:

(a)
$$f_{ikl}(x, x') - f_{kli}(x, x')$$
$$= f_{,k,x'^p}(x, x') K^{\ p}_{\cdot li}(x, x') - f_{l\cdot x'^p}(x, x') \cdot K^{\ p}_{\cdot ik}(x, x')$$
$$- f_{x'^p}(x, x') K^{\ p}_{\cdot ik\ l}(x, x') + f_p(x, x') K^{\ p}_{k\cdot li}(x, x').$$

Zyklische Vertauschung von i, k, l und Addition der entstehenden Gleichungen zu (a) gibt

$$f_{x'^p}(x, x')[K^{\ p}_{\cdot ik\ l}(x, x') + K^{\ p}_{\cdot kl\ i}(x, x') + K^{\ p}_{\cdot li\cdot k}(x, x')] = 0 .$$

Wegen der Willkürlichkeit von $f(x, x')$ folgt hieraus (43).

Aus (43) wird (44) erhalten, indem man nach x'^i differentiiert, die Differentiation nach x'^i und die kovariante Ableitung gemäß (37a) vertauscht und die Gleichung (43), die Gleichungen $\dfrac{\partial K^{\ i}_{\cdot kl}(x, x')}{\partial x'^m} = K^{\ i}_{m\cdot kl}(x, x')$ sowie die schiefe Symmetrie der $K^{\ i}_{\cdot kl}$ in den unteren Zeigern beachtet.

§ 4.

Längen- und Winkelmessung. Streckenkrümmung.

16. Außer den in § 1 ausgesprochenen Voraussetzungen machen wir jetzt noch die weitere, daß in dem dort betrachteten Bereiche der $(x, \dot{x})$ die quadratische Form der Variablen y

(45)
$$g_{ik}(x, \dot{x}) y^i y^k \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [F(x, \dot{x})]^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k} y^i y^k$$

positiv-definit ist. Diese Voraussetzung soll immer dann und nur dann zu denen des § 1 hinzutreten, wenn von Längen oder Winkeln die Rede ist. Die durch sie herausgehobenen besonderen allgemeinen Räume bilden die genaue Verallgemeinerung der Riemannschen Räume im engeren Sinn, d. h. mit positiv-definiten ds^2.

Wegen (45) ist insbesondere auch die durch (7) erklärte Funktion $F_1(x, \dot{x})$ positiv, wie (28) zeigt.

17. *Unter der Maßzahl eines Vektors* (ξ) *im Punkte* (x) *in bezug auf das willkürliche Linienelement* (dx) *in diesem Punkte verstehen wir die Zahl*

$$l^2 = g_{ik}(x, dx)\,\xi^i\,\xi^k, \tag{46a}$$

und unter der Länge des Vektors (ξ) *im Punkte* (x) *in bezug auf das Linienelement* (dx) *die positive Wurzel aus der Maßzahl von* (ξ):

$$l = \sqrt{g_{ik}(x, dx)\,\xi^i\,\xi^k} \tag{46b}$$

Den (zwischen Null und π *liegenden*[15]*) Winkel* ω *zweier Vektoren* (ξ) *und* (η) *im Punkte* (x) *in bezug auf das willkürliche Linienelement* (dx) *in diesem Punkte erklären wir durch*

$$\cos\omega = \frac{g_{ik}(x, dx)\,\xi^i\,\eta^k}{\sqrt{g_{ik}(x, dx)\,\xi^i\,\xi^k}\,\sqrt{g_{ik}(x, dx)\,\eta^i\,\eta^k}}, \tag{47}$$

wobei die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

In diesen Erklärungen ist es unwesentlich, daß (dx) infinitesimal ist. Man könnte in entsprechender, unmittelbar zu ersehender Weise die Begriffe Länge und Winkel in bezug auf einen endlichen Vektor (ζ) definieren.

Besonders anzumerken ist der Fall, in dem der Vektor (ξ) die Richtung des Linienelementes (dx) hat. In diesem Falle wird, wegen (27a) und der Homogenitätseigenschaft der $g_{ik}(x, dx)$:

$$l = F(x, \xi), \tag{48}$$

und

$$\cos\omega = \frac{\eta^k F_{\dot{x}^k}(x, \xi)}{\sqrt{g_{ik}(x, \xi)\,\eta^i\,\eta^k}}. \tag{49}$$

Somit ist Orthogonalität zum Vektor (dx) *im Punkte* (x) *in bezug auf das Linienelement* (dx) *in diesem Punkte identisch mit Transversalität zum Linienelement* (dx) *in bezug auf das Variationsproblem mit dem Grundintegral* (1).

Die im vorstehenden besprochene Längen- und Winkelmessung ist nichts anderes als Längen- und Winkelmessung in bezug auf die oskulierende Indikatrix[16].

---

[15]) Wir lassen zu, daß (ξ) und (η) dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung haben. Die für ω angegebenen Grenzen sind also eingeschlossen.

[16]) Vgl. P. Finsler, a. a. O.[1]), bes. S. 42f., wo auch die Winkelmessung in bezug auf die oskulierende Indikatrix auftritt.

18. Im vorigen Abschnitte bedeutete (dx) ein beliebiges Linienelement im Punkte (x). Wir identifizieren dieses Linienelement jetzt mit dem ausgezeichneten Linienelement (Nr. 4) des Punktes (x) und fragen, wie die in § 1 erklärte Parallelübertragung eines willkürlichen Vektors (ξ) im Punkt (x) dessen Länge in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement beeinflußt.

Die Änderung, welche eine von den Koordinaten (x, dx) des ausgezeichneten Linienelementes im Punkte (x) abhängige Größe erleidet, wenn sie samt dem ausgezeichneten Linienelement vom Punkte (x) nach dem Punkte $(x+\delta x)$ $[(x+dx)]$ parallel übertragen wird, möge durch ein vorgesetztes $\delta[d]$ bezeichnet werden. Man hat dann

$$(50)\quad \delta[g_{ik}(x,dx)\xi^i\eta^k] = g_{ik/l}(x,dx)\xi^i\eta^k\delta x^l = \frac{1}{2}g_{pq}(x,dx)\cdot dx^q \frac{\partial^3\varphi^p(x,dx)}{\partial dx^i\,\partial dx^k\,\partial dx^l}\xi^i\eta^k\delta x^l,$$

[vgl. (41)], und daher

$$(51)\quad \delta(l^2) = \frac{1}{2}g_{pq}(x,dx)\,dx^q \frac{\partial^3\varphi^p(x,dx)}{\partial dx^i\,\partial dx^k\,\partial dx^l}\xi^i\xi^k\delta x^l.$$

Eine entsprechende Formel besteht auch für die Änderung des Kosinus des Winkels zweier Vektoren im Punkte (x) in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement dieses Punktes bei simultaner Parallelübertragung der drei Vektoren nach dem willkürlichen Nachbarpunkte $(x+\delta x)$.

Bei Parallelübertragung der Figur, die aus einem Vektor im Punkte (x) und dem ausgezeichneten Linienelement dieses Punktes besteht, längs eines willkürlichen Linienelementes ändert sich also im allgemeinen die Länge des Vektors in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement. Analoges gilt auch von dem Winkel zweier Vektoren in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement.

Dagegen gelten die Sätze:

1. *Überträgt man die Figur, die aus dem ausgezeichneten Linienelement und einem beliebigen Vektor im Punkte (x) besteht, parallel längs des ausgezeichneten Linienelementes vom Punkte (x) nach dem Punkte $(x+dx)$, so bleibt die Länge des Vektors in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement ungeändert.*

2. *Überträgt man die Figur, die aus dem ausgezeichneten Linienelement und zwei beliebigen Vektoren im Punkte (x) besteht, parallel längs des ausgezeichneten Linienelementes vom Punkte (x) nach dem Punkte $(x+dx)$, so bleibt der Winkel der beiden Vektoren in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement ungeändert.* Insbesondere bleibt ein zum ausgezeichneten Linienelement transversaler Vektor im Punkte (x) bei paralleler Übertragung längs des ausgezeichneten Linienelementes zu

dem gleichfalls parallel übertragenen ausgezeichneten Linienelemente transversal.

In der Tat ist wegen (50) und (38) $d[g_{ik}(x, dx)\xi^i\eta^k] = 0$ und daher

$$dl = 0, \qquad d\cos\omega = 0. \tag{52}$$

Bemerken wir schließlich noch:

Die Länge eines Vektors, *der die Richtung des ausgezeichneten Linienelementes besitzt*, in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement bleibt bei Parallelübertragung längs eines *beliebigen* Linienelementes ungeändert, und das gleiche gilt auch von dem Winkel in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement, den ein solcher Vektor mit einem beliebigen Vektor im gleichen Punkte einschließt.

Beides folgt etwa aus (50) vermöge (38).

19. Bei Herumführung der Figur, die aus dem Vektor (ξ) im Punkte (x) und dem ausgezeichneten Linienelemente (dx) dieses Punktes besteht, um ein infinitesimales Parallelogramm ändert sich die Maßzahl (l^2) des Vektors (ξ) in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement gemäß

$$\delta_1\delta(l^2) - \delta\delta_1(l^2) = [g_{ik\ lm}(x, dx) - g_{ik\ ml}(x, dx)]\xi^i\xi^k\delta x^l\delta_1 x^m.$$

Man hat somit wegen (36)

$$\delta_1\delta(l^2) - \delta\delta_1(l^2) = -\frac{1}{2}S_{iklm}(x, dx)\xi^i\xi^k(\delta x^l\delta_1 x^m - \delta x^m\delta_1 x^l), \tag{53}$$

wo

$$S_{iklm}(x, dx) = K_{iklm}(x, dx) + K_{kilm}(x, dx) + \frac{\partial g_{ik}(x, dx)}{\partial dx^p}K^p_{\cdot lm}(x, dx) \tag{54}$$

die Komponenten des *Tensors der Streckenkrümmung* sind. Sie sind in den ersten zwei Zeigern symmetrisch, in den letzten beiden schiefsymmetrisch, und in den dx *homogen von nullter Dimension*.

Aus (53), (54), (27) und (40) ist unschwer zu ersehen, daß die Maßzahl eines Vektors im Punkte (x), der die Richtung des ausgezeichneten Linienelementes (dx) dieses Punktes hat, in bezug auf dieses ausgezeichnete Linienelement bei Herumführung um ein infinitesimales Parallelogramm ungeändert bleibt. Es folgt dies auch aus (48) und (39).

§ 5.

Die Krümmung zweidimensionaler allgemeiner Räume.

20. Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Krümmungsverhältnisse eines *zweidimensionalen* allgemeinen Raumes über. Zur Vereinfachung

der Schreibweise führen wir zunächst einige besondere Bezeichnungen ein. Wir setzen:

$$(55a)\quad \begin{cases} x^1 = x, \quad x^2 = y; \quad \varphi^1(x, x') = \varphi(x, y, x', y'), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi^2(x, x') = \psi(x, y, x', y'); \\ g_{11}(x, x') = e(x, y, x', y'), \quad g_{12}(x, x') = g_{21}(x, x') = f(x, y, x', y'), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g_{22}(x, x') = g(x, y, x', y'), \end{cases}$$

so daß, wenn wir von jetzt ab in diesem Paragraphen die Argumente (x, y, x', y') unterdrücken:

$$(55b)\quad \begin{cases} G = eg - f^2 = F^3 F_1; \quad g^{11} = \dfrac{g}{eg-f^2}, \quad g^{12} = g^{21} = -\dfrac{f}{eg-f^2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad g^{22} = \dfrac{e}{eg-f^2} \end{cases}$$

ist. Da bekanntlich im Falle $n = 2$

$$(56)\qquad \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} = F_1$$

ist, so hat man

$$(57)\quad \begin{cases} e = FF_1 y'^2 + F_{x'}^2, \quad f = -FF_1 x'y' + F_{x'}F_{y'}, \quad g = FF_1 x'^2 + F_{y'}^2; \\ ex' + fy' = FF_{x'}, \quad fx' + gy' = FF_{y'}; \quad ex'^2 + 2fx'y' + gy'^2 = F^2. \end{cases}$$

Für φ und ψ erhält man die folgenden expliziten Werte:

$$(58)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{FF_1}\{x'F_1(x'F_x + y'F_y) + F_{y'}(F_{x'y} - F_{y'x})\}, \\ \psi = \dfrac{1}{FF_1}\{y'F_1(x'F_x + y'F_y) - F_{x'}(F_{x'y} - F_{y'x})\}, \end{cases}$$

so daß die Differentialgleichung der Extremalen auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$(58a)\qquad T \equiv F_1(x'y'' - y'x'' + x'\psi - y'\varphi) \equiv F_1 \cdot \Gamma = 0.$$

21. Für $n = 2$ fallen die von Null verschiedenen Komponenten des Krümmungstensors wegen der schiefen Symmetrie in den beiden letzten Zeigern im wesentlichen mit den Komponenten $K_{ik} = K_{i\cdot kp}^{\ p}$ des verjüngten Krümmungstensors zusammen:

$$(59)\quad \begin{cases} K_{11} = K_{1\cdot 12}^{\ 2} = \dfrac{\partial K_{\cdot 12}^2}{\partial x'}, \qquad K_{12} = -K_{1\cdot 12}^{\ 1} = -\dfrac{\partial K_{\cdot 12}^1}{\partial x'}, \\ K_{21} = K_{2\cdot 12}^{\ 2} = \dfrac{\partial K_{\cdot 12}^2}{\partial y'}, \qquad K_{22} = -K_{2\cdot 12}^{\ 1} = -\dfrac{\partial K_{\cdot 12}^1}{\partial y'}, \end{cases}$$

so daß

$$(59a)\quad \begin{cases} K_{1112} = -eK_{12} + fK_{11}, \qquad K_{1212} = -fK_{12} + gK_{11}, \\ K_{2112} = -eK_{22} + fK_{21}, \qquad K_{2212} = -fK_{22} + gK_{21}. \end{cases}$$

In (59) sind $K^1_{\cdot 12}$, $K^2_{\cdot 12}$ die beiden Komponenten des Grundtensors der Krümmung.

Die Gleichung (40) nimmt für $n = 2$ folgende einfache Gestalt an:

$$K^1_{\cdot 12} F_{x'} + K^2_{\cdot 12} F_{y'} = 0, \tag{60}$$

so daß gesetzt werden kann

$$\begin{cases} K^1_{\cdot 12} = -\mathfrak{K} F F_{y'} = -\mathfrak{K}(fx' + gy'), \\ K^2_{\cdot 12} = +\mathfrak{K} F F_{x'} = +\mathfrak{K}(ex' + fy'), \end{cases} \tag{61}$$

wo $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(x, y, x', y')$ einen Skalar bedeutet, der *in x', y' homogen von nullter Dimension* ist, den *Krümmungsskalar* oder die *Krümmung* des betrachteten zweidimensionalen allgemeinen Raumes[17]). Wegen (61), (57), (59) hat man:

$$\mathfrak{K} = \frac{K_{11} x'^2 + (K_{12} + K_{21}) x' y' + K_{22} y'^2}{e x'^2 + 2 f x' y' + g y'^2}. \tag{62}$$

Durch Differentiation von (61) nach x', y' erhält man wegen (59)

$$\begin{cases} K_{11} = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x'}(ex' + fy') + \mathfrak{K} e, \qquad K_{12} = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x'}(fx' + gy') + \mathfrak{K} f, \\ K_{21} = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial y'}(ex' + fy') + \mathfrak{K} f, \qquad K_{22} = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial y'}(fx' + gy') + \mathfrak{K} g. \end{cases} \tag{63}$$

Aus (63) und (59a) folgt für die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors

$$\begin{cases} K_{11\,12} = -(eg - f^2) y' \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x'}, \quad K_{12\,12} = +(eg - f^2)\left[x' \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x'} + \mathfrak{K}\right], \\ K_{21\,12} = -(eg - f^2)\left[y' \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial y'} + \mathfrak{K}\right], \quad K_{22\,12} = +(eg - f^2) x' \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial y'}. \end{cases} \tag{64}$$

Aus (63) und (64) ergibt sich noch

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2} \frac{e K_{22} - f(K_{12} + K_{21}) + g K_{11}}{eg - f^2} = \frac{1}{2} \frac{K_{12\,12} - K_{21\,12}}{eg - f^2} \tag{62a}$$

und

$$\mathfrak{K}^2 = \frac{K_{11} K_{22} - K_{12} K_{21}}{eg - f^2}. \tag{62b}$$

[17]) Eine geometrische Erklärung des Krümmungsskalars $\mathfrak{K}$ findet man bei P. Finsler, a. a. O.[1]), S. 103 ff.

(Zusatz bei der Korrektur). $\mathfrak{K}$ ist auch im Falle eines affin-zusammenhängenden allgemeinen Raumes in der Regel keine Ortsfunktion. *Die einzigen affin-zusammenhängenden zweidimensionalen allgemeinen Räume, für welche der Krümmungsskalar $\mathfrak{K}$ nur vom Orte abhängt, sind die zweidimensionalen (Riemannschen und) Minkowskischen Räume*, wie ohne Schwierigkeit aus (61) folgt.

Neben $\mathfrak{K}$ existiert noch ein zweiter Skalar $\mathfrak{A}$, welcher die *Asymmetrie des verjüngten Krümmungstensors* angibt:

$$(65)\qquad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\frac{K_{12}-K_{21}}{\sqrt{eg-f^2}} = -\frac{1}{2}\frac{eK_{2212}-f(K_{1212}+K_{2112})+gK_{1112}}{(eg-f^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieser Skalar ist nach (63) durch die Ableitungen von $\mathfrak{K}$ nach x' und y' ausdrückbar:

$$(65a)\qquad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{K}_{x'}F_{y'}-\mathfrak{K}_{y'}F_{x'}}{\sqrt{FF_1}}.$$

Umgekehrt hat man aus (65a) wegen

$$x'\mathfrak{K}_{x'}+y'\mathfrak{K}_{y'}=0:$$

$$(66)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_{x'} = \quad 2\mathfrak{A}y'\sqrt{\dfrac{F_1}{F}} = \quad \dfrac{K_{12}-K_{21}}{F^2}y', \\ \mathfrak{K}_{y'} = -2\mathfrak{A}x'\sqrt{\dfrac{F_1}{F}} = -\dfrac{K_{12}-K_{21}}{F^2}x'. \end{cases}$$

Hieraus folgt noch:

Der verjüngte Krümmungstensor eines zweidimensionalen allgemeinen Raumes ist dann und nur dann symmetrisch, wenn der Krümmungsskalar $\mathfrak{K}$ eine bloße Ortsfunktion ist. In diesem Falle sind die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors auch in den beiden ersten Zeigern symmetrisch, und der Zusammenhang zwischen den K_{ik} und $\mathfrak{K}$ ist der gleiche wie in der gewöhnlichen Flächentheorie.

22. Wir zeigen jetzt, *daß der Krümmungsskalar $\mathfrak{K}$ identisch ist mit der von A. L. Underhill*[5]) *eingeführten Invariante eines Variationsproblems einfachster Art in zwei Veränderlichen.* Dabei machen wir der Einfachheit halber wesentlich Gebrauch davon, daß der Bogen s unabhängige Veränderliche ist, während wir bisher alle Formeln so geschrieben haben, daß sie auch für eine beliebige zulässige unabhängige Veränderliche gültig bleiben.

Die Invariante von Underhill kann am einfachsten folgendermaßen gewonnen werden. Man setzt

$$(58b)\qquad T = F_{xy'} - F_{x'y} + F_1(x'y'' - y'x'').$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem ebenso bezeichneten in (58a). $T=0$ ist die Differentialgleichung der Extremalen des Variationsproblems $\delta s = 0$. Ferner führt man die Weierstraßsche Funktion F_2 ein, die am bequemsten durch eine der beiden Gleichungen erklärt wird:

$$(67)\qquad \begin{cases} y'F_2 = T_x + \dfrac{d}{ds}(y''F_1), \\ -x'F_2 = T_y - \dfrac{d}{ds}(x''F_1). \end{cases}$$

Hier und im folgenden sind wieder überall x, y, x', y' und gegebenenfalls auch x'', y'' usw. als Argumente zu denken. Striche bedeuten, wie bisher, Ableitung nach s; die zweiten und höheren Ableitungen nach s sind längs der Extremalen auszuführen, die vom Punkte (x, y) in der Richtung (x', y') ausgeht (also mit Berücksichtigung von $T = 0$). Mittels der Funktionen F_1, F_2 drückt sich, bei Benutzung des Bogens s als unabhängige Veränderliche, die Invariante $\mathfrak{U}$ von Underhill folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{4}\frac{F_1'^2}{F_1^2} - \frac{1}{2}\frac{F_1''}{F_1'} - \frac{F_2}{F_1}, \tag{68}$$

wobei die Striche wieder Differentiation nach s längs der angeführten Extremalen bedeuten.

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{U} = \mathfrak{K}$, bemerken wir zunächst, daß für s als unabhängige Veränderliche nach (55b)

$$F_1 = G$$

ist. Nach (42) ist also

$$F_1' = F_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\right), \tag{69}$$

und daher

$$F_1'' = F_1\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\right)^2 + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\right)\right\}. \tag{69a}$$

Setzen wir $\frac{T}{F_1} = \Gamma$ (Gleichung (58a)), so folgt bei Berücksichtigung von $T = 0$

$$\begin{cases} T_x = F_1 \cdot \Gamma_x, & T_y = F_1\Gamma_y; \\ \Gamma_x = x'\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - y'\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & \Gamma_y = x'\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - y'\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \end{cases} \tag{70}$$

und daher nach (67)

$$y' F_2 = F_1\left(\Gamma_x - \frac{d\psi}{ds}\right) - \psi F_1',$$

$$-x' F_2 = F_1\left(\Gamma_y - \frac{d\varphi}{ds}\right) + \varphi F_1'.$$

Hier ist z. B.

$$\Gamma_x - \frac{d\psi}{ds} = -y'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial y'}.$$

Setzt man noch für F_1' seinen Wert (69) ein und benutzt die Homogenitätseigenschaften von φ und ψ, so erhält man

$$F_2 = -F_1\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial\psi}{\partial y'} - \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\right\}. \tag{71}$$

Mit den gefundenen Werten von F_1', F_1'', F_2 ergibt sich für $\mathfrak{U}$ der Wert:

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{F^2}\left\{-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)^2 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y'}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x'\,\partial y'}\right)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\,\partial y'} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}\right)\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x'}\right)y' - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x'}\right)x'\right\}. \tag{68a}$$

In (68a) ist noch der Nenner $F^2(x, y, x', y')$, der Eins ist, hinzugefügt worden, um einen Ausdruck zu erhalten, der auch für eine beliebige zulässige unabhängige Veränderliche t gültig bleibt.

Der Ausdruck rechts in (68a) ist aber genau das, was man für den Krümmungsskalar $\mathfrak{K}$ erhält, wenn man z. B. beachtet, daß gemäß (61)

$$\mathfrak{K} = \frac{x' K^2_{\cdot 12} - y' K^1_{\cdot 12}}{F^2}$$

ist, für die $K^i_{\cdot kl}$ ihre Werte (18) einsetzt, und die Homogenitätseigenschaften von φ und ψ benutzt.

23. Auch bei Frl. E. Noether tritt a. a. O.[2]) eine Invariante auf, die für $n = 2$ etwa dem Krümmungsskalar entspricht, die „Grundfunktion" $[\Omega_2]$. Eine etwas längere Rechnung, die unterdrückt werden möge, gibt

$$[\Omega_2] = -\varepsilon^2 \mathfrak{K} v^2, \tag{72}$$

wo

$$\begin{aligned} \varepsilon v &= \sqrt{eg - f^2}\,(y'\delta x - x'\delta y) \\ &= \sqrt{F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y})}\;\; (\dot{y}\,\delta x - \dot{x}\,\delta y) \end{aligned} \tag{73}$$

gesetzt ist, und

$$\delta x = \varepsilon \xi, \qquad \delta y = \varepsilon \eta$$

Variationen bedeuten.

Die Veränderliche v geht auch in die schon in der Einleitung erwähnte Normalform für die zweite Variation des Grundintegrals s ein:

$$\delta^2 s = \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t} (\dot{v}^2 - \mathfrak{K} v^2)\, dt. \tag{74}$$

Herrn P. Funk verdanke ich die Bemerkung, daß auch die Jacobische Differentialgleichung bei Einführung von v als unabhängige Veränderliche die beachtenswerte Form

$$\ddot{v} + \mathfrak{K} v = 0 \tag{75}$$

annimmt. die etwa aus (74) abgeleitet werden kann. In (74) und (75) gehen nur die Werte ein, die $\mathfrak{K}$ längs der beim Studium der zweiten Variation betrachteten Extremalen annimmt.

Die *geometrische Bedeutung der Veränderlichen* v ist leicht anzugeben. Man braucht dazu nur zu bemerken, daß der Vektor mit den Komponenten

$$\left\{\begin{aligned} h &= -\frac{F_{\dot{y}}}{\sqrt{F^3 F_1}} = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\,\frac{f\dot{x} + g\dot{y}}{\sqrt{e\dot{x}^2 + 2f\dot{x}\dot{y} + g\dot{y}^2}}, \\ k &= -\frac{F_{\dot{x}}}{\sqrt{F^3 F_1}} = -\frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\,\frac{e\dot{x} + f\dot{y}}{\sqrt{e\dot{x}^2 + 2f\dot{x}\dot{y} + g\dot{y}^2}}, \end{aligned}\right. \tag{76}$$

wo rechts überall die Argumente $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ stehen und die Wurzeln positiv zu nehmen sind, transversal steht zum Linienelemente $(x, y; \dot{x}dt, \dot{y}dt)$ der Kurve $[x = x(t), y = y(t)]$ und in bezug auf dieses Linienelement die Länge Eins hat:

$$e(x, \dot{x})h^2 + 2f(x, \dot{x})hk + g(x, \dot{x})k^2 = 1. \tag{77}$$

Er ist also als *Einheitsvektor in der Richtung der Transversalen* anzusehen [18]).

Es seien nun ξ, η die Komponenten eines beliebigen Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y) der Kurve $[x(t), y(t)]$. *Dann bedeutet v die Länge der Projektion des Vektors (ξ, η) auf den Transversaleinheitsvektor (h, k) in bezug auf das Linienelement dieser Kurve*:

$$v = l\cos\omega. \tag{78}$$

Steht insbesondere der Vektor (ξ, η) selbst transversal zum Linienelemente der vorliegenden Kurve, so ist v die Länge des Vektors (ξ, η) in bezug auf dieses Linienelement.

In (78) bedeutet l die Länge des Vektors (ξ, η), ω den Winkel der beiden Vektoren (ξ, η) und (h, k) in bezug auf das Linienelement $(\dot{x}dt, \dot{y}dt)$ im Punkt (x, y). Um (78) zu verifizieren, setze man an

$$\xi = vh + w\dot{x}, \qquad \eta = vk + w\dot{y}$$

und beachte, daß der Vektor (h, k) zum Vektor $(\dot{x}, \dot{y})$ im Punkte (x, y) transversal steht.

24. Wir berechnen für einen zweidimensionalen allgemeinen Raum schließlich noch die Komponenten des Tensors der *Streckenkrümmung* (§ 4) und stellen die Bedingungen für sein identisches Verschwinden auf.

Die Komponenten e, f, g des Fundamentaltensors sind die zweiten partiellen Ableitungen von F^2 nach x' und y' und als solche in den x', y' homogen von nullter Dimension. Hieraus ergibt sich leicht

$$\frac{\partial e}{\partial x'} = -\lambda y'^3, \quad \frac{\partial e}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x'} = \lambda x' y'^2, \tag{79}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial g}{\partial x'} = -\lambda x'^2 y', \quad \frac{\partial g}{\partial y'} = \lambda x'^3,$$

wo

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial F_1}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial F_1}{\partial x'} \tag{79a}$$

[18]) Der Vektor (h, k), oder vielmehr der entgegengesetzte, tritt schon auf bei P. Funk, Über den Begriff „extremale Krümmung" und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse. Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 87–92.

ist, wie man durch direkte Berechnung, z. B. von $\frac{\partial e}{\partial x'}$ aus (57) findet. Man hat auch

$$(80)\qquad \begin{cases} \lambda \cdot x' = \dfrac{1}{F^2}\dfrac{\partial (F_1 F^3)}{\partial y'} = \dfrac{1}{F^2}\dfrac{\partial (eg-f^2)}{\partial y'}, \\ \lambda \cdot y' = -\dfrac{1}{F^2}\dfrac{\partial (F_1 F^3)}{\partial x'} = -\dfrac{1}{F^2}\dfrac{\partial (eg-f^2)}{\partial x'}. \end{cases}$$

Wenn man die Werte (79), ferner die Werte (61) für die Komponenten des Grundtensors der Krümmung, endlich die Werte (64) für die Komponenten des Krümmungstensors in die für $n=2$ spezialisierten Ausdrücke (54) für die Komponenten S_{iklm} des Tensors der Streckenkrümmung einträgt, so findet man bei Benutzung der Homogenität nullter Dimension des Krümmungsskalars $\mathfrak{K}$ in x', y' und der Gleichungen (80):

$$(81)\quad S_{1112} = AF^2 y', \quad S_{1212} = -AF^2 x' = +BF^2 y', \quad S_{2212} = -BF^2 x'$$

mit

$$(81a)\quad A = -2\sqrt{\frac{F_1}{F}}\,\frac{\partial (\mathfrak{K}\sqrt{F_1 F^3})}{\partial x'}, \quad B = -2\sqrt{\frac{F_1}{F}}\,\frac{\partial (\mathfrak{K}\sqrt{F_1 F^3})}{\partial y'}.$$

Im Falle $n=2$ existiert auch ein *Skalar der Streckenkrümmung*:

$$(82)\quad \mathfrak{S}(x, y, x', y') = -\frac{1}{4\sqrt{eg-f^2}}\left\{S_{1112}h^2 + 2S_{1212}hk + S_{2212}k^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{2F^3 F_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial (\mathfrak{K}\sqrt{F_1 F^3})}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial (\mathfrak{K}\sqrt{F_1 F^3})}{\partial x'}\right\}.$$

Hierin sind h, k die durch (76) erklärten Ausdrücke.

Aus (81) oder (82) folgt:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein zweidimensionaler allgemeiner Raum keine Streckenkrümmung besitzt, besteht darin, daß $\mathfrak{K}\cdot\sqrt{F_1 F^3}$ *eine Ortsfunktion ist. Diese Bedingung ist insbesondere für jeden affin-zusammenhängenden* (Nr. 7) *zweidimensionalen allgemeinen Raum erfüllt,* wie aus (62b) hervorgeht.

Nach (79) und (80) sind die Riemannschen zweidimensionalen Räume dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen $\sqrt{F_1 F^3}$ eine Ortsfunktion ist. *Ein zweidimensionaler allgemeiner Raum (der kein Riemannscher ist und), dessen Krümmungsskalar* $\mathfrak{K}$ *nur vom Orte abhängt, besitzt also dann und nur dann keine Streckenkrümmung, wenn* $\mathfrak{K}$ *identisch Null ist.*

Aus dem weiter oben ausgesprochenen Satze folgt unschwer, *daß die zweidimensionalen allgemeinen Räume, in denen eine (nur vom Orte ab-*

hängige) Feldkrümmung im Sinne von G. Landsberg[18a]) *existiert, keine Streckenkrümmung haben.* Der Nachweis hierfür soll an anderer Stelle erbracht werden.

Ein Beispiel für zweidimensionale allgemeine Räume ohne Streckenkrümmung bieten die a. a. O. von Landsberg betrachteten Räume mit der Grundfunktion:

$$F(x, y, x', y') = [L_0(x, y)\cdot x' + M_0(x, y)\cdot y']^{r_0} \cdot [L_1(x, y)\cdot x' + M_1(x, y)\, y']^{r_1}, \qquad (r_0 + r_1 = 1).$$

Diese Räume sind affin-zusammenhängend.

§ 6.

Über die Krümmungsinvarianten eines allgemeinen Raumes von mehr als zwei Dimensionen.

25. Während wir die Krümmungseigenschaften eines zweidimensionalen allgemeinen Raumes ausführlicher untersucht haben, beschränken wir uns im Falle von mehr als zwei Dimensionen auf die Skizzierung der Grundlinien. Wir führen zunächst die wichtigsten invarianten Bildungen ein und erörtern sodann ihre geometrische Bedeutung.

An erster Stelle erklären wir eine Invariante, die von einem Linienelemente (dx) und einer Flächenrichtung durch dieses Linienelement abhängt, und in gewissem Sinn als Verallgemeinerung des Riemannschen Krümmungsmaßes eines Riemannschen Raumes angesehen werden kann. *Wir definieren nämlich als das Krümmungsmaß* $\mathfrak{R}(x, dx, \delta x)$ *eines allgemeinen Raumes von mehr als zwei Dimensionen im Punkte* (x) *nach dem Linienelement* (dx)[19]) *und der Flächenrichtung* $(dx, \delta x)$ *durch dieses Linienelement die Invariante*

$$(83)\quad \mathfrak{R}(x, dx, \delta x) = \frac{K_{iklm}(x, dx)\, dx^i\, dx^l\, \delta x^k\, \delta x^m}{[g_{il}(x, dx)\, g_{km}(x, dx) - g_{im}(x, dx)\, g_{lk}(x, dx)]\, dx^i\, dx^l\, \delta x^k\, \delta x^m}$$

$\mathfrak{R}(x, dx, \delta x)$ bleibt, wie leicht zu sehen ist, ungeändert, wenn man (δx) durch irgendein Linienelement $(\lambda\, dx + \mu\, \delta x)$ des durch (dx) und (δx) bestimmten Büschels ersetzt, das mit (dx) weder gleich noch entgegengesetzt gerichtet ist.

Der Zähler des Krümmungsmaßes $\mathfrak{R}(x, dx, \delta x)$ läßt sich auch so

[18a]) G. Landsberg, Über die Krümmung in der Variationsrechnung. Math. Annalen **65** (1908), S. 313–349.

[19]) Das Linienelement (dx) ist hier ein willkürliches Linienelement im Punkte (x), ebenso wie (δx). (dx) ist vor (δx) nur insofern ausgezeichnet, als seine Komponenten in die Tensoren K_{iklm} und g_{ik} eingehen.

umformen, daß außerhalb von $K_{iklm}(x.\,dx)$ die dx und δx ihre Plätze wechseln. Es ist nämlich

$$K_{iklm}\,dx^i = g_{kp}\,K^p_{i\cdot lm}\cdot dx^i = g_{kp}\,K^p_{\cdot lm} = K_{klm},$$

und weiter, nach (40b)

$$K_{klm} = -\,K_{kplm}\,dx^p = K_{kpml}\,dx^p.$$

Man hat also, wenn man wieder die Argumente x, dx ausdrücklich schreibt, nach Veränderung einiger Zeiger

$$K_{iklm}(x, dx)\,dx^i = K_{ikml}(x, dx)\,dx^k \tag{84}$$

und daher

$$K_{iklm}(x, dx)\,dx^i\,dx^l\,\delta x^k\,\delta x^m = K_{iklm}(x, dx)\,dx^k\,dx^m\,\delta x^i\,\delta x^l. \tag{85}$$

Den Ausdruck links in (85) kann man auch in der Form

$$K_{klm}(x, dx)\,dx^l\,\delta x^k\,\delta x^m$$

schreiben.

Der Nenner von $\mathfrak{R}(x, dx, \delta x)$ ist, wie man leicht sieht, gleich dem Produkte der Quadrate der Längen von (dx) und (δx) und des Quadrates des Sinus ihres Winkels in bezug auf das Linienelement (dx). *Definiert man also als Inhalt Δ des von den Linienelementen (dx) und (δx) aufgespannten Parallelogramms in bezug auf das Linienelement (dx) das Produkt aus den Längen ds und $\delta\sigma$ der beiden Linienelemente und dem Sinus ihres Winkels ω in bezug auf das Linienelement (dx), so ist*

$$[g_{il}(x, dx)\,g_{km}(x, dx) - g_{im}(x, dx)\,g_{lk}(x, dx)]\,dx^i\,dx^l\,\delta x^k\,\delta x^m = \Delta^2. \tag{86}$$

26. Wir gehen nunmehr zu den Tensoren über, die durch Verjüngung aus dem Grundtensor der Krümmung und dem Krümmungstensor entstehen. Es sind dies der *verjüngte Grundtensor der Krümmung* mit den Komponenten:

$$K_l(x, dx) = K^i_{\cdot li}(x, dx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi^i(x, dx)}{\partial x^i\,\partial dx^l} - \frac{\partial^2\varphi^i(x, dx)}{dx^l\,\partial dx^i}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi^i(x, dx)}{\partial dx^i\,\partial dx^r}\,\frac{\partial\varphi^r(x, dx)}{\partial dx^l} - \frac{\partial^2\varphi^i(x, dx)}{\partial dx^l\,\partial dx^r}\,\frac{\partial\varphi^r(x, dx)}{\partial dx^i}\right), \tag{87}$$

der *verjüngte Krümmungstensor* mit den Komponenten:

$$K_{kl}(x, dx) = K^i_{k\cdot li}(x, dx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\varphi^i(x, dx)}{\partial x^i\,\partial dx^k\,\partial dx^l} - \frac{\partial^3\varphi^i(x, dx)}{\partial x^l\,\partial dx^k\,\partial dx^i}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi^r(x, dx)}{\partial dx^k\,\partial dx^l}\,\frac{\partial^2\varphi^i(x, dx)}{\partial dx^r\,\partial dx^i} - \frac{\partial^2\varphi^r(x, dx)}{\partial dx^k\,\partial dx^i}\,\frac{\partial^2\varphi^i(x, dx)}{\partial dx^r\,\partial dx^l} + \frac{\partial^3\varphi^i(x, dx)}{\partial dx^i\,\partial dx^k\,\partial dx^r}\,\frac{\partial\varphi^r(x, dx)}{\partial dx^l} - \frac{\partial^3\varphi^i(x, dx)}{\partial dx^k\,\partial dx^l\,\partial dx^r}\,\frac{\partial\varphi^r(x, dx)}{\partial dx^i}\right), \tag{88}$$

und der Skalar

$$(89)\quad K(x,dx)=K_{kl}(x,dx)\,dx^k dx^l=K_l(x,dx)\,dx^l$$
$$=\frac{\partial\varphi^i(x,dx)}{\partial x^i}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^i(x,dx)}{\partial x^l\,\partial dx^i}dx^l+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^i(x,dx)}{\partial dx^i\,\partial dx^r}\varphi^r(x,dx)$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi^i(x,dx)}{\partial dx^r}\frac{\partial\varphi^r(x,dx)}{\partial dx^i}.$$

Aus (87) und (88) oder auch aus (18), (19), (19a) folgen die Beziehungen

$$(90)\quad \left\{\begin{array}{ll} & \text{a)}\ K_l(x,dx)=K_{kl}(x,dx)\,dx^k,\\ \text{b)}\ K_{kl}(x,dx)=\dfrac{\partial K_l(x,dx)}{\partial dx^k}, & \text{c)}\ \dfrac{\partial K_{kl}(x,dx)}{\partial dx^m}dx^k=0.\end{array}\right.$$

Die zyklische Symmetrie der Komponenten des Krümmungstensors in den unteren Zeigern gibt

$$K^i_{l\cdot ik}+K^i_{k\cdot li}+K^i_{i\cdot kl}=0$$

und hieraus folgt wegen (88) und der schiefen Symmetrie der Komponenten des Krümmungstensors in den letzten beiden Zeigern

$$(91)\qquad K_{kl}(x,dx)-K_{lk}(x,dx)=K^i_{i\cdot lk}(x,dx)=\frac{K^i_{\cdot lk}(x,dx)}{\partial dx^i}.$$

Somit ist der verjüngte Krümmungstensor dann und nur dann symmetrisch, wenn

$$(92)\qquad \frac{\partial K^i_{\cdot lk}(x,dx)}{\partial dx^i}=0.$$

In diesem Falle ergibt eine leichte Rechnung bei der (89), (90), (92) zu benutzen sind:

$$(92a)\quad K_l(x,dx)=\frac{1}{2}\frac{\partial K(x,dx)}{\partial dx^l},\qquad K_{kl}(x,dx)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 K(x,dx)}{\partial dx^k\,\partial dx^l}.$$

27. Aus den im vorigen Abschnitte eingeführten Tensoren bilden wir die Invariante

$$(93)\qquad \mathfrak{R}(x,dx)=\frac{1}{n-1}\frac{K_{ik}(x,dx)\,dx^i\,dx^k}{g_{ik}(x,dx)\,dx^i\,dx^k}=\frac{1}{n-1}\frac{K(x,dx)}{[F(x,dx)]^2},$$

die *Richtungsinvariante der Krümmung* nach der Richtung des Linienelementes (dx) im Punkte (x).[20])

Analog wie die entsprechende Invariante in einem Riemannschen Raum kann $\mathfrak{R}(x,dx)$ erklärt werden als der *Mittelwert aus den Werten des Krümmungsmaßes* $\mathfrak{R}(x,dx,\delta x)$ *im Punkte* (x) *nach dem Linienelement* (dx) *und* $n-1$ *in bezug auf das Linienelement* (dx) *paarweise*

[20]) Für $n=2$ reduzieren sich sowohl $\mathfrak{R}(x,dx,\delta x)$ als auch $\mathfrak{R}(x,dx)$ auf den Krümmungsskalar $\mathfrak{K}$ (Nr. 21). Der Vektor $K_l(x,dx)$ hat für $n=2$ die Komponenten $\mathfrak{K}FF_{dx}$, $\mathfrak{K}FF_{dy}$.

orthogonalen Flächenrichtungen durch dieses Linienelement. Dabei verstehen wir unter zwei in bezug auf das Linienelement (dx) orthogonalen Flächenrichtungen $(dx, \delta x_{(i)})$, $(dx, \delta x_{(k)})$ durch das Linienelement (dx) im Punkte (x) die beiden Flächenrichtungen durch das Linienelement (dx) und die zum Linienelement (dx) transversalen und untereinander in bezug auf das Linienelement (dx) orthogonalen Linienelemente $(\delta x_{(i)})$ und $(\delta x_{(k)})$ im Punkte (x).

Die gegebene Erklärung von $\mathfrak{R}(x, dx)$ beruht darauf, daß die Summe der Werte von $\frac{b_{ik}\,\delta x^i\,\delta x^k}{a_{ik}\,\delta x^i\,\delta x^k}$ für n Linienelemente $(\delta x_{(1)})$, $(\delta x_{(2)})$, $\ldots$, $(\delta x_{(n)})$, die den Bedingungen

$$a_{ik}\,\delta x^i_{(p)}\,\delta x^k_{(q)} = 0 \qquad (p \neq q),\ \neq 0\ (p = q);\ (p, q = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, gleich $a^{ik}b_{ik}$ ist. Dabei ist $a_{ik}\,\delta x^i\,\delta x^k$ eine positiv-definite Form der δx^i, und a^{ik} das reziproke System der a_{ik}. Im vorliegenden Falle hat man

$$a_{ik} = g_{ik}(x, dx), \qquad b_{ik} = K_{limk}(x, dx)\,dx^l\,dx^m,$$

und $(\delta x_{(n)}) = (dx)$, also

$$b_{ik}\,\delta_{(n)}x^i\,\delta_{(n)}x^k = K_{limk}(x, dx)\,dx^l\,dx^i\,dx^m\,dx^k = 0.$$

28. Für das Krümmungsmaß $\mathfrak{R}(x, dx, \delta x)$ selbst haben wir bisher noch keine geometrische Erklärung gegeben. Wir wollen jetzt zeigen, daß die Definition des Riemannschen Krümmungsmaßes eines n-dimensionalen Riemannschen Raumes mittels eines „Parallelogrammoides", die von Herrn T. Levi-Civita herrührt[21]), sich mit nur unwesentlichen Änderungen auf allgemeine Räume übertragen läßt.

Wir ordnen zunächst wieder jedem Punkte des allgemeinen Raumes ein Linienelement als ausgezeichnetes Linienelement (Nr. 4) zu. In einem willkürlichen Punkte (x) des allgemeinen Raumes sei (ξ) der Vektor, der die Richtung des ausgezeichneten Linienelementes (dx) von (x) und die Länge Eins in bezug auf dieses Linienelement hat. Wenn wir den Vektor (ξ) beständig parallel in sich verschieben, so beschreibt sein Anfangspunkt eine vom Punkte (x) ausgehende Extremale $(\mathfrak{E})$ des Variationsproblems $\delta s = 0$. Die Koordinaten eines willkürlichen Punktes (y) der Extremalen $(\mathfrak{E})$ werden

$$(94) \qquad y^i = x^i + \xi^i s - \frac{1}{2}\varphi^i(x, \xi)\,s^2 + \frac{1}{6}\left[\frac{\partial \varphi^i(x, \xi)}{\partial \xi^l}\,\varphi^l(x, \xi) - \frac{\partial \varphi^i(x, \xi)}{\partial x^l}\,\xi^l\right] s^3 + [s^4].$$

[21]) T. Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana. Palermo Rend. 42 (1917), S. 173–205, bes. § 17 f.

In (94) ist s der Bogen der Extremalen. $[s^4]$ bezeichnet Glieder, die den Faktor s^4 haben.

Weiter nehmen wir im Punkte (x) ein willkürliches Linienelement (δx) an, das weder die Richtung des ausgezeichneten Linienelementes (dx) noch die entgegengesetzte hat. (η) sei der Vektor im Punkte (x), der die Richtung des Linienelementes (δx) und die Länge Eins in bezug auf dieses Linienelement hat. Wir verschieben den Vektor (η) beständig parallel in sich. Sein Anfangspunkt beschreibt dann eine Kurve $(\mathfrak{Q})$, die gleichfalls vom Punkte (x) ausgeht. Für die Koordinaten eines willkürlichen Punktes (z) der Kurve $(\mathfrak{Q})$ ergibt sich

$$(95) \qquad z^i = x^i + \eta^i t - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \varphi^i(x,\xi)}{\partial \xi^k\, \partial \xi^l}\eta^k \eta^l t^2 + [t^3],$$

wobei $[t^3]$ für Glieder steht, die den Faktor t^3 haben[22]).

Wenn wir anderseits den Vektor (η) vom Punkte (x) längs der Extremalen $(\mathfrak{E})$ nach dem Punkte (y) parallel übertragen, so erhalten wir im Punkte (y) den Vektor (ζ) mit den Komponenten

$$(96) \qquad \zeta^i = \eta^i - \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi^i(x,\xi)}{\partial \xi^k}\eta^k s + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\frac{\partial \varphi^i(x,\xi)}{\partial \xi^p}\frac{\partial \varphi^p(x,\xi)}{\partial \xi^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi^i(x,\xi)}{\partial \xi^k\, \partial \xi^p}\varphi^p(x,\xi) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi^i(x,\xi)}{\partial x^p\, \partial \xi^k}\xi^p\right]\eta^k s^2 + [s^3].$$

Hier bezeichnet $[s^3]$ Glieder, die den Faktor s^3 haben.

Endlich verschieben wir noch den Vektor (ζ) parallel in sich selbst. Sein Anfangspunkt beschreibt dann eine Kurve $(\mathfrak{Q}_1)$

$$(97) \qquad w^i = y^i + \zeta^i t - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \varphi^i(y,y')}{\partial y'^k\, \partial y'^l}\zeta^k \zeta^l t^2 + [t^3].$$

Wir denken uns w^i nach Potenzen von s entwickelt und erhalten

$$(98) \qquad w^i = a^i + b^i s + \frac{1}{2}c^i s^2 + \frac{1}{6}d^i s^3 + [s^4],$$

wo

$$(99) \qquad \begin{cases} a^i = x^i + \eta^i t - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 \varphi^i(x,\xi)}{\partial \xi^k\, \partial \xi^l}\eta^k \eta^l t^2 + [t^3], \\ b^i = \xi^i - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varphi^i(x,\xi)}{\partial \xi^k}\eta^k t + \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\partial^2 \varphi^i(x,\xi)}{\partial \xi^p\, \partial \xi^l}\dfrac{\partial \varphi^p(x,\xi)}{\partial \xi^k} - \dfrac{\partial^3 \varphi^i(x,\xi)}{\partial x^p\, \partial \xi^k\, \partial \xi^l}\xi^p + \dfrac{\partial^3 \varphi^i(x,\xi)}{\partial \xi^p\, \partial \xi^k\, \partial \xi^l}\varphi^p(x,\xi)\right]\eta^k \eta^l t^2 + [t^3], \end{cases}$$

[22]) t ist von dem Bogen σ der Kurve (95) verschieden. Man hat $\sigma = t + [t^2]$, wo $[t^2]$ Glieder bezeichnet, die den Faktor t^2 besitzen.

$$(99)\quad \begin{cases} c^i = & -\varphi^i(x,\xi) + \left[\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi^i(x,\xi)}{\partial\xi^p}\frac{\partial\varphi^p(x,\xi)}{\partial\xi^k}\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^i(x,\xi)}{\partial\xi^k\partial\xi^p}\varphi^p(x,\xi) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^i(x,\xi)}{\partial\xi^k\partial x^p}\xi^p\right]\eta^k t + [t^2], \\ d^i = & \left[\frac{\partial\varphi^i(x,\xi)}{\partial\xi^l}\varphi^l(x,\xi) - \frac{\partial\varphi^i(x,\xi)}{\partial x^l}\xi^l\right] + [t]. \end{cases}$$

In (99) ist die Entwicklung überall so weit getrieben, wie es für das Folgende notwendig ist.

Wenn wir in (98) s und t als unabhängige Veränderliche auffassen, so ist (98) die Parameterdarstellung einer Fläche $\mathfrak{F}_2$.

Nunmehr geben wir jeder der Veränderlichen s und t einen hinreichend kleinen Wert S bzw. T, den wir zunächst festgehalten denken. Die Punkte

$$(0,0), \quad (S,0), \quad (0,T), \quad (S,T)$$

der Fläche $\mathfrak{F}_2$, die wir so erhalten, bezeichnen wir mit

$$(X), \quad (Y), \quad (Z), \quad (W).$$

[Der Punkt (X) ist identisch mit dem bisher (x) genannten Punkte.] Wir verbinden (Z) und (W) durch die Kurve $t = T$. Das Viereck auf der Fläche $\mathfrak{F}_2$, dessen Ecken die Punkte (X), (Y), (Z), (W) sind und dessen Seiten den Kurven

$$s = 0, \quad t = 0, \quad s = S, \quad t = T$$

angehören, nennen wir das *Parallelogrammoid* (X, Y, Z, W), die Seite (X, Y) die *Basis*, die Seite (Z, W) die *Suprabasis* des Parallelogrammoides. S ist die Länge des Bogens der Extremalen $t = 0$ vom Punkte (X) bis zum Punkte (Y), also die Länge der Basis. Die Länge des Bogens der Kurve $t = T$ vom Punkte (Z) bis zum Punkte (W) oder die Länge der Suprabasis nennen wir Σ.

Wir berechnen jetzt die Differenz $S^2 - \Sigma^2$. Für Σ haben wir den Wert

$$(100)\qquad \Sigma = \int_0^S F(\bar{w}, \bar{w}')\, ds.$$

$(\bar{w})$ bedeutet darin einen beliebigen Punkt der Kurve $t = T$, $(\bar{w}')$ den Vektor $\left(\frac{d\bar{w}}{ds}\right)$. Die Koordinaten $\bar{w}^i$ von $(\bar{w})$ sind

$$(101)\qquad \bar{w}^i = \bar{a}^i + \bar{b}^i s + \frac{1}{2}\bar{c}^i s^2 + \frac{1}{6}\bar{d}^i s^3 + [s^4],$$

wo $\bar{a}^i$, $\bar{b}^i$, $\bar{c}^i$, $\bar{d}^i$ bezüglich diejenigen Ausdrücke bezeichnen, die aus a^i, b^i, c^i, d^i hervorgehen, wenn in (99) $t = T$ gesetzt wird.

Setzen wir

$$F(w, w') = \Phi(s) = \Phi(0) + \Phi'(0)\,s + \frac{1}{2}\Phi''(0)\,s^2 + [s^3], \tag{102}$$

so wird

$$\Sigma = \Phi(0)\,S + \frac{1}{2}\Phi'(0)\,S^2 + \frac{1}{6}\Phi''(0)\,S^3 + [S^4], \tag{103}$$

und daher

$$\Sigma^2 = [\Phi(0)]^2 \cdot S^2 + \Phi(0)\,\Phi'(0)\,S^3 + \left[\frac{1}{4}\Phi'(0)^2 + \frac{1}{3}\Phi(0)\,\Phi''(0)\right] S^4 + [S^5]. \tag{104}$$

In (104) ist

$$\left\{\begin{aligned}
\Phi(0) &= [F(\bar w, \bar w')]_{s=0} = F(\bar a, \bar b),\\
\Phi'(0) &= \left[\frac{\partial F(w, \bar w')}{\partial w^i}\, w'^i + \frac{\partial F(\bar w, \bar w')}{\partial w'^i}\, w''^i\right]_{s=0} = \frac{\partial F(\bar a, b)}{\partial \bar a^i}\, b^i + \frac{\partial F(\bar a, \bar b)}{\partial b^i}\, c\\
\Phi''(0) &= \left[\frac{\partial^2 F(w, w')}{\partial \bar w^i\, \partial w^k}\, w'^i\, w'^k + 2\,\frac{\partial^2 F(\bar w, \bar w')}{\partial \bar w^i\, \partial \bar w'^k}\, \bar w'^i\, \bar w''^k + \frac{\partial^2 F(w, w')}{\partial w'^i\, \partial w'^k}\, w''^i\, w'^k\right.\\
&\qquad \left. + \frac{\partial F(\bar w, \bar w')}{\partial \bar w^i}\, \bar w''^i + \frac{\partial F(w, \bar w')}{\partial \bar w'^i}\, \bar w'''^i\right]_{s=0}\\
&= \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial \bar a^i\, \partial \bar a^k}\, \bar b^i\, \bar b^k + 2\,\frac{\partial^2 F(a, \bar b)}{\partial \bar a^i\, \partial \bar b^k}\, \bar b^i\, \bar c^k + \frac{\partial^2 F(\bar a, b)}{\partial \bar b^i\, \partial \bar b^k}\, \bar c^i\, c^k\\
&\qquad + \frac{\partial F(\bar a, \bar b)}{\partial \bar a^i}\, \bar c^i + \frac{\partial F(\bar a, \bar b)}{\partial \bar b^i}\, \bar d^i.
\end{aligned}\right. \tag{105}$$

Wir entwickeln nun in (104) alle Glieder bis zur vierten Ordnung (Gesamtordnung in S und T), diese eingeschlossen. Dazu ist zu entwickeln (immer mit Einschluß der angegebenen Potenz von T): $\Phi(0)^2$ bis zur zweiten Potenz von T, $\Phi(0)\cdot\Phi'(0)$ bis zur ersten, $\frac{1}{4}\Phi'(0)^2 + \frac{1}{3}\Phi(0)\,\Phi''(0)$ bis zur nullten Potenz von T. Diese etwas umständlichen Entwicklungen seien unterdrückt und nur ihr Resultat angegeben. Man erhält

$$\left\{\begin{aligned}
\Phi(0)^2 &= F^2(x, \xi) + K_{kmqi}(x, \xi)\,\xi^m\,\xi^q\,\eta^i\,\eta^k\,T^2 + [T^3]\\
&= 1 + K_{kmqi}(x, \xi)\,\xi^m\,\xi^q\,\eta^i\,\eta^k\,T^2 + [T^3],\\
\Phi(0)\,\Phi'(0) &= g_{ip}(x, \xi)\,K_{r.qk}^{\ \ i}(x, \xi)\,\xi^p\,\xi^q\,\xi^r\,\eta^k\,T + [T^2]\\
&= K_{pqk}(x, \xi)\,\xi^p\,\xi^q\,\eta^k \cdot T + [T^2] = [T^2] \quad [\text{vgl. (40a)}],\\
\frac{1}{4}\Phi'(0)^2 + \frac{1}{3}\Phi(0)\,\Phi''(0) &= [T].
\end{aligned}\right. \tag{106}$$

Gehen wir mit diesen Werten in (104) hinein, so erhalten wir schließlich

$$S^2 - \Sigma^2 = K_{kmiq}(x, \xi)\,\xi^m \xi^q \eta^i \eta^k S^2 T^2 + [5], \tag{107}$$

wo [5] Glieder bedeutet, die von der Gesamtordnung fünf in S und T sind.

Für hinreichend kleine S und T kann anderseits das Quadrat des Inhaltes $J(X, Y, Z, W)$ des Parallelogrammoides (X, Y, Z, W) in bezug auf das Linienelement $(dx) = (\xi\, ds)$ im Punkte $(X) = (x)$ als gegeben durch

$$[J(X, Y, Z, W)]^2 \tag{108}$$

$$= [g_{il}(x, \xi)\, g_{km}(x, \xi) - g_{im}(x, \xi)\, g_{lk}(x, \xi)]\, \xi^i \xi^l \eta^k \eta^m S^2 T^2 + [5]$$

angesehen werden. Wenn nun S und T beide unabhängig voneinander gegen Null konvergieren, nur so, daß ihr Verhältnis endlich bleibt, so ergibt sich leicht

$$\lim_{\substack{S \to 0 \\ T \to 0}} \frac{S^2 - \Sigma^2}{[J(X, Y, Z, W)]^2} = \Re(x, dx, \delta x), \tag{109}$$

wo wieder $(dx) = (\xi\, ds)$, $(\delta x) = (\eta\, dt)$ ist.

Dieses Ergebnis kann etwa folgendermaßen formuliert werden:

Wenn man in einem n-dimensionalen allgemeinen Raum ein infinitesimales Parallelogrammoid (X, Y, Z, W) konstruiert, so ist das Verhältnis

$$\frac{\overrightarrow{X, Y}^2 - \overrightarrow{Z, W}^2}{(ds \cdot \delta\sigma \cdot \sin\omega)^2} \tag{110}$$

der Differenz der quadrierten Längen der Basis und Suprabasis zum quadrierten Flächeninhalt des Parallelogrammoides in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement $(dx) = (X, Y)$ des Punktes (X) gleich dem Krümmungsmaß des Raumes im Punkte (X) nach dem Linienelement $(dx) = (X, Y)$ und der Flächenrichtung des Parallelogrammoides.

Prag, im April 1925.

(Eingegangen am 16. April 1925.)

Invarianten bei der Variation der Integrale, deren Integranden höhere Ableitungen enthalten.

Von

L. Koschmieder in Breslau.

Herrn Friedrich Schur zum siebzigsten Geburtstage.

In zwei früheren Arbeiten[1][2]) habe ich mich mit Invarianten beschäftigt, die von der Variation eines n-fachen Integrales herrühren, dessen Integrand außer den unbekannten Funktionen x_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ nur deren *erste* Ableitungen $\partial x_i / \partial u_\alpha$[3]) nach den unabhängigen Veränderlichen u_α enthält. Ich will hier die Untersuchung auf Integrale ausdehnen, in deren Integranden auch *höhere* Ableitungen der Unbekannten

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_{\alpha_1} \partial u_{\alpha_2}} = x_{i.\,\alpha_1 \alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^q x_i}{\partial u_{\alpha_1} \partial u_{\alpha_2} \ldots \partial u_{\alpha_q}} = x_{i.\,\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q}$$

auftreten. Bei der Behandlung eines solchen n-fachen Integrales

$$(1) \qquad J = \int^{(n)} F(x_i, x_{i.\,\alpha_1}, \ldots, x_{i.\,\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q})\, du_1\, du_2 \ldots du_n$$

— kurz $J = \int^{(n)} F\, du$, $du = du_1\, du_2 \ldots du_n$ —, dessen Integrand F alle bei den folgenden Rechnungen erforderlichen Eigenschaften besitze, lassen sich die a. a. O.[1]) benutzten Begriffe und Bezeichnungen größtenteils übernehmen. So überträgt sich auf den vorliegenden Fall der Begriff der Invarianz einer Funktion f gegenüber Punkttransformationen[4]) mit der positiven Funktionaldeterminante D, sowie gegenüber Parametertransformationen[4]) mit der positiven Funktionaldeterminante $\mathfrak{D}$; die Bezeichnungen f', $\bar{f}$ gebrauchen wir dabei in dem a. a. O.[4]) erläuterten Sinne.

---

[1]) Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 181—190.

[2]) Math. Annalen 94 (1925), S. 252—261.

[3]) Lateinische Zeiger laufen von 1 bis $n+1$, griechische von 1 bis n.

[4]) A. a. O.[1]), S. 182.

Das Integral (1) wird als parameter-invariant angenommen, also vorausgesetzt, daß die Funktion F eine Parameterinvariante vom Gewichte 1 sei,

$$(\bar{2}) \qquad F = F(x_i, x_{i,\bar{a}_1}, \ldots, x_{i,\bar{a}_1\bar{a}_2\ldots\bar{a}_q}) = \mathfrak{D}\, F(x_i, x_{i,a_1}, \ldots, x_{i,a_1a_2\ldots a_q}).$$ [5])

Indem wir $dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n+1} = dx$ setzen, so daß $dx = D\, dx'$ ist, bemerken wir, daß eine absolute Parameterinvariante G, die zugleich Punktinvariante vom Gewichte 1 ist, zu einer Integralinvariante im $(n+1)$-stufigen Raume der x_i

$$(3) \qquad K = \int^{(n+1)} G\, dx$$

Anlaß gibt. Wir berechnen dabei die Größen $x_{i,a_1}, x_{i,a_1a_2}, \ldots$, von denen G im allgemeinen abhängt [6]), aus dem Ansatze

$$(4) \qquad x_i = \omega_i(u_1, u_2, \ldots, u_n; a);$$

dieser bestimme eine solche einfach unendliche Schar n-stufiger Räume X_n [7]), daß durch jeden Punkt des Gebietes X_{n+1} der Integration (3) genau eine X_n (4) hindurchgeht [8]).

Die erste Variation des Integrals (1) bringt man bei festgehaltener $(n-1)$-stufiger Begrenzung X_{n-1}, längs deren die Variationen

$$(5) \qquad \delta x_i, \delta x_{i,a_1}, \ldots, \delta x_{i,a_1a_2\ldots a_{q-1}}$$

verschwinden, in bekannter Weise [9]) auf die Form

$$(6) \qquad \delta J = \int^{(n)} \sum_i W_i\, \delta x_i\, du,$$

wo W_i die „Variationsableitungen" sind. Zu unserem Zwecke sind deren Transformationseigenschaften wichtig, die wir mittels desselben Verfahrens erhalten, dessen sich E. Noether [10]) bei ähnlichem Anlasse bedient.

Setzen wir bei einer Punkttransformation

$$(2') \qquad F(x_i, x_{i,a_1}, \ldots, x_{i,a_1a_2\ldots a_q}) = F'(x'_i, x'_{i,a_1}, \ldots, x'_{i,a_1a_2\ldots a_q}),$$

so gilt auch die Formel

$$(6') \qquad \delta J = \int^{(n)} \sum_i W'_i\, \delta x'_i\, du;$$

---

[5]) $x_{i,\bar{a}} = \partial x_i / \partial \bar{u}_\alpha$ usw. wie ebd. S. 183. — Ich berichtige einen Druckfehler a. a. O. [2]): S. 255 Z. 26 und 27 muß der Nenner der zweiten Ableitung lauten $\partial u_p\, \partial u_q$; ebenso S. 256 Z. 19. Ebd. Z. 18 entsprechend $\partial \bar{u}_p\, \partial \bar{u}_q$.

[6]) Wir werden bemerkenswerte Sonderfälle aufzeigen, bei denen dies *nicht* der Fall ist.

[7]) A. a. O. [1]), S. 181.

[8]) Ebd. S. 184.

[9]) E. Noether, Nachr. v. d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 1918, S. 235–257.

[10]) Ebd. S. 250f.

die von dem Ausdruck $\delta F'$ abgespaltete Divergenz fällt, nachdem man sie integriert hat, weg, weil die Größen

$$\delta x_i' = \sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \delta x_k, \tag{5'}$$

$$\delta x_{i,\alpha}' = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 x_i'}{\partial x_k \partial x_l} x_{l,\alpha} \delta x_k + \sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \delta x_{k,\alpha},$$

$\ldots, \delta x'_{i,\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{q-1}}$ lineare Verbindungen der am Rande verschwindenden Variationen (5) sind. Aus (6) und (6′) folgt

$$\int^{(n)} \sum_i (W_i \delta x_i - W_i' \delta x_i') \, du = 0; \tag{7}$$

diese Beziehung, in der man den Subtrahenden auf die ursprünglichen Veränderlichen umgerechnet denkt, gilt für beliebige δx_i, die längs X_{n-1} gleich null sind: Nach dem Haupthilfssatze der Variationsrechnung[11]) verschwindet mithin der Integrand in (7), und daraus ergeben sich nach (5′) die Formeln

$$W_i' = \sum_k W_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i'}. \tag{8'}$$

Eine Parametertransformation führt die Variation (6) in die Gestalt über

$$\delta J = \int^{(n)} \sum_i \overline{W}_i \delta x_i \, d\bar{u}; \tag{6}$$

die von $\delta \overline{F}$ abgetrennte Divergenz gibt integriert auch hier den Wert null, denn die Variationen

$$\delta x_i = \delta x_i, \quad \delta x_{i,\bar{\alpha}_1} = \sum_{\beta_1} \delta x_{i,\beta_1} \frac{\partial u_{\beta_1}}{\partial \bar{u}_{\alpha_1}},$$

$$\delta x_{i,\bar{\alpha}_1 \alpha_2} = \sum_{\beta_1,\beta_2} \delta x_{i,\beta_1 \beta_2} \frac{\partial u_{\beta_1}}{\partial \bar{u}_{\alpha_1}} \frac{\partial u_{\beta_2}}{\partial \bar{u}_{\alpha_2}} + \sum_{\beta_1} \delta x_{i,\beta_1} \frac{\partial^2 u_{\beta_1}}{\partial \bar{u}_{\alpha_1} \partial \bar{u}_{\alpha_2}},$$

$\ldots, \delta x_{i,\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \ldots \bar{\alpha}_{q-1}}$ drücken sich linear homogen durch die Größen (5) aus, die entlang X_{n-1} verschwinden. Für solche δx_i gilt also zufolge (6) und (6̄) und mit Rücksicht auf $du = \mathfrak{D} \, d\bar{u}$

$$\int^{(n)} \sum_i (W_i \mathfrak{D} - \overline{W}_i) \delta x_i \, d\bar{u} = 0;$$

daher ist wieder nach dem genannten Haupthilfssatze

$$\overline{W}_i = W_i \mathfrak{D}. \tag{8̄}$$

---

[11]) Vgl. z. B. A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung (2. Aufl. 1925), S. 314 f.

Die weitere Untersuchung gilt zwei Sonderfällen: Der erste Teil, der ein Ergebnis von Th. De Donder [12]) weiterführt und ihm ein neues hinzufügt, handelt von zwei Invarianten *einfacher* Integrale, in denen die Differentiationsordnung der beiden gesuchten Funktionen bis zu einer ganzen Zahl $q \geqq 2$ aufsteigt. Im zweiten Teile stelle ich die beiden entsprechenden, wohl neuen Invarianten bei *n-fachen* Integralen auf, in deren Integranden außer den x_i, $x_{i.\alpha}$ auch die *zweiten* Ableitungen $x_{i.\alpha\beta}$ der x_i vorkommen.

Mit den gewählten *Beispielen* hoffe ich zu zeigen, daß die im Rahmen der Variationsrechnung von mir erzielten Ergebnisse für die Differentialgeometrie der in letzter Zeit untersuchten Gruppen von Bedeutung sind.

I. Einfache Integrale, die die Ableitungen der Unbekannten bis zur q-ten enthalten.

Im Falle $n = 1$ schreiben wir das Integral (1)

$$J = \int F(x_i, \mathfrak{d}x_i, \ldots, \mathfrak{d}^q x_i)\, du,$$

(9)

$$\mathfrak{d}^r x_i = \frac{d^r x_i}{du^r}\ [13]) \qquad (i = 1, 2;\ r = 1, 2, \ldots, q).$$

Die Determinante $\mathfrak{D}$ vereinfacht sich zu $du/d\bar{u}$. Die Variationsableitungen

$$W_i = \sum_{r=0}^{q} (-1)^r \frac{d^r}{du^r} \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{d}^r x_i} \tag{10}$$

lassen sich auf Grund der Identität [14])

$$\sum_i W_i \mathfrak{d}x_i = 0$$

mit Hilfe der Größen [15])

$$\Delta_1 = \mathfrak{d}x_2, \qquad \Delta_2 = -\mathfrak{d}x_1$$

durch eine einzige Funktion W ausdrücken in der Gestalt

$$W_i = W\Delta_i. \tag{11}$$

Indem man demgemäß in (8′) links W', rechts W einführt und die Formeln [1]), (19′) heranzieht, findet man die Punkttransformation der Größe W

$$W' = WD, \tag{12′}$$

---

[12]) C. R. Acad. sc. Paris **155** (1912), S. 577–580.

[13]) Diese Schreibweise erlaubt eine leichte Unterscheidung der Größen

$$\mathfrak{d}^r x_i = d^r x_i / du^r \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{d}}^r x_i = d^r x_i / d\bar{u}^r.$$

[14]) Vgl. A. Kneser, a. a. O. [11]), S. 213–217.

[15]) Die Größen Δ_i und (14) Δ sind die a. a. O. [1]), S. 181 benutzten in unserem Sonderfalle $n = 1$.

wie sie Th. De Donder[12]) angibt. Darüber hinaus erhält man aus $(\bar{8})$ und [1]), $(\bar{19})$ ihre Parametertransformation

$$\overline{W} = W. \tag{12}$$

Außer der Funktion W bedürfen wir des Ausdrucks F_1 [16]) mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathfrak{d}^q x_i \, \partial \mathfrak{d}^q x_k} = F_1 \Delta_i \Delta_k, \tag{13}$$

dem man auch die Form geben kann:

$$F_1 = \frac{1}{\Delta^2} \mathfrak{F}_1, \quad \mathfrak{F}_1 = \sum_i \frac{\partial^2 F}{(\partial \mathfrak{d}^q x_i)^2}, \quad \Delta = + \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}. \tag{14}$$

Die Größe F_1 transformiert sich nach den Gesetzen

$$F_1' = F_1 D^2, \tag{15'}$$

$$\bar{F}_1 = F_1 \mathfrak{D}^{-(2q+1)}. \tag{$\bar{15}$}$$

Um das erste zu gewinnen, differenziert man die Identität $(2')$

$$F(x_i, \mathfrak{d} x_i, \ldots, \mathfrak{d}^q x_i) = F'(x_i', \mathfrak{d} x_i', \ldots, \mathfrak{d}^q x_i')$$

zweimal, erst nach $\mathfrak{d}^q x_i$, dann nach $\mathfrak{d}^q x_k$; dabei berücksichtigt man, daß rechts, wenn man auf die Veränderlichen x_i umrechnet, die Größe $\mathfrak{d}^q x_i$ bloß in dem Argumente $\mathfrak{d}^q x_l'$, und zwar nur in dessen Summanden $\sum_i \frac{\partial x_l'}{\partial x_i} \mathfrak{d}^q x_i$ auftritt. Führt man in dem Ergebnisse der beiden Differentiationen die Funktion F_1 nach (13) ein, benutzt [1]), $(\bar{28})$, setzt $i = k$ und summiert über i, so folgt $(15')$.

Zum Beweise der Formel $(\bar{15})$ differenziert man die Identität $(\bar{2})$

$$F(x_i, \mathfrak{d} x_i, \ldots, \mathfrak{d}^q x_i) = \mathfrak{D} F(x_i, \mathfrak{d} x_i, \ldots, \mathfrak{d}^q x_i)$$

nach $\mathfrak{d}^q x_i$ und das Ergebnis nach $\bar{\mathfrak{d}}^q x_k$, indem man beachtet, daß rechts bei Umrechnung auf den Parameter $\bar{u}$ die Größe $\mathfrak{d}^q x_i$ nur in dem Argumente $\mathfrak{d}^q x_i$, genauer nur in dessen Summanden $\mathfrak{d}^q x_i \mathfrak{D}^{-q}$ vorkommt. Dann zieht man (13) und [1]), (19) heran, setzt $i = k$ und summiert über i.

Th. De Donder[12]) folgert aus $(12')$, $(15')$ die *Punkt*invarianz des Ausdrucks $W F_1^{-\frac{1}{2}}$; wir erweitern diese Feststellung, indem wir aus unseren auf die *Parameter*transformation bezüglichen Formeln $(\bar{12})$, $(\bar{15})$ schließen:

I. *Die Größe*

$$H = \frac{W}{(|F^{2q+1} F_1|)^{\frac{1}{2}}} \tag{16}$$

ist eine absolute Invariante gegenüber Punkt- und Parametertransformationen[33]).

[16]) A. Kneser, a. a. O. [11]), S. 217.

H ist die Verallgemeinerung der von G. Landsberg[17]) eingeführten, für $q = 1$ sich ergebenden „extremalen Krümmung".

Ferner erhalten wir aus (2), (15) das neue Ergebnis:

II. *Das Doppelintegral*

$$K = \iint G\, dx_1\, dx_2, \qquad G = (\,|F^{2q+1} F_1|\,)^{\frac{1}{4}} \tag{17}$$

ist absolut invariant gegenüber Punkt- und Parametertransformationen.

Dieses Integral, das nach der Vorschrift (3), (4) berechnet wird, verallgemeinert den von P. Funk und L. Berwald[18]) im Falle $q = 1$ dem „Längen"integrale $\int F\left(x_i, \frac{dx_i}{du}\right) du$ zugeordneten „Flächeninhalt".

Beispiele.

A. $q = 2$.

a) Das einfachste Variationsproblem der *ebenen affinen Differentialgeometrie* ist die Frage nach dem Äußerstwerte der Affinlänge

$$J = \sigma = \int (\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1)^{\frac{1}{3}} du, \qquad \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{du} \quad \text{usw.}^{19})$$

Bezeichnet man den Integranden mit F, so erhält man nach (14), (17)

$$F_1 = -\frac{2}{9} F^{-5}, \qquad G = (-F^5 F_1)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Daher hat das Integral (17) hier die Gestalt

$$K = \frac{\sqrt{2}}{3} \iint dx_1\, dx_2,$$

ist mithin bis auf einen Zahlenfaktor der — *von der Wahl der Schar* (4) *unabhängige*[6]) — gewöhnliche *Flächeninhalt*, der mit der Affinlänge zusammen das einfachste *isoperimetrische* Problem[20]) der Affingeometrie ermöglicht.

Um H zu finden, berechnet man nach (10)

$$W_1 = -\frac{d}{du}\left(\frac{1}{3} \ddot{x}_2 F^{-2}\right) + \frac{d^2}{du^2}\left(-\frac{1}{3} \dot{x}_2 F^{-2}\right);$$

führt man die Affinlänge σ als Parameter u ein, so daß bei der Bezeichnung $dx/d\sigma = x'$ usw. die Formeln

$$F = x_1' x_2'' - x_2' x_1'' = 1, \tag{18}$$

$$x_1' x_2''' - x_2' x_1''' = 0 \tag{19}$$

[21])

---

[17]) Math. Annalen **65** (1908), S. 329. Vgl. auch A. L. Underhill, Transactions of the American Mathematical Society **9** (1908), S. 332.

[18]) Lotos (Prag) **67/68** (1919/20), S. 46 f. — Herrn L. Berwald danke ich für mehrere Anregungen bei diesem ersten Teile der vorliegenden Arbeit.

[19]) W. Blaschke-K. Reidemeister, Affine Differentialgeometrie (1923), S. 37.

[20]) Ebd. S. 60—63.

gelten, so wird

$$W_1 = -\frac{2}{3}x_2''', \qquad W_2 = \frac{2}{3}x_1'''$$

Die beiden Ausdrücke (11)

$$\frac{W_1}{\Delta_1} = -\frac{2}{3}\frac{x_2'''}{x_2'}, \qquad \frac{W_2}{\Delta_2} = -\frac{2}{3}\frac{x_1'''}{x_1'}$$

haben zufolge (19) in der Tat den gleichen Wert W, den man mittels (18) leicht in die Form setzt

$$W = \frac{2}{3}(x_1''x_2''' - x_2''x_1''').$$

Damit erweist sich die Invariante $H = W/G$ bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ als die *Affinkrümmung*[21]).

b) Die Aufgabe[22]), *eine Kurve zu finden, die mit ihrer Evolute und ihren in den Endpunkten gezogenen Normalen eine möglichst kleine Fläche einschließt*, erfordert die Bestimmung der Extremalen des Integrals

$$J = \int \varrho\, ds = \int \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^2\, du}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \int F\, du,$$

wenn ϱ den Krümmungshalbmesser, ds das Bogenelement bezeichnet, x, y die rechtwinkligen Koordinaten bedeuten und $dx/du = \dot{x}$ usw. gesetzt wird. Es ergibt sich

$$F_1 = \frac{2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^2}{(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^3}, \qquad G = (F^5F_1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2}\,\varrho^4,$$

daher als Wert des Integrales (17), (4)

$$K = \sqrt{2}\int\int \varrho^4\, dx\, dy.$$

B. $q = 3$.

c) Werden die in b) benutzten Bezeichnungen verwendet, deutet ferner ein Strich hier die Differentiation nach s an und ist $k(s)$ die gewöhnliche Krümmung, so lautet die einfachste Integralinvariante der *ebenen Inversionsgeometrie*[23])

$$J = t = \int (x'y''' - y'x''')^{\frac{1}{3}}\, ds = \int k'(s)^{\frac{1}{3}}\, ds.$$

Bei Einführung eines *beliebigen* Parameters u nimmt diese „Inversionslänge" die Gestalt an

$$t = \int [(\dot{x}\dddot{y} - \dot{y}\dddot{x})(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - 3(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})]^{\frac{1}{3}}\, \frac{du}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}.$$

---

[21]) Ebd. S. 13.

[22]) Vgl. A. Kneser, a. a. O. [11]), S. 222.

[23]) Ich übernehme Begriffe und Bezeichnungen von H. Liebmann, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wissensch. 1923, S. 79—94, bes. S. 80 f.

Indem man den Integranden mit F bezeichnet, findet man

$$F_1 = -\frac{1}{4} F^{-3} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-2}, \quad G = (-F^7 F_1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} F^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1},$$
$$K = \frac{1}{2} \int\int \frac{dk(s)}{ds}\, dx\, dy.$$

Die Invarianz dieses Integrales (17), (4) bei Bewegung und Ähnlichkeit liegt auf der Hand; diejenige bei einer einzelnen Inversion $\hat{x} = a^2 x / r^2$, $\hat{y} = a^2 y / r^2$ läßt sich auf Grund der a. a. O. [23]) angegebenen Formeln leicht bestätigen. Die Invarianz der Inversionslänge besagt nämlich

$$\frac{d\hat{s}\, d\hat{\varrho}}{\hat{\varrho}^2} = \frac{ds\, d\varrho}{\varrho^2};$$

wegen $d\hat{s} = a^2 r^{-2} ds$ folgt hieraus

$$\frac{d\hat{k}}{d\hat{s}} = \frac{r^4}{a^4} \frac{dk}{ds}.$$

Nach Multiplikation mit

$$d\hat{x}\, d\hat{y} = \left| \frac{\partial(\hat{x}, \hat{y})}{\partial(x, y)} \right| dx\, dy = \frac{a^4}{r^4} dx\, dy$$

ergibt sich in der Tat

$$d\hat{K} = dK.^{24})$$

Es sei bemerkt, daß der Kunstgriff, mittels dessen A. Winternitz [25]) zu einer Ungleichheit zwischen Affinlänge und Bogenlänge gelangt, auch zur Aufstellung einer entsprechenden *Ungleichheit zwischen Inversionslänge und Bewegungsinvarianten* dienen kann. Es ist nämlich, wenn längs des Bogens $s_1 \leqq s \leqq s_2$ die Krümmung $k(s)$ z. B. nicht abnimmt,

$$t^2 = \int_{s_1}^{s_2} k'(u)^{\frac{1}{2}}\, du \int_{s_1}^{s_2} k'(v)^{\frac{1}{2}}\, dv$$
$$= \int_{s_1}^{s_2}\int_{s_1}^{s_2} [k'(u)\, k'(v)]^{\frac{1}{2}}\, du\, dv \leqq \int_{s_1}^{s_2}\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{2} [k'(u) + k'(v)]\, du\, dv,$$
$$t^2 \leqq (s_2 - s_1)\, [k(s_2) - k(s_1)].$$

d) Der natürliche Parameter in der *ebenen Geometrie der Gruppe von Laguerre* [26]) ist das Integral

$$J = \lambda = \int \left(\frac{d \lg \varrho}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds = \int \left(\frac{dp}{d\varphi} + \frac{d^3 p}{d\varphi^3} \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi$$
$$= \int \left(\dot{p}\, \dot{\varphi} + \frac{\dddot{p}}{\dot{\varphi}} - 3\, \frac{\ddot{p}\, \ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} + 3\, \frac{\dot{p}\, \ddot{\varphi}^2}{\dot{\varphi}^3} - \frac{\dot{p}\, \dddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} \right)^{\frac{1}{2}} du = \int F du,$$

[24]) Die Größe H ist hier nicht die „Inversionskrümmung“ (a. a. O. [23]), S. 91); ich werde auf diese Tatsache bei anderer Gelegenheit zurückkommen.

[25]) Hamburger Abhandlungen **1** (1922), S. 101.

[26]) H. Liebmann, Journ. reine angew. Math. **154** (1924), S. 15–19. Ich bediene mich der dort eingeführten Begriffe und Bezeichnungen.

wenn φ den Winkel bedeutet, den das von O auf die Tangente gefällte Lot von der Länge p mit der x-Achse bildet. Da sich

$$F_1 = -\frac{1}{4} F^{-3} \dot{\varphi}^{-4}, \quad G = (-F^7 F_1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} F^2 \dot{\varphi}^{-2}$$

ergibt, ist

$$K = \frac{1}{2} \int\int d\varrho\, dp\,.$$ [27])

Auf Grund der zuerst angeschriebenen Form der Größe λ erhält man auf dem in c) geschilderten Wege eine *Ungleichheit zwischen dieser „Laguerre-Länge" und Bewegungsinvarianten*; wenn etwa entlang dem Bogen $s_1 \leqq s \leqq s_2$ der Krümmungshalbmesser $\varrho(s)$ mit dem Anfangswerte $\varrho(s_1) > 0$ nicht abnimmt, so gilt

$$\lambda^2 \leqq (s_2 - s_1)\,[\lg \varrho(s_2) - \lg \varrho(s_1)]\,.$$

II. Vielfache Integrale, die die ersten *und zweiten* Ableitungen der Unbekannten enthalten.

G. Vivanti hat bewiesen [28]), daß die zu dem jetzt vorliegenden Integrale

$$J = \int^{(n)} F(x_i, x_{i,\alpha}, x_{i,\alpha\beta})\, du_1\, du_2 \ldots du_n = \int^{(n)} F\, du \quad [29])$$ (20)

gehörigen Variationsableitungen

$$W_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_{i,\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \frac{\partial F}{\partial x_{i,\alpha\beta}}$$ (21)

unter Heranziehung der Determinanten

$$\Delta_i = (-1)^{i+1} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

durch eine einzige Größe W in der Form darstellbar sind

$$W_i = W \Delta_i\,.$$ (22)

Auf dem zur Herleitung der Formeln (12) eingeschlagenen Wege finden wir aus (8), (22) und [1]), (19) die Transformationseigenschaften der Funktion W

$$W' = WD, \qquad (\overline{23}) \qquad \overline{W} = W.$$ (23′)

Um noch diejenigen Ausdrücke zu erklären, welche hier den a. a. O. [1]), (5) eingeführten entsprechen, schreiben wir die Gesamtheit der Paare $\alpha\beta$ bzw. $\lambda\mu$ [29]) je als eine Menge von $n(n+1)/2 = N$ Dingen, so daß jedes *Paar* mit einem *einzigen* Zeiger

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\alpha - 1)(2n - \alpha) + \beta \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{q} = \frac{1}{2}(\lambda - 1)(2n - \lambda) + \mu$$

---

[27]) Wegen der „Laguerre-Krümmung" [a. a. O. [26]), S. 17] vgl. das in [24]) Gesagte.

[28]) Annali di matematica (3) **20** (1913), S. 49–63, bes. S. 61 f.

[29]) Bei einem Paare $\alpha\beta$ griechischer Zeiger gilt fortan stets die Festsetzung $\alpha \leqq \beta$.

versehen wird. Wir setzen dann

$$\sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\alpha\beta}\,\partial x_{i,\gamma\theta}} = F_{\alpha\beta,\gamma\theta} = F_{pq} \tag{24}$$

und die N-reihige Determinante dieser Größen

$$\det \cdot F_{\alpha\beta,\gamma\theta} = \Phi. \tag{25}$$

Differenziert man eine von G. Vivanti[30]) angegebene, auf Grund von $(\bar{2})$ leicht zu beweisende Identität in der doppelten Form

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_{i,\alpha\beta}} x_{i,\sigma} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_{k,\gamma\theta}} x_{k,\sigma} = 0$$

nach $x_{k,\gamma\theta}$ bzw. $x_{i,\alpha\beta}$, so lehren die beiden Ergebnisse, daß es solche Größen $F_{\alpha\beta,\gamma\theta}$ gibt, daß

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i,\alpha\beta}\,\partial x_{k,\gamma\theta}} = \frac{A_i A_k}{A^2} F_{\alpha\beta,\gamma\theta} \tag{26}$$

gesetzt werden kann; dabei ist, wie a. a. O. [1]), S. 181, $A = +\left(\sum_i A_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Indem man $i = k$ setzt und über i summiert, erkennt man die Übereinstimmung dieser $F_{\alpha\beta,\gamma\theta}$ mit den in (24) erklärten.

Aus der Punktinvarianz $(2')$ der Funktion F

$$F(x_i, x_{i,\alpha}, x_{i,\alpha\beta}) = F'(x'_l, x'_{l,\alpha}, x'_{l,\alpha\beta})$$

$$= F'\left(x'_l, \sum_i \frac{\partial x'_l}{\partial x_i} x_{i,\alpha}, \sum_{i,k} \frac{\partial^2 x'_l}{\partial x_i\,\partial x_k} x_{i,\alpha} x_{k,\beta} + \sum_i \frac{\partial x'_l}{\partial x_i} x_{i,\alpha\beta}\right)$$

leitet man durch zwei Differentiationen zunächst die Transformation der Ausdrücke auf der linken Seite von (26) her; ersetzt man diese auf beiden Seiten der entstandenen Beziehung nach (26) durch die Größen (24), so erhält man mit Hilfe der Formeln [1]), (28)

$$\frac{F'_{\alpha\beta,\gamma\theta}}{A'^2} = D^2 \frac{F_{\alpha\beta,\gamma\theta}}{A^2}$$

und folglich

$$\frac{\Phi'}{A'^{n(n+1)}} = D^{n(n+1)} \frac{\Phi}{A^{n(n+1)}}. \tag{27'}$$

Etwas weitläufiger als die Punkttransformation $(27')$ der Determinante Φ ist deren Parametertransformation herzuleiten. Die Invarianz $(\bar{2})$ der Funktion F in der Gestalt

$$\overline{F}(x_i, x_{i,\bar{\alpha}}, x_{i,\bar{\alpha}\bar{\beta}}) = \mathfrak{D} F(x_i, x_{i,\lambda}, x_{i,\lambda\mu})$$

$$= \mathfrak{D} F\left(x_i, \sum_{\bar{\alpha}} x_{i,\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda}, \sum_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} x_{i,\bar{\alpha}\bar{\beta}} U_{\bar{\alpha}\bar{\beta},\lambda\mu} + \sum_{\bar{\alpha}} x_{i,\bar{\alpha}} \frac{\partial^2 \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda\,\partial u_\mu}\right),$$

[30]) A. a. O. [25]), S. 51.

wo

$$\zeta_{\sigma\tau} = \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma \neq \tau, \\ \frac{1}{2} & \text{für } \sigma = \tau, \end{cases}$$

$$U_{\bar{\alpha}\bar{\beta},\lambda\mu} = \zeta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\mu} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\lambda} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\mu} \right).$$

liefert nach geeigneter Differentiation die Transformation der Größen $\partial^2 \bar{F} / \partial x_{i,\bar{\alpha}\bar{\beta}} \partial x_{k,\bar{\gamma}\bar{\theta}}$; aus dieser folgt nach (26), (24)

$$\bar{F}_{\bar{\alpha}\bar{\beta},\bar{\gamma}\bar{\theta}} = \mathfrak{D} \sum_{\lambda\mu,\,\varrho\sigma} F_{\lambda\mu,\varrho\sigma} U_{\bar{\alpha}\bar{\beta},\lambda\mu} U_{\bar{\gamma}\bar{\theta},\varrho\sigma}.$$

Hiernach ist die N-reihige Determinante $\bar{\Phi}$ der $F_{\bar{\alpha}\bar{\beta},\bar{\gamma}\bar{\theta}}$

$$\bar{\Phi} = \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \Phi \mathfrak{d}^2. \tag{28}$$

wenn die N-reihige Determinante der $U_{\bar{\alpha}\bar{\beta},\lambda\mu}$ mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet wird. Die letztere aber besitzt den Wert

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{D}^{-(n+1)}; \tag{29}$$

ich verdanke Herrn G. Kowalewski folgenden einfachen Beweis dieser Formel: Da man der Determinante $\mathfrak{d}$ leicht auch die Gestalt

$$\mathfrak{d} = \det \cdot \left[\zeta_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\mu} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\lambda} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\mu} \right) \right]$$

gibt, erkennt man $\mathfrak{d}$ als die Determinante der Koeffizienten der N quadratischen Formen

$$\Omega_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} \zeta_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\mu} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\lambda} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\mu} \right) du_\lambda du_\mu;$$

nach einem bekannten Satze[31]) ist daher $\mathfrak{d}$ eine Invariante des Systems der $\Omega_{\alpha\beta}$. Nun ist aber jede $\Omega_{\alpha\beta}$ das Produkt der beiden *Linear*formen

$$\Omega_\alpha = \sum_\lambda \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda} du_\lambda, \qquad \Omega_\beta = \sum_\mu \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\mu} du_\mu;$$

infolgedessen kann $\mathfrak{d}$ als Invariante des Systems der Ω_α angesehen werden, ist also[32]) bis auf einen Zahlenfaktor eine Potenz der Determinante $\mathfrak{D}^{-1}$ desselben. Der Exponent dieser Potenz ist $n+1$, weil $\mathfrak{d}$ in den Elementen von $\mathfrak{D}^{-1}$ die Ordnung $n(n+1)$ besitzt; der Zahlenfaktor hat den Wert 1, wie die Sonderannahme

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \neq \lambda, \\ 1 & \text{für } \alpha = \lambda \end{cases}$$

---

[31]) Vgl. P. Gordan - G. Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie 2 (1887), S. 7f., 148 ($n=2$).

[32]) Vgl. R. Weitzenböck, Invariantentheorie (1923), S. 18.

zeigt. — Nach (28) und (29) ist

$$\overline{\Phi} = \Phi \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}(n+1)(n-4)}. \tag{27}$$

Die Formeln (2), (23), (27) und [1]), (22) erlauben die beiden folgenden — wie ich glaube, neuen — Sätze auszusprechen:

I. *Die Größe*

$$H = \frac{W\Delta}{(|F^{\frac{1}{2}(n+1)(n+4)} \Phi|)^{\frac{1}{n(n+1)}}} \tag{30}$$

ist eine absolute Invariante gegenüber Punkt- und Parametertransformationen [33]).

II. *Das über X_{n+1} erstreckte, durch den Ansatz (3), (4) erklärte $(n+1)$-fache Integral*

$$K = \int^{(n+1)} G\,dx, \qquad G = \frac{(|F^{\frac{1}{2}(n+1)(n+4)} \Phi|)^{\frac{1}{n(n+1)}}}{\Delta} \tag{31}$$

ist absolut invariant gegenüber Punkt- und Parametertransformationen.

Ein einfaches *Beispiel* ($n = 2$) für die Integrale der hier behandelten Art bietet die *Affinoberfläche* [34])

$$J = \Omega = \iint (|M^2 - LN|)^{\frac{1}{4}}\,du\,dv = \iint F\,du\,dv.$$

Man findet, indem man von beliebigen Parametern u, v ausgeht und diese unter der Annahme hyperbolischer Krümmung nachträglich als Asymptotenparameter wählt ($L = N = 0$, $F = M^{\frac{1}{2}} = f$), nach (24)

$$F_{11,11} = 0, \quad F_{11,12} = 0, \quad F_{11,22} = -\frac{1}{4} f^{-3} \Delta^2,$$

$$F_{12,11} = 0, \quad F_{12,12} = -\frac{1}{4} f^{-3} \Delta^2, \quad F_{12,22} = 0,$$

$$F_{22,11} = -\frac{1}{4} f^{-3} \Delta^2, \quad F_{22,12} = 0, \quad F_{22,22} = 0.$$

Mit dem hieraus sich ergebenden Werte der Determinante (25)

$$\Phi = \frac{1}{64} f^{-9} \Delta^6$$

erhält man

$$G = \frac{(f^9 \Phi)^{\frac{1}{6}}}{\Delta} = \frac{1}{2},$$

$$K = \frac{1}{2} \iiint dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

---

[33]) Wir benutzen in (30), (31) ebenso wie in (16), (17) den positiven Wert der Potenz im Nenner der rechten Seite von (30) bzw. (16); übrigens folgt aus (2), (27) bzw. (2), (15), daß die vom Zeichen des absoluten Betrages befreite Grundzahl dieser Potenz bei unseren Punkt- und Parametertransformationen ihr Vorzeichen behält.

[34]) W. Blaschke - K. Reidemeister, a. a. O. [19]), S. 175. Ich halte mich an die dortigen Bezeichnungen.

K ist demnach, von einem Zahlenfaktor abgesehen, der *von der Wahl der Schar* (4) *unabhängige*[6]) gewöhnliche *Rauminhalt*, also diejenige Größe[35]), welche zusammen mit der Affinoberfläche zu der einfachsten *isoperimetrischen* Aufgabe der affinen Flächentheorie[36]) Anlaß gibt.

Die für das Integral Ω ausgerechnete Invariante H aber ist bis auf einen Zahlenfaktor nichts anderes als die *mittlere affine Flächenkrümmung*. Hiervon überzeugen wir uns zum Schlusse leicht, indem wir die Asymptotenlinien als Parameterlinien wählen. Die nach (21) ausgerechneten Größen W_i erweisen sich dann als Komponenten des Vektors

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}) + \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}) + \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{f}\right].^{37})$$

Nun ist aber, wenn wir den kontravarianten Vektor $\mathfrak{X}$ einführen[38]), dessen Komponenten die normierten Stellungsparameter der Tangentenebene sind,

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}(\mathfrak{X}_{uv} + \mathfrak{X}_{uv} + \mathfrak{X}_{uv}) = -\frac{3}{2}h(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v),$$

wo h die mittlere Affinkrümmung bedeutet. Hieraus folgt

$$W = \frac{W_i}{\Delta_i} = -\frac{3}{2}h,$$

also wirklich

$$H = \frac{W}{G} = -3h.$$

---

[35]) Vgl. im ersten Teile Beispiel A, a).
[36]) W. Blaschke - K. Reidemeister, a. a. O. [19]), S. 198.
[37]) Ebd. S. 204f.
[38]) Ebd. S. 139, (39), (41), (42).

(Eingegangen am 31. Mai 1925.)

Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. I: Entwicklungssätze.

Von

G. Szegö in Berlin.

In der neueren Zeit sind zahlreiche Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach Orthogonalfunktionen bezüglich ihrer Konvergenz und Summabilität untersucht worden. Viele von diesen Entwicklungen schreiten nach gewissen Polynomen fort. Sie lassen sich am einfachsten folgendermaßen unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammenfassen. Es sei $p(x)$ eine von $-\infty$ bis $+\infty$ erklärte nichtnegative Funktion, für welche sämtliche Riemann-Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) x^n dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

absolut konvergieren. Es sei ferner $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx > 0$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes System von Polynomen

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

von folgender Beschaffenheit:

1. $\varphi_n(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades.
2. Der Koeffizient von x^n in $\varphi_n(x)$ ist positiv.
3. Es gelten die Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \gtrless n, \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Eine beliebige Funktion $f(x)$, die in jedem endlichen Intervall eigentlich integrabel und für alle x beschränkt ist[1]), kann nach den Polynomen $\varphi_n(x)$ formal entwickelt werden:

[1]) Die Bedingung der Beschränktheit kann oft durch eine allgemeinere ersetzt werden; vgl. § 5, 1.

$$(*) \qquad f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots,$$

wobei

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x) \varphi_n(x) dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Folgende geläufige Beispiele seien erwähnt:

a) $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ für $-1 < x < 1$, wo α und β größer als -1 sind; sonst $p(x) = 0$. Die $\varphi_n(x)$ sind mit den sog. Jacobischen Polynomen identisch. Besonders wichtig ist der Spezialfall $\alpha = \beta = 0$, wo sie die Legendreschen Polynome, sowie der Fall $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, wo sie die Tschebyscheffschen Polynome konst. $\cos n$ arc $\cos x$ liefern.

b) $p(x) = e^{-x} x^\alpha$ für $x > 0$, wo $\alpha > -1$ ist; sonst $p(x) = 0$. Die $\varphi_n(x)$ sind mit den sog. Laguerreschen Polynomen identisch. Den Entwicklungen nach diesen Polynomen ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Sie lassen sich (übrigens für ganz beliebige α) besser durch ihre erzeugende Funktion

$$(L) \qquad \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x) z + L_2^{(\alpha)}(x) z^2 + \cdots + L_n^{(\alpha)}(x) z^n + \cdots$$

definieren, woraus man für reelles α, $\alpha > -1$, die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \gtrless n, \\ \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} & \text{für } m = n \end{cases} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ohne Schwierigkeit bestätigen kann[2]). Es ist also in der obigen Schreibweise

$$\varphi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}}} L_n^{(\alpha)}(x)$$

und die Entwicklung (*) lautet danach

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}} \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha f(t) L_n^{(\alpha)}(t) dt.$$

---

[2]) Vgl. schon Abel, Œuvres complètes 2 (Nouvelle édition, Christiania: Grøndahl & Son, 1881), S. 284; P. L. Tchebychef, Œuvres 1 (St.-Pétersbourg 1899), S. 503–508; ferner Laguerre, Œuvres 1 (Paris: Gauthiers-Villars, 1898), S. 434–436. Man findet in der Literatur vielfach auch die Bezeichnung: Abelsche Polynome oder Abel-Laguerresche Polynome. (Oft wird damit nur der Spezialfall $\alpha = 0$ gemeint.)

Bezüglich weiterer Literatur sei auf das Verzeichnis bei H. Hamburger, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 186–222, insb. S. 204, ferner bei S. Wigert, Arkiv för mat., astron. och fys. 15 (1921), Nr. 25 verwiesen. Darüber hinaus sei noch erwähnt: E. R. Neumann, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 30 (1921), S. 15–35; G. Wiarda, Journal für die r. u. angew. Mathematik 153 (1923), S. 44–60. Vgl. schließlich die Literatur unter [15]).

Nahe verwandt mit diesen Polynomen ist ferner eine weitere Klasse:

c) $p(x) = e^{-x^2}$. Die $\varphi_n(x)$ sind dann mit den sog. Hermiteschen Polynomen identisch. Vgl. § 6.

Die Entwicklung (*) ist namentlich vom folgenden Standpunkt aus sehr ausführlich untersucht worden. Es sei x_0 eine bestimmte Stelle. Dann gibt es eine *kleinste* Zahl $k_0 = k_0(x_0)$ von folgender Eigenschaft. Die Entwicklung (*) ist für $x = x_0$ summabel mit den Cesàroschen Mitteln k-ter Ordnung (summabel (C, k)), sobald $k > k_0$ ist, vorausgesetzt, daß $f(x)$ für $x = x_0$ stetig ist. Hierbei versteht man, wie bekannt, unter den Cesàroschen Mitteln k-ter Ordnung einer Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

die Zahlen

$$\frac{C_n^{(k)} a_0 + C_{n-1}^{(k)} a_1 + \cdots + C_0^{(k)} a_n}{C_n^{(k)}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}, \quad \text{d. h. } C_n^{(k)} = \binom{n+k}{n}$$

ist. Man setzt gewöhnlich $k > -1$ voraus und mit der Summabilität (C, k) ist die Konvergenz dieser Mittel für $n \to \infty$ gemeint. Ich nenne die Zahl k_0 im folgenden den zu der Entwicklung (*) und zur Stelle x_0 gehörigen *Summabilitätsexponenten*. Es ist offenbar stets $k_0 \geqq -1$. Der extreme Fall $k_0 = -1$ bedeutet, daß die Entwicklung (*) mit den Cesàroschen Mitteln einer beliebigen Ordnung k, $k > -1$, summabel ist, sofern $f(x)$ für $x = x_0$ stetig ist. Ist dagegen $k_0 > -1$, so gibt es zu jeder Ordnung k mit $-1 < k < k_0$ eine, an der Stelle x_0 stetige Funktion, deren Entwicklung für $x = x_0$ nicht summabel (C, k) ist. (In den bekannten Spezialfällen gilt dies schon sogar für $k = k_0$.) Der andere extreme Fall wäre $k_0 = \infty$, wo also zu jeder endlichen Ordnung k eine für $x = x_0$ stetige Funktion mit nicht (C, k) summabler Entwicklung (*) angegeben werden kann[3]).

Die Bestimmung des Summabilitätsexponenten bildet eine zentrale Aufgabe der ganzen vorliegenden Theorie. Im Falle a) ist dies zuerst für den Spezialfall $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, der der Fourierschen Kosinusreihe entspricht, erledigt worden, mit dem Ergebnis, daß dann

$$k_0 = 0$$

[3]) Es ist mir nicht gelungen, eine Funktion $p(x)$ anzugeben, derart, daß die entsprechende Entwicklung (*) an einer geeignet gewählten Stelle x_0 den Summabilitätsexponenten $k_0 = -1$ habe. Dagegen ist klar, daß z. B. bei der „Legendreschen Belegung“: $p(x) = 1$ für $-1 < x < 1$; $p(x) = 0$ sonst — an jeder Stelle $|x_0| > 1$ der Summabilitätsexponent $k_0 = \infty$ ist.

ist, und zwar für $-1 \leqq x_0 \leqq 1$.[4]) Weniger einfach ist der Fall $\alpha = \beta = 0$, d. h. die Legendresche Reihe. Es ergab sich hier

$$k_0 = 0 \quad \text{für} \quad -1 < x_0 < 1 \quad \text{und} \quad k_0 = \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad x_0 = \pm 1.$$

Der erste Teil dieses Resultates stammt von A. Haar und ist bequem abzulesen aus einem späteren Resultat, das ungefähr zugleich von ihm und W. H. Young gefunden worden ist, wonach für $-1 < x < 1$ die Legendresche Reihe einer Funktion unter sehr allgemeinen Voraussetzungen mit der Fourierschen Kosinusreihe der gleichen Funktion „äquikonvergent" ist[5]). Demgegenüber bietet die Frage nach dem Summabilitätsexponenten in den Endpunkten des Intervalls $-1, 1$ große Schwierigkeiten und ist zum ersten Male von T. H. Gronwall erledigt worden[6]).

Was den allgemeinen Fall a) betrifft, ist

$$k_0 = 0 \quad \text{für} \quad -1 < x_0 < 1.$$

Dies folgt[7]) z. B. aus einem Satz, den ich in einer früheren Arbeit[8]) bewies, wonach unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bezüglich der Funktion $p(x)$ ein ähnlicher Äquikonvergenzsatz besteht, wie der Haar-W. H. Youngsche. Wesentlich war in diesen Voraussetzungen, daß $p(x)$ nur in einem endlichen Intervall, etwa in $(-1, 1)$, von 0 verschieden ist und daß im Innern desselben $p(x)$ gewisse Differentiierbarkeitseigenschaften besitzt — Bedingungen, welche im vorliegenden Falle reichlich erfüllt sind. Der Fall der Endpunkte $x_0 = \pm 1$ ist von E. Kogbetliantz durch Über-

---

[4]) L. Fejér, Math. Ann. **58** (1904), S. 51–69; M. Riesz, Comptes rendus **149** (1909), S. 309–312; S. Chapman, Lond. Math. Soc. Proc. (2) **9** (1910–1911), S. 369–409.

[5]) Unter der Fourierschen Kosinusreihe ist hier natürlich die nach den Polynomen $\cos n \arccos x$ fortschreitende Entwicklung gemeint. — Zwei Reihen heißen äquikonvergent, wenn die Differenz ihrer n-ten Partialsummen für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Der fragliche Äquikonvergenzsatz findet sich bei A. Haar, Math. Ann. **78** (1917), S. 121–136, und W. H. Young, Comptes rendus **165** (1917), S. 696–699, ferner Lond. Math. Soc. Proc. (2) **18** (1919–1920), S. 141–162.

[6]) Bezüglich der ausgedehnten Literatur über die Legendresche Reihe sei auf die kürzlich erschienene Arbeit von L. Fejér, Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel, Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 267–284, verwiesen; vgl. namentlich die Fußnote [2]). Hier findet sich auch ein neuer, stark vereinfachter Beweis des Gronwallschen Satzes $k_0 = \frac{1}{2}$ für $x_0 = \pm 1$.

[7]) Allerdings unter gewissen Einschränkungen bezüglich α und β; vgl. a. a. O. [8]). In dem Schlußsatz dieser Abhandlung muß die Bedingung $\alpha, \beta > -1$ bzw. $\alpha > -1$ offenbar zu $\alpha, \beta > -\frac{1}{2}$ bzw. $\alpha > -\frac{1}{2}$ berichtigt werden. — Der Satz findet sich bei E. Kogbetliantz, Comptes rendus **174** (1917), S. 779 mit der Einschränkung $\alpha = \beta > -\frac{1}{2}$.

[8]) Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 61–94.

tragung der Gronwallschen Rechnungen auf diesen erheblich komplizierteren Fall behandelt worden, mit dem Ergebnis, daß $k_0 = \alpha + \frac{1}{2}$ ist, wenn $\alpha = \beta > -\frac{1}{2}$.[9])

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird der Fall b), d. h. die Entwicklung nach den durch (L) definierten Laguerreschen Polynomen, von dem genannten Standpunkt aus behandelt. Hierbei erweist sich eigentümlicherweise der Fall $x = 0$ (d. h. der Fall des linken Endpunktes des Intervalles $0, +\infty$, in dessen Innerem $p(x)$ nicht verschwindet) als besonders einfach, im Gegensatz zu den Entwicklungen unter a), bei denen gerade die Endpunkte die Hauptschwierigkeit bilden. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, daß man hier k_0 ermitteln kann, ohne die asymptotischen Eigenschaften der Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ näher zu kennen. Es ergibt sich

$$k_0 = \alpha + \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad x_0 = 0,$$

also ein ähnliches Resultat wie bei a). Für $x_0 > 0$ ist auch hier $k_0 = 0$, wie man aus einem Äquikonvergenzsatz leicht ablesen kann, dessen Beweis den weiteren Gegenstand der vorliegenden Arbeit ausmacht.

Den Fällen $x_0 = 0$ und $x_0 > 0$ entsprechend werden also im ersten Teil folgende Sätze bewiesen:

Hauptsatz A. *Es sei $f(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte, in jedem endlichen Intervall eigentlich integrable und für $x \to +\infty$ beschränkte Funktion. Ihre Entwicklung nach den Laguerreschen Polynomen $L_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha > -1$, laute:*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{(\alpha)}(x), \quad \text{wobei} \quad c_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} f(t) L_n^{(\alpha)}(t)\, dt.$$

Wenn $f(x)$ für $x = 0$ stetig ist, dann ist diese Entwicklung an der Stelle $x = 0$ summabel (C, k), wenn nur $k > \alpha + \frac{1}{2}$ ist.

Es gibt ferner für $x = 0$ stetige Funktionen, deren Entwicklung nicht summabel $(C, \alpha + \frac{1}{2})$ ist.

Ist insbesondere $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, so ist die eben erwähnte Entwicklung einer für $x = 0$ stetigen Funktion für $x = 0$ *konvergent*.

Es gilt ferner der

Hauptsatz B. *Es sei $f(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte, in jedem endlichen Intervall eigentlich integrable und für $x \to +\infty$ beschränkte Funktion. Ihre Entwicklung nach den Laguerreschen Polynomen $L_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha > -1$,*

---

[9]) Journal de mathématique (9) **3** (1924), S. 107–187.

habe die Partialsummen $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x), \ldots$. *Es sei* $x > 0$ *und* h *eine feste positive Zahl, für welche* $h < \sqrt{x}$ *ist. Dann gilt*

$$s_n(x) = \pi^{-1} \int_{\sqrt{x}-h}^{\sqrt{x}+h} f(\tau^2) \frac{\sin 2\sqrt{n}\,(\sqrt{x}-\tau)}{\sqrt{x}-\tau} d\tau + \varepsilon_n(x),$$

wo $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(x) = 0$. *D. h. die n-te Partialsumme der fraglichen Entwicklung verhält sich auf Konvergenz, Summabilität usw. hin genau so wie die* $[2\sqrt{n}]$*-te Partialsumme der Fourierschen Reihe einer Funktion, die in der Umgebung von* $\sqrt{x}$ *mit* $f(\tau^2)$ *übereinstimmt, an der Stelle* $\sqrt{x}$.

Die Konvergenz von $\varepsilon_n(x)$ *gegen 0 geschieht gleichmäßig in jedem endlichen, positiven Intervall* $a \leqq x \leqq b$, *vorausgesetzt, daß* $0 < h < \sqrt{a}$ *gilt.*

In § 1 werden einige Hilfssätze elementarer Natur über die Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ vorausgeschickt, die bereits ausreichen, um in § 2 den Fall $x = 0$ erledigen (d. h. den Hauptsatz A beweisen) zu können. Ein Haupthilfsmittel bildet hier und bei dem Beweis der asymptotischen Sätze von § 3 eine Integraldarstellung der Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ (vgl. unten (6)). Daraufhin wird in § 4 der Fall $x > 0$ (Hauptsatz B) erledigt. § 5 enthält verschiedene Bemerkungen. Die wichtigste unter diesen ist, daß die Hauptsätze auch dann in Gültigkeit bleiben, wenn $f(x)$ für $x \to +\infty$ nicht beschränkt bleibt, sondern wie eine Potenz von x anwächst. In § 6 werden die vorhergehenden Sätze auf die nahe verwandten Entwicklungen nach den Hermiteschen Polynomen angewandt.

Bezüglich der bisherigen Literatur über die hierher gehörigen Entwicklungssätze sei auf die Fußnote [17]) verwiesen. Aus den vorliegenden Resultaten folgen diese restlos, abgesehen von den Voraussetzungen bezüglich der zu entwickelnden Funktion $f(x)$ im Unendlichen: manche von den dort zitierten Arbeiten (insbesondere diejenigen, welche mit Integralgleichungen operieren) verlangen von $f(x)$ für $x \to \infty$ etwas weniger als es hier geschieht; dafür machen sie an der Entwicklungsstelle für $f(x)$ spezielle Stetigkeitsvoraussetzungen.

Der zweite Teil dieser Untersuchung soll Anwendungen der Theorie der Laguerreschen Polynome bringen, die in der Richtung der analytischen Zahlentheorie liegen.

§ 1.

Über die Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$.

1. Aus der Definition (L) der Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ lassen sich unschwer folgende Eigenschaften ableiten. Es ist

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x) \tag{1}$$

und

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \qquad (\alpha \text{ beliebig; } n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Es besteht ferner die Rekursionsformel

$$n L_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^{(\alpha)}(x)$$
$$(n = 2, 3, 4, \ldots; \; L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \; L_1^{(\alpha)}(x) = \alpha + 1 - x),$$

woraus für $\alpha > -1$ die „Christoffelsche Formel“

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{L_\nu^{(\alpha)}(x) L_\nu^{(\alpha)}(y)}{\Gamma(\alpha+1)\binom{\nu+\alpha}{\nu}} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(y) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y)}{x-y} \tag{3}$$

folgt.

Da $\Re\left(-\frac{1}{2} - \frac{z}{1-z}\right) < 0$ gilt, wenn $|z| < 1$ ist, folgt aus (L) für $\alpha \geqq -1$

$$e^{-\frac{x}{2}} |L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \binom{n+\alpha+1}{n} \quad \text{für} \quad x \geqq 0.^{10}) \tag{4}$$

2. Im folgenden bezeichnet

$$J_\alpha(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{y}{2}\right)^{\alpha+2m}$$

die Besselsche Funktion erster Art α-ter Ordnung (α reell). Es ist bekanntlich für $y \to +\infty$

$$J_\alpha(y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right). \tag{5, 1}$$

Es ist ferner für beliebige komplexe y, $y \to \infty$,

$$J_\alpha(y) = O\left(\frac{e^{|y|}}{|y|^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{5, 2}$$

Aus der Definition folgt

$$J_\alpha(y) = O(y^\alpha) \quad \text{für} \quad y > 0, \; y \to 0. \tag{5, 3}$$

3. Unser Haupthilfsmittel bildet im folgenden der

---

[10]) Bei Benützung der zuerst von mir bewiesenen Ungleichung $e^{-\frac{x}{2}} |L_n^{(0)}(x)| \leqq 1$, $x \geqq 0$ [Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 341–356] könnte man anstatt (4) folgendes zeigen:

$$e^{-\frac{x}{2}} |L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \begin{cases} \binom{n+\alpha}{n} & \text{für} \quad \alpha \geqq 0, \; x \geqq 0; \\ 2 - \binom{n+\alpha}{n} & \text{für} \quad -1 \leqq \alpha \leqq 0, \; x \geqq 0. \end{cases}$$

Satz. *Es sei α reell, x positiv, n positiv ganz und $n+\alpha>-1$. Dann gilt die Formel*

$$e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\omega}\,\omega^{n+\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{\omega x})\,d\omega. \tag{6}$$ [11]

Beweis. Für $|z|<1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)\right)z^n=x^{\frac{\alpha}{2}}\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}\frac{x^{\frac{\alpha}{2}+m}}{(1-z)^{\alpha+m+1}},$$

so daß

$$\begin{aligned}e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{\frac{\alpha}{2}+m}}{\Gamma(m+1)}\binom{n+\alpha+m}{n}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{\frac{\alpha}{2}+m}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\alpha+1)}\,\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\omega}\,\omega^{n+\alpha+m}\,d\omega,\end{aligned}$$ [12]

woraus durch Vertauschung der Reihenfolge der Summation und Integration (was wegen (5, 2) erlaubt ist) die Behauptung folgt.

4. Aus (6) ergibt sich leicht wegen (5, 1)

$$L_n^{(\alpha)}(x)=O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \tag{7}$$

für festes x, $x>0$, und zwar gleichmäßig in jedem positiven Intervall (vgl. unten (9)). Wir brauchen im folgenden außerdem, daß bei festem x, $x>0$, $\alpha>-1$,

$$\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha\,|L_n^{(\alpha)}(t)|\,dt=O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right), \tag{8, 1}$$

ferner, daß

$$\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha\,|L_n^{(\alpha-1)}(t)|\,dt=O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) \tag{8, 2}$$

ist. Man schließt dies aus (6) folgendermaßen. Nach der Schwarzschen Ungleichung gilt für $t>0$

$$\begin{aligned}e^{-2t}t^\alpha\,(L_n^{(\alpha)}(t))^2&<\left(\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\omega}\,\omega^{n+\frac{\alpha}{2}}\,|J_\alpha(2\sqrt{\omega t})|\,d\omega\right)^2\\&<\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\omega}\,\omega^{n+\alpha}\,(J_\alpha(2\sqrt{\omega t}))^2\,d\omega.\end{aligned}$$

[11] Man findet diese Formel, auf die ich durch die unter [2]) angeführte Arbeit des Herrn S. Wigert aufmerksam geworden bin, bei É. Le Roy, Toulouse Ann. (2) 2 (1900), S. 317–430; vgl. insbesondere S. 379–384.

[12] Ist $m+\alpha$ negativ ganz, so ist das entsprechende Glied durch 0 zu ersetzen.

Nun ist

$$\int_0^x |J_\alpha(2\sqrt{\omega t})|^2 dt = \omega^{-1} \int_0^{\omega x} (J_\alpha(2\sqrt{\tau}))^2 d\tau = O(\omega^{-\frac{1}{2}}),$$

so daß

$$\int_0^x e^{-2t} t^\alpha (L_n^{(\alpha)}(t))^2 dt = O\frac{1}{n!} \int_0^x e^{-\omega} \omega^{n+\alpha-\frac{1}{2}} d\omega = O(n^{\alpha-\frac{1}{2}}).$$

Ähnlich erhält man

$$\int_0^x e^{-2t} t^\alpha (L_n^{(\alpha-1)}(t))^2 dt = O\frac{1}{n!} \int_0^x e^{-\omega} \omega^{n+\alpha-\frac{3}{2}} d\omega = O(n^{\alpha-\frac{3}{2}}),$$

woraus nach der Schwarzschen Ungleichung (8, 1) und (8, 2) folgt[13].

Gleichfalls mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung schließt man aus den beiden letzten Ungleichungen, daß

$$\int_0^\xi e^{-t} t^\alpha |L_n^{(\alpha)}(t)| dt < A\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \qquad (\alpha > -1) \tag{8, 3}$$

und

$$\int_0^\xi e^{-t} t^\alpha |L_n^{(\alpha-1)}(t)| dt < A\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} \qquad (\alpha > -1), \tag{8, 4}$$

wo $\xi > 0$ beschränkt und A von ξ und n unabhängig ist. Es ist z. B.

$$\left(\int_0^\xi e^{-t} t^\alpha |L_n^{(\alpha)}(t)| dt\right)^2 < \int_0^\xi e^{-t} t^\alpha dt \int_0^\xi e^{-t} t^\alpha (L_n^{(\alpha)}(t))^2 dt$$

$$= \int_0^\xi e^{-t} t^\alpha dt \cdot O\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right),$$

und ähnlich wird (8, 4) bewiesen.

Ähnlich zeigt man, daß bei festem x, $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-2t} (L_n^{(\alpha)}(t))^2 dt = \begin{cases} O\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) & \text{für } \alpha < \frac{1}{2}, \\ O(\log n) & \text{für } \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

und

$$\int_0^x e^{-t} |L_n^{(\alpha)}(t)| dt = \begin{cases} O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) & \text{für } \alpha < \frac{3}{2}, \\ O\left(n^{\frac{1}{2}} \log n\right) & \text{für } \alpha = \frac{3}{2} \end{cases} \tag{8, 5}$$

[13] Wollte man bloß (8, 1) und (8, 2) beweisen, so könnte man direkt wie im Text ohne die Schwarzsche Ungleichung zum Ziele kommen. Der hier befolgte Beweisgang ist wegen (8, 3) und (8, 4) erforderlich.

gilt. (Für $\alpha < \frac{1}{2}$ folgt (8, 5) aus der vorigen Abschätzung mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung.) Schließlich gilt

$$(8,6) \qquad \int_0^{\xi} e^{-t} |L_n^{(\alpha)}(t)|\, dt < \begin{cases} A\sqrt{\xi}\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} & \text{für } \alpha < \frac{1}{2}, \\ A\sqrt{\xi}\,\sqrt{\log n} & \text{für } \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

wo $\xi > 0$ beschränkt bleibt und A von ξ und n nicht abhängt.

§ 2.

Der Fall $x = 0$.

1. Es sei $f(t)$ für $t \geqq 0$ definiert, ferner in jedem endlichen Intervalle eigentlich integrierbar und für $t \to +\infty$ beschränkt. Dann ist das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t} f(t)\, t^{\alpha+n}\, dt$$

absolut konvergent für $\alpha > -1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Die Entwicklung von $f(x)$ nach den Laguerreschen Polynomen

$$(*) \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{(\alpha)}(x), \qquad c_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} f(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, dt$$

reduziert sich für $x = 0$ auf die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} c_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} f(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, dt,$$

da $L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}$ ist. Die k-ten Cesàroschen Mitteln der Partialsummen lauten wegen (L):

$$\frac{1}{\binom{n+k}{n}} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} f(t)\, L_n^{(\alpha+k+1)}(t)\, dt.$$

Wir beweisen nun den

Satz. *Es sei $\alpha > -1$. Die Folge der Lebesgueschen Konstanten*

$$\varrho_n^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} |L_n^{(\alpha+k+1)}(t)|\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist für $k > \alpha + \frac{1}{2}$ beschränkt und für $k = \alpha + \frac{1}{2}$ unbeschränkt.

Beweis. Es ist nach (6)

$$\varrho_n^{(k)} \leqq \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{n!} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty \int_0^\infty t^\alpha \cdot t^{-\frac{\alpha+k+1}{2}} e^{-\omega} \omega^{n+\frac{\alpha+k+1}{2}} |J_{\alpha+k+1}(2\sqrt{\omega t})| \, d\omega \, dt.$$

Wir zeigen zunächst, daß für $k > \alpha + \frac{1}{2}$ das rechtsstehende Integral konvergiert. Integration nach t liefert nämlich, $\omega > 0$,

$$\int_0^\infty t^{\frac{\alpha-k-1}{2}} |J_{\alpha+k+1}(2\sqrt{\omega t})| \, dt = \omega^{\frac{-\alpha+k-1}{2}} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha-k-1}{2}} |J_{\alpha+k+1}(2\sqrt{\tau})| \, d\tau,$$

und das letzte Integral konvergiert, weil der Integrand

$$= O\left(\tau^{\frac{\alpha-k-1}{2}} \cdot \tau^{\frac{\alpha+k+1}{2}}\right) = O(\tau^\alpha) \text{ ist für } \tau \to +0$$

und

$$= O\left(\tau^{\frac{\alpha-k-1}{2}} \cdot \tau^{-\frac{1}{4}}\right) = O\left(\tau^{\frac{\alpha+\frac{1}{2}-k}{2}-1}\right) \text{ für } \tau \to +\infty.$$

Wir haben somit

$$\varrho_n^{(k)} = O\frac{1}{n^k n!} \int_0^\infty e^{-\omega} \omega^{n+\frac{\alpha+k+1}{2}} \cdot \omega^{\frac{-\alpha+k-1}{2}} d\omega$$

$$= O\left(\frac{1}{n^k n!} \Gamma(n+k+1)\right) = O(1),$$

w. z. b. w.

Es sei nun $k = \alpha + \frac{1}{2}$. Dann ist

$$\varrho_n^{(\alpha+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\binom{n+\alpha+\frac{1}{2}}{n}} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{n}} t^\alpha \left| L_n^{(2\alpha+\frac{3}{2})}\left(\frac{t}{n}\right)\right| dt.$$

Aus (6) folgt aber gleichmäßig in jedem positiven Intervalle mit $J_\alpha(2\sqrt{t}) \neq 0$:

$$e^{-\frac{t}{n}} \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{n^{n+\frac{\alpha}{2}+1} e^{-n}}{n!} \int_0^\infty (e^{1-\omega}\omega)^n \omega^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{\omega t}) \, d\omega$$

$$\sim \frac{n^{n+\frac{\alpha}{2}+1} e^{-n}}{n!} J_\alpha(2\sqrt{t}) \int_0^\infty (e^{1-\omega}\omega)^n \, d\omega$$

$$= \frac{n^{n+\frac{\alpha}{2}+1} e^{-n}}{n!} J_\alpha(2\sqrt{t}) \cdot n^{-n-1} e^n \Gamma(n+1) = n^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t}).$$

Ersetzt man hier α durch $2\alpha+\frac{3}{2}$, so ergibt sich bei beliebigen a, b mit $0<a<b$

$$\liminf_{n\to\infty} \varrho_n^{(\alpha+\frac{1}{2})} > \frac{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b t^{-\frac{1}{4}} |J_{2\alpha+\frac{3}{2}}(2\sqrt{t})|\, dt.$$

Da das Integral $\int_a^\infty t^{-\frac{1}{4}} |J_{2\alpha+\frac{3}{2}}(2\sqrt{t})|\, dt$ divergiert, so muß

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n^{(\alpha+\frac{1}{2})} = \infty$$

sein [14]).

2. Aus diesen Ergebnissen folgt leicht der in der Einleitung formulierte Hauptsatz A, etwa folgendermaßen. Es sei $f(x)$ für $x=0$ stetig, ε eine beliebige positive Zahl und δ so bestimmt, daß

$$|f(t)-f(0)|<\varepsilon$$

gilt, wenn $0<t\leqq t_0$ ist. Es sei $k>\alpha+\frac{1}{2}$ und h so bestimmt, daß $0<h<\frac{k-(\alpha+\frac{1}{2})}{2}$ ist. Dann ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1}{n^{k-h}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+h} |L_n^{(\alpha+k+1)}(t)|\, dt = O(1)$$

für $n\to\infty$. Nun ist

$$\left| \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha (f(t)-f(0)) L_n^{(\alpha+k+1)}(t)\, dt \right|$$

$$< \varrho_n^{(k)} \varepsilon + \frac{A}{n^k} \int_{t_0}^\infty e^{-t} t^\alpha |L_n^{(\alpha+k+1)}(t)|\, dt$$

$$< \varrho_n^{(k)} \varepsilon + \frac{A t_0^{-h}}{n^k} \int_{t_0}^\infty e^{-t} t^{\alpha+h} |L_n^{(\alpha+k+1)}(t)|\, dt = \varrho_n^{(k)} \varepsilon + O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

(A ist von n unabhängig), woraus die Behauptung folgt.

Die Existenz einer stetigen Funktion $f(x)$ mit für $x=0$ nich $(C, \alpha+\frac{1}{2})$ summablen Entwicklung zeigt man auf eine heute schon geläufige Weise (vgl. A. Haar, Dissertation, Math. Ann. **69** (1910), S. 335 bis 339).

---

[14]) Durch eine ähnliche Rechnung folgt übrigens für $\alpha>-1$, $k>\alpha+\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n^{(k)} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha-k-1}{2}} |J_{\alpha+k+1}(2\sqrt{t})|\, dt$$

$$= 2^{k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \tau^{\alpha-k} |J_{\alpha+k+1}(\tau)|\, d\tau.$$

§ 3.

Asymptotisches über die Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$.

1. Herr Fejér hat im Jahre 1909 auf Grund der erzeugenden Reihe (L) bewiesen, daß für reelles α

$$(9) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right)$$

ist, wobei $x > 0$, $n \to \infty$. Diese asymptotische Formel gilt gleichmäßig in jedem positiven x-Intervalle[15]. Wir brauchen hier zum Beweise des Hauptsatzes B, ferner für die Zwecke der Fortsetzung der vorliegenden Arbeit, etwas mehr, nämlich die gleichmäßige Gültigkeit dieser Formel (ev. mit einem etwas ungünstigeren Restgliede) in dem mit n veränderlichen Intervalle

$$n^{-\delta} \leqq x \leqq n^{\varepsilon},$$

wo δ und ε positive Zahlen sind; hierbei ist $\delta < 1$, ε wird noch später eingeschränkt.

Wir gehen zu diesem Ende von der schärferen asymptotischen Formel aus:

$$(10) \quad J_\alpha(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos\left(y - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\right) \quad \text{für } y \to +\infty.$$

Für die besagten x-Werte gilt dann nach der Stirlingschen Formel:

$$\frac{1}{n!}\int_0^{n^\delta} e^{-\omega}\omega^{n+\alpha} J_\alpha(2\sqrt{\omega x})\, d\omega = O\left(e^{-a n \log n}\right),$$

wo für a eine beliebige positive Zahl mit $a < 1 - \delta$ gesetzt werden kann. Es ist also

[15] L. Fejér, Comptes rendus 147 (1908), S. 1049. Math. és term. tud. Ert. 27 (1909), S. 1–33. Später hat O. Perron, Arch. der Math. und Phys. (3) 22 (1914), S. 329–340 eine analoge asymptotische Formel für komplexe x gegeben; vgl. außerdem O. Perron, Journal für die r. u. a. Mathematik 151 (1921), S. 63–78 (vgl. insbesondere § 5, S. 76–78), wo für $L_n^{(\alpha)}(x)$ sogar eine semikonvergente Entwicklung hergeleitet wird. Auf Grund des im Texte befolgten Gedankenganges (Anwendung von (6)) ließe sich übrigens auch ein Beweis für diese Perronschen Sätze ausarbeiten. — Vgl. noch G. Faber, Sitzungsberichte der bayr. Akad. der Wiss. 1922, S. 285–304, wo übrigens die Entwicklungsfrage aufgeworfen wird.

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}\int_{n^\delta}^{\infty} e^{-\omega}\omega^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{\omega x})\,d\omega + O(e^{-an\log n})$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{n^\delta}^{\infty} e^{-\omega}\omega^{n+\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2}{2\pi\sqrt{\omega x}}}\cos\left(2\sqrt{\omega x}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)d\omega$$

$$+ O\left(\frac{1}{n!}\int_{n^\delta}^{\infty} e^{-\omega}\omega^{n+\frac{\alpha}{2}}(\omega x)^{-\frac{3}{4}}\,d\omega\right) + O(e^{-an\log n}).$$

Das vorletzte Glied ist hier gleich $x^{-\frac{3}{4}} O(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}})$; es ist ferner

$$\frac{1}{n!}\int_{0}^{n^\delta} e^{-\omega}\omega^{n+\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2}{2\pi\sqrt{\omega x}}}\cos\left(2\sqrt{\omega x}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)d\omega = O(e^{-an\log n}),$$

so daß

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \tag{11}$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}}}{n!}\int_{0}^{\infty} e^{-\omega}\omega^{n+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left(2\sqrt{\omega x}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)d\omega + x^{-\frac{3}{4}} O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right).$$ [16]

Wir untersuchen nun das „kritische Glied“

$$\pi^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} \frac{n^{n+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}} e^{-n}}{n!}\int_{0}^{\infty} (e^{1-\omega}\omega)^n \omega^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left(2\sqrt{n\omega x}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)d\omega,$$

indem wir $\eta = n^{-\varrho}$ setzen, wo $\frac{1}{3} < \varrho < \frac{1}{2}$ ist und denjenigen Teil des Integrals abspalten, der dem Intervall $1-\eta,\ 1+\eta$ entspricht. Der Rest kann wegen der Stirlingschen Formel in das O-Glied aufgenommen werden. Es ist ferner gleichmäßig für $1-\eta \leqq \omega \leqq 1+\eta$,

$$\left\{\begin{aligned} (e^{1-\omega}\omega)^n &= (e^{1-\omega+\log[1-(1-\omega)]})^n = e^{-\frac{n}{2}(1-\omega)^2}(1+O(n\eta^3)),\\ \omega^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} &= 1+O(\eta) = 1+O(n\eta^3),\\ \sqrt{n\omega x} &= \sqrt{nx}\left(1-\frac{1-\omega}{2}+O(\eta^2)\right)\\ &= \sqrt{nx}-\frac{\sqrt{nx}}{2}(1-\omega)+O(n^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\eta^2). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Wählt man also ε und ϱ derart, daß $\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2} - \varrho$, dann ist $n^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\eta^2 < n\eta^3$

[16] Integrale von der Form (11) sind bereits 1906 von Adamoff asymptotisch untersucht worden. Vgl. Ann. de l'Inst. Polytechnique de St. Pétersbourg 5 (1906), S. 127–143. Er hat wohl zum erstenmal eine asymptotische Formel für die Hermiteschen Polynome (vgl. § 6) aufgestellt.

und

$$\cos\left(2\sqrt{n\omega x}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\sqrt{nx}-\sqrt{nx}(1-\omega)-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(n\eta^3).$$

Es ist somit

$$e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)$$

$$=\pi^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}\frac{n^{n+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}e^{-n}}{n!}\int_{1-\eta}^{1+\eta}e^{-\frac{n}{2}(1-\omega)^2}\left[\cos\left(2\sqrt{nx}-\sqrt{nx}(1-\omega)-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left.+O(n^{1-3\varrho})\right]d\omega+x^{-\frac{3}{4}}O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right)$$

Man hat aber

$$\int_{1-\eta}^{1+\eta}e^{-\frac{n}{2}(1-\omega)^2}d\omega=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\eta\sqrt{n}}^{\eta\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{2\pi}{n}}+O\left(e^{-\frac{1}{4}n^{1-2\varrho}}\right),$$

ferner

$$\int_{1-\eta}^{1+\eta}e^{-\frac{n}{2}(1-\omega)^2}\cos\left(2\sqrt{nx}-\sqrt{nx}(1-\omega)-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\eta\sqrt{n}}^{\eta\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\sqrt{x}t\right)dt$$

$$=\frac{\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{n}}\int_{-\eta\sqrt{n}}^{\eta\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\sqrt{x}\,t\,dt$$

$$=e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(e^{-\frac{1}{4}n^{1-2\varrho}}\right),$$

da die Integralformel $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\xi t\,dt=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ gilt. Es ergibt sich also mit Beachtung der Stirlingschen Formel

$$e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)$$

$$=\frac{n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(n^{\frac{1}{2}-3\varrho}\right)\right)$$

$$+x^{-\frac{3}{4}}O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right)$$

$$=\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+x^{-\frac{1}{4}}O\left(n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}-3\varrho}\right)$$

$$+x^{-\frac{3}{4}}O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right).$$

Die Exponenten δ, ε und ϱ waren bisher den folgenden Bedingungen unterworfen:

$$0 < \delta < 1, \qquad \frac{1}{3} < \varrho < \frac{1}{2}, \qquad 0 < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2} - \varrho.$$

Die beiden letzten Bedingungen bedeuten, daß $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ sein muß. Ist umgekehrt ε vorgegeben und $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, dann unterliegt ϱ den Ungleichungen $\frac{1}{3} < \varrho < \frac{1-\varepsilon}{2}$. Der Exponent im ersten O-Gliede kann somit an $\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3\varepsilon}{2}$ (von oben) beliebig nahe gebracht werden. Wir erhalten also das folgende Endresultat.

Es sei $0 < \delta < 1$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, $\varkappa > \frac{3\varepsilon}{2}$. *Dann gilt für* $n \to \infty$

$$(9') \quad e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + R_n,$$

wobei

$$R_n = x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) + x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}+\varkappa}\right)$$

und

$$n^{-\delta} \leqq x \leqq n^{\varepsilon}$$

ist.

Selbtverständlich kann die letzte Bedingung bezüglich x durch die allgemeinere $cn^{-\delta} \leqq x \leqq cn^{\varepsilon}$ ersetzt werden, wobei c eine feste positive Zahl bedeutet.

2. Durch eine kleine Modifikation der vorigen Rechnung gelangt man auch sofort zu der Fejérschen Formel (9). Es sei nämlich x in einem festen, positiven Intervall veränderlich; η habe die obige Bedeutung und es sei $1 - \eta \leqq \omega \leqq 1 + \eta$. Man ersetze die Formeln (12) durch

$$(12') \quad \begin{cases} (e^{1-\omega}\omega)^n = e^{-\frac{n}{2}(1-\omega)^2}(1 + (1-\omega)^3 O(n)), \\ \omega^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} = 1 + (1-\omega) O(1), \\ \sqrt{n\omega x} = \sqrt{nx} - \frac{\sqrt{nx}}{2}(1-\omega) + (1-\omega)^2 O(\sqrt{n}), \end{cases}$$

wo die O-Glieder in ω gleichmäßig gemeint sind. Aus der letzten Reihe schließen wir

$$\cos\left(2\sqrt{n\omega x} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(2\sqrt{nx} - \sqrt{nx}(1-\omega) - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + (1-\omega)^2 O(\sqrt{n}).$$

Es ist somit

$$e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}\frac{n^{n+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}e^{-n}}{n!}\int_{1-\eta}^{1+\eta}e^{-\frac{n}{2}(1-\omega)^2}\left[\cos\left(2\sqrt{nx}-\sqrt{nx}(1-\omega)-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left.+(1-\omega)^3O(n)+(1-\omega)^2O(\sqrt{n})+(1-\omega)O(1)\right]d\omega+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right).$$

Man hat aber

$$\int_{1-\eta}^{1+\eta}e^{-\frac{n}{2}(1-\omega)^2}[(1-\omega)^3O(n)+(1-\omega)^2O(\sqrt{n})+(1-\omega)O(1)]\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\eta\sqrt{n}}^{\eta\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}}\left[t^3O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+t^2O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+tO\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]dt=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

woraus die Behauptung folgt.

3. Setzt man

$$\varphi_n^{(\alpha)}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

so gilt nach (9) gleichmäßig in jedem positiven Intervalle

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\varphi_n^{(\alpha)}(x)+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right).$$

Es ist, wie wir noch zeigen wollen, gleichmäßig für $a\leqq\frac{x}{t}\leqq b$, $a>0$,

$$\frac{L_n^{(\alpha)}(x)-L_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}=\frac{\varphi_n^{(\alpha)}(x)-\varphi_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right). \tag{13}$$

In der Tat ist

$$\frac{L_n^{(\alpha)}(x)-L_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}-\frac{\varphi_n^{(\alpha)}(x)-\varphi_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}=L_n^{(\alpha)'}(\xi)-\varphi_n^{(\alpha)'}(\xi)$$

mit $a<\xi<b$. Es ist ferner

$$\varphi_n^{(\alpha)'}(\xi)=-\pi^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\xi}{2}}\xi^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\sin\left(2\sqrt{n\xi}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$$

$$=-\pi^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\xi}{2}}\xi^{-\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{4}}(n-1)^{\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{4}}\sin\left(2\sqrt{(n-1)\xi}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$$

$$=-\varphi_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right).$$

Wegen (2) und (9) folgt hieraus die Behauptung.

Es sei bemerkt, daß das erste Glied auf der rechten Seite von (13) gleich $O\left(n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\right)$ ist.

§ 4.

Der Fall $x > 0$.

1. Die Funktion $f(t)$ sei denselben Bedingungen wie in § 2 unterworfen. Die n-te Partialsumme unserer Entwicklung (*) lautet wegen (3)

$$(14)\quad s_n(x) = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha f(t) \frac{L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(t) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(t)}{x-t} dt.$$

Es sei $a \leqq x \leqq b$, $a > 0$, $0 < h < a$. Wir zerlegen $s_n(x)$ (für genügend große n) in folgende Bestandteile:

$$I = \int_0^\xi, \quad II = \int_\xi^{x-h}, \quad III = \int_{x-h}^{x+h}, \quad IV = \int_{x+h}^{n^\varepsilon}, \quad V = \int_{n^\varepsilon}^\infty,$$

wo $0 < \xi < x-h$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ (so daß (9′) im Intervall ξ, n^ε anwendbar ist); über ε wird noch später genauer verfügt. Wir zeigen, daß I für alle n unterhalb einer Schranke bleibt, die mit $\xi \to 0$ gegen 0 geht. Es wird sich ferner leicht ergeben, daß bei passender Wahl von ε die Integrale *II*, *IV* und *V* für $n \to \infty$ gegen 0 gehen, so daß der wesentliche Teil von $s_n(x)$ durch *III* gegeben ist.

Man hat zunächst wegen (1)

$$\begin{aligned} &L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(t) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(t) \\ &\quad = (L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)) L_{n+1}^{(\alpha)}(t) + L_{n+1}^{(\alpha)}(x) (L_{n+1}^{(\alpha)}(t) - L_n^{(\alpha)}(t)) \\ &\quad = -L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(t) + L_{n+1}^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha-1)}(t). \end{aligned}$$

Nach (7), (8, 3), (8, 4) ist also

$$\begin{aligned} I &= O(n^{1-\alpha}) O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) O\left(\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) + O(n^{1-\alpha}) O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) O\left(\xi^{\frac{\alpha+1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) \\ &= O\left(\xi^{\frac{\alpha+1}{2}}\right), \end{aligned}$$

und zwar gleichmäßig in x, $a \leqq x \leqq b$.

Bei der Abschätzung von *II* und *IV* wird (9′) benutzt. Es gilt nach der obigen Umformung

$$\begin{aligned} II + IV &= O(n^{1-\alpha}) O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) \int \frac{e^{-t} t^\alpha f(t)}{x-t} L_{n+1}^{(\alpha)}(t) dt \\ &\quad + O(n^{1-\alpha}) O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \int \frac{e^{-t} t^\alpha f(t)}{x-t} L_{n+1}^{(\alpha-1)}(t) dt, \end{aligned}$$

wo beide Integrale (i_n' und i_n'') über die Intervalle zu erstrecken sind, auf die sich *II* und *IV* beziehen. Nun ist nach (9′)

$$i_n' = \pi^{-\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \int \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} f(t)}{x-t} \cos\left(2\sqrt{(n+1)t} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dt$$
$$+ O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) \int t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} dt + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}+\varkappa}\right) \int t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} dt \qquad \left(\varkappa > \frac{3\varepsilon}{2}\right).$$

Das erste Glied ist hier $= o\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$, und zwar gleichmäßig in x, $a \leqq x \leqq b$, weil doch für eine im Intervall $0, \infty$ absolut integrable Funktion $\varphi(t)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(t)\, e^{i\sqrt{nt}}\, dt = 0,$$

oder allgemeiner

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon_n}^{\omega_n} \varphi(t)\, e^{i\sqrt{nt}}\, dt = 0$$

gilt, wenn $\varepsilon_n \to 0$, $\omega_n \to \infty$. Ferner ist das zweite Glied gleich

$$O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) O\left(n^{\varepsilon\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)}\right) = o\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right),$$

sofern $\varepsilon\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)$ positiv und $< \frac{1}{2}$ ist. (Für $\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4} \leqq 0$ ist es erst recht $= o\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$.) Schließlich lautet das dritte Glied

$$O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}+\varkappa}\right) O\left(n^{\varepsilon\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)}\right) = o\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right),$$

wenn $\varkappa + \varepsilon\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right) < \frac{1}{2}$ ist, was man durch passendes $\varkappa$ stets erreichen kann, sofern $\varepsilon\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{9}{4}\right) < \frac{1}{2}$ gilt. Es ist also dann $i_n' = o\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$.

Ähnlich zeigt man $i_n'' = o\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right)$, indem man ε die Bedingung $\varepsilon\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{11}{4}\right) < \frac{1}{2}$ auferlegt. (Hieraus folgt übrigens $\varepsilon < \frac{2}{9}$.) Dann ist also gleichmäßig für $a \leqq x \leqq b$

$$II + IV = o(1).$$

Zuletzt wird V vermöge (4) abgeschätzt. Es gilt wegen (14)

$$V = O(n^{1-\alpha})\, O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) O(n^{\alpha+1}) \int_{n^r}^\infty e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha-1}\, dt = o(1),$$

womit

$$s_n(x) = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_{x-h}^{x+h} e^{-t} t^\alpha f(t)\, \frac{L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(t) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}\, dt + o(1)$$

bewiesen ist. Das Restglied konvergiert für $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig gegen Null.

2. Wegen (1) ist weiter folgende Umformung klar:

$$\frac{L_n^{(\alpha)}(x)\,L_{n+1}^{(\alpha)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}$$

$$=\frac{L_n^{(\alpha)}(x)-L_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}\,L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)-\frac{L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(t)}{x-t}\,L_n^{(\alpha)}(x).$$

Durch Anwendung von (9), (13) schließt man, daß dieser Ausdruck $= O\left(n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}+n^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)=O\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$ ist. Er ist ferner durch den entsprechenden Ausdruck in den $\varphi_n^{(\alpha)}(x)$ zu ersetzen mit einem Fehler von der Größenordnung

$$O\left(n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{3}{4}}+n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}+n^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}+n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$$
$$=O(n^{\alpha-1}).$$

Da endlich

$$\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}=n^{1-\alpha}+O(n^{-\alpha})$$

ist, so gilt die folgende Formel:

$$s_n(x)=n^{1-\alpha}\int_{x-h}^{x+h}e^{-t}t^{\alpha}f(t)\left(\frac{\varphi_n^{(\alpha)}(x)-\varphi_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}\,\varphi_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)-\frac{\varphi_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)-\varphi_{n+1}^{(\alpha-1)}(t)}{x-t}\,\varphi_n^{(\alpha)}(x)\right)dt$$
$$+o(1)+hO(1)$$
$$=n^{1-\alpha}\int_{x-h}^{x+h}e^{-t}t^{\alpha}f(t)\,\frac{\varphi_n^{(\alpha)}(x)\,\varphi_{n+1}^{(\alpha-1)}(t)-\varphi_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)\,\varphi_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}\,dt+o(1)+hO(1),$$

wobei das Glied $O(1)$ von h unabhängig ist. Wir schreiben dafür im folgenden $O(h)$. D. h.

$$s_n(x)=\pi^{-1}n^{1-\alpha}\cdot n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\int_{x-h}^{x+h}\frac{e^{\frac{x-t}{2}}(xt)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{x-t}\,t^{\alpha}f(t)$$
$$\left(-t^{\frac{1}{2}}\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2\sqrt{(n+1)t}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.+x^{\frac{1}{2}}\sin\left(2\sqrt{(n+1)x}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2\sqrt{nt}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)dt$$
$$+o(1)+O(h).$$

Die Anwendung des Riemannschen Lemma zeigt, daß

$$s_n(x)=\pi^{-1}x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\int_{x-h}^{x+h}e^{\frac{x-t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}f(t)\cdot$$
$$\frac{-\cos\left(2\sqrt{nx}-\alpha_0\right)\sin\left(2\sqrt{(n+1)t}-\alpha_0\right)+\sin\left(2\sqrt{(n+1)x}-\alpha_0\right)\cos\left(2\sqrt{nt}-\alpha_0\right)}{x-t}\,dt$$
$$+o(1)+O(h),$$

wobei $\alpha_0 = \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Setzt man ferner $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \vartheta$, so läßt sich der „Kern" des letzten Integrals folgendermaßen umformen:

$$\cos(2\sqrt{nx} - \alpha_0)\cos(2\sqrt{nt} - \alpha_0)\,\frac{\sin\vartheta\sqrt{x} - \sin\vartheta\sqrt{t}}{x-t}$$

$$+ \cos(2\sqrt{nx} - \alpha_0)\sin(2\sqrt{nt} - \alpha_0)\,\frac{\cos\vartheta\sqrt{x} - \cos\vartheta\sqrt{t}}{x-t}$$

$$+ \cos\vartheta\sqrt{x}\,\frac{\sin(2\sqrt{nx} - \alpha_0)\cos(2\sqrt{nt} - \alpha_0) - \cos(2\sqrt{nx} - \alpha_0)\sin(2\sqrt{nt} - \alpha_0)}{x-t}.$$

Es gilt aber

$$\left|\frac{\sin\vartheta\sqrt{x} - \sin\vartheta\sqrt{t}}{x-t}\right| \leqq \frac{\vartheta}{\sqrt{x}+\sqrt{t}}, \qquad \left|\frac{\cos\vartheta\sqrt{x} - \cos\vartheta\sqrt{t}}{x-t}\right| \leqq \frac{\vartheta}{\sqrt{x}+\sqrt{t}},$$

ferner $\vartheta \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, so daß

$$s_n(x) = \pi^{-1} x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \int_{x-h}^{x+h} e^{\frac{x-t}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} f(t)\,\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{x-t}\,dt + o(1) + O(h).$$

(Dieses Integral ist bekanntlich $= O(\log n)$, so daß das Ersetzen von $\cos\vartheta\sqrt{x}$ durch 1 gerechtfertigt ist.)

Hieraus schließt man zunächst leicht, daß $O(h)$ ganz fortgelassen werden kann. Es sei nämlich $h > 0$ fest, $0 < h' < h$. Da das obige Integral, erstreckt über $x-h$, $x-h'$ bzw. $x+h'$, $x+h$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, ist

$$\limsup_{n\to\infty} \left| s_n(x) - \pi^{-1} x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \int_{x-h}^{x+h} e^{\frac{x-t}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} f(t)\,\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{x-t}\,dt \right|$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left| s_n(x) - \pi^{-1} x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \int_{x-h'}^{x+h'} e^{\frac{x-t}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} f(t)\,\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{x-t}\,dt \right|$$

$$= O(h').$$

Da aber h' beliebig klein ist, muß der fragliche lim sup gleich 0 sein. Beachtet man ferner, daß

$$\frac{x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{\frac{x-t}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} - 1}{x-t} f(t)$$

eigentlich integrabel ist, so folgt bei beliebigem h, $0 < h < x$, für $n \to \infty$

$$s_n(x) = \pi^{-1} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{x-t}\, dt + o(1)$$

$$= \pi^{-1} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{x}-\sqrt{t}} \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$+ \pi^{-1} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \frac{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{x}-\sqrt{t}} \sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})\, dt + o(1)$$

$$= \pi^{-1} \int_{\sqrt{x-h}}^{\sqrt{x+h}} f(\tau^2) \frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\tau)}{\sqrt{x}-\tau}\, d\tau + o(1),$$

womit der Hauptsatz B bewiesen ist. Das Restglied konvergiert gleichmäßig gegen Null für $a \leqq x \leqq b$, $a > 0$, $0 < h < a$.

§ 5.

Bemerkungen.

1. Die Hauptsätze A und B gelten auch dann, *wenn $f(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte und in jedem endlichen Intervall eigentlich integrable Funktion ist, die für $x \to \infty$ der Bedingung*

$$f(x) = O(x^M) \tag{15}$$

genügt, wobei M eine positive Zahl bedeutet.

Bei dem Beweis des auf diese Weise verallgemeinerten Hauptsatzes A kommt es nach § 2, 2 auf die Gleichung

$$\frac{1}{n^k} \int_{t_0}^{\infty} e^{-t} t^{\alpha+M} \left| L_n^{(\alpha+k+1)}(t) \right| dt = o(1)$$

an ($\alpha > -1$, $k > \alpha + \frac{1}{2}$, $t_0 > 0$). Wir zerlegen das Integral in zwei Teile: von t_0 bis n^ε und von n^ε bis ∞ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$). Der erste Teil ist wegen (9′)

$$= \frac{1}{n^k} O\left(n^{\frac{\alpha+k+1}{2}-\frac{1}{4}}\right) \int_{t_0}^{n^\varepsilon} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}+M-\frac{k}{2}-\frac{3}{4}}\, dt + \frac{1}{n^k} O\left(n^{\frac{\alpha+k+1}{2}-\frac{3}{4}}\right) \int_{t_0}^{n^\varepsilon} t^{\frac{\alpha}{2}+M-\frac{k}{2}-\frac{5}{4}} d$$

$$+ \frac{1}{n^k} O\left(n^{\frac{\alpha+k+1}{2}-\frac{3}{4}+\varkappa}\right) \int_{t_0}^{n^\varepsilon} t^{\frac{\alpha}{2}+M-\frac{k}{2}-\frac{3}{4}}\, dt$$

$$= O\left(n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}\right) + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}+\varepsilon\left(\frac{\alpha}{2}+M-\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)}\right)$$

$$+ O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}+\varkappa+\varepsilon\left(\frac{\alpha}{2}+M-\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)}\right) \qquad \left(\varkappa > \frac{3\varepsilon}{2}\right).$$

Wählt man ε genügend klein, so ist dieser Teil $= o(1)$, wenn man noch $\varkappa$ passend wählt. Der zweite Teil ist wegen (4)

$$= \frac{1}{n^k} O(n^{\alpha+k+2}) \int_{n^\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha+M}\, dt = o(1),$$

woraus die Behauptung folgt.

Bei der Verallgemeinerung von B ist offenbar nur die Abschätzung des Bestandteiles *IV* in wesentlicherem Maße zu modifizieren. Die Restglieder von i_n' lauten jetzt:

$$O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right)\int t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}+M} dt + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}+\varkappa}\right)\int t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}+M} dt.$$

Dieser Ausdruck ist — wie dort — gleich $o\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$, wenn ε und $\varkappa$ passend gewählt werden.

Ähnlich wird i_n'' abgeschätzt. Damit ist auch die erwähnte Verallgemeinerung von B bewiesen [17]).

2. Eine weitere Verallgemeinerung von B besteht darin, daß man in der Nähe des Punktes $x = 0$ auf die Beschränktheit von $f(x)$ verzichtet und lediglich die Beschränktheit von $x^\alpha f(x)$ fordert (nur für $\alpha > 0$ von Interesse). Nur die Abschätzung von *I* und *II* ist dann zu modifizieren. Wir brauchen im Folgenden (§ 6) diese Verallgemeinsrung für den Spezialfall $\alpha = \frac{1}{2}$. Dann ist (8, 6) anstatt (8, 3) und (8, 4) anzuwenden. Man nimmt zu diesem Zwecke die obige Größe ξ mit n variabel an; es genügt etwa $\xi = (\log n)^{-2}$ zu setzen. Dann ist nach (8, 6) $(\alpha = \frac{1}{2})$

$$I = O(n^{1-\alpha}) O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) O(\sqrt{\xi}\sqrt{\log n}) + O(n^{1-\alpha})\, O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) O\left(\sqrt{\xi}\, n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}\right)$$
$$= O(\sqrt{\xi}\sqrt{\log n}) = o(1).$$

Bei der Abschätzung von i_n' und i_n'' ist zu beachten, daß

$$\int_{\xi}^{n^\varepsilon} t^\lambda\, dt$$

bei beliebigem λ gleich $O(n^\eta)$ ist, wo η positiv und mit ε beliebig klein ist.

Zugleich kann B auch dahin verallgemeinert werden, daß (15) anstatt der Beschränktheit von $f(x)$ vorausgesetzt wird.

---

[17]) Bezüglich der Literatur über Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach Laguerreschen und Hermiteschen Polynomen sei auf das Verzeichnis bei H. Hamburger, a. a. O. [2]), verwiesen. S. Wigert beweist ferner a. a. O. [2]) die Abelsche Summierbarkeit der Entwicklung nach den Laguerreschen Polynomen $L_n^{(0)}(x)$ an jeder Stelle $x \geqq 0$, wo $f(x)$ stetig ist. Der im Texte bewiesene Satz liefert sämtliche bisher bekannten Entwicklungssätze, abgesehen davon, daß die Bedingung $f(x) = O(x^M)$ manchmal durch eine etwas allgemeinere ersetzt werden kann.

3. Aus B folgt unmittelbar der folgende

Satz. *Es sei $f(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte, in jedem endlichen Intervall eigentlich integrable und für $x \to \infty$ der Bedingung*

$$f(x) = O(x^M)$$

genügende Funktion. Ihre Entwicklung nach den Laguerreschen Polynomen $L_n^{(\alpha)}(x)$ konvergiert in jedem Intervall $a \leqq x \leqq b$ $(a > 0)$, in dem die Funktion $f(x)$ von beschränkter Schwankung ist, und hat

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

zur Summe. Die Konvergenz ist gleichmäßig in jedem Teilintervalle, wo $f(x)$ stetig ist[18]).

4. Aus B schließt man auch leicht, daß *die Entwicklung einer den genannten Bedingungen genügenden Funktion nach den Laguerreschen Polynomen $L_n^{(\alpha)}(x)$ an jeder Stetigkeitsstelle x_0, $x_0 > 0$, in jeder positiven Ordnung C-summabel ist. Es gibt dagegen solche Funktionen mit für $x = x_0$ divergenter Entwicklung.* Der Summabilitätsexponent ist somit an jeder positiven Stelle gleich 0.

Dies folgt aus der a. a. O. [4]) von M. Riesz und S. Chapman bewiesenen analogen Eigenschaft der Fourierschen Reihe bzw. des Fourierschen Integrals mit folgender geringfügiger Modifikation. Es ist nicht nur das Fouriersche Integral

$$G(z) = \pi^{-1} \int_a^b g(u) \frac{\sin z(u-u_0)}{u-u_0}\, du$$

summabel (C, k), $k > 0$, wenn $g(u)$ an der Stelle $u = u_0$ stetig ist, sondern auch $G(2\,|\,\overline{z})$, und zwar beide mit der Summe $g(u_0)$. (Dasselbe gilt natürlich für $G(az^\alpha)$, $a > 0$, $0 < \alpha < 1$.) Am bequemsten wird dies mit Hilfe des folgenden Satzes bestätigt, der von F. Nevanlinna stammt[19]):

An jeder Stetigkeitsstelle $u = u_0$ von $g(u)$ gilt

$$\lim_{z \to +\infty} \int_0^1 \varphi(t)\, G(zt)\, dt = g(u_0),$$

vorausgesetzt, daß die stetige Funktion $\varphi(t)$ folgenden Bedingungen genügt:

1. *$\varphi(t)$ ist positiv für $0 < t < 1$,*
2. $\int_0^1 \varphi(t)\, dt = 1,$

[18]) W. Stekloff, Communications de la soc. math. de Charkow, 1907. Siehe auch R. Neumann, Dissertation, Breslau 1912.

[19]) Översikt av Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingen 64 (1920—1921), Avd. A, Nr. 3; vgl. S. 6.

3. *$\varphi(t)$ ist monoton wachsend für $0 < t < 1$,*

4. *es existiert das Integral*

$$\int_0^1 \varphi(t) \log \frac{1}{1-t}\, dt\,.$$

In dem vorliegenden Falle handelt es sich um den Grenzwert von

$$k\int_0^1 (1-t)^{k-1} G(2\,|\,\overline{zt})\, dt = 2k\int_0^1 (1-t^2)^{k-1} t\, G(2\,|\,\overline{zt}\,)\, dt$$

für $z \to +\infty$ (diese Summationsmethode ist nach einem bekannten Satz von M. Riesz[20]) mit der Summabilität (C, k) äquivalent), und $\varphi(t) = 2k(1-t^2)^{k-1} t$ erfüllt für $0 < k \leqq 1$ die obigen vier Bedingungen[21]).

---

[20]) Comptes rendus **152** (1911), S. 1651.

[21]) Es wäre naturgemäß, den obigen Summabilitätssatz mit Hilfe eines reihentheoretischen Satzes herzuleiten, den ich jedoch in der hier nötigen Allgemeinheit weder in der Literatur finden, noch selbst beweisen konnte. Es sei nämlich $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$ eine wachsende Folge von ganzen Zahlen. Man bilde aus der Folge (s): $s_0, s_1, s_2, \ldots$ eine neue Folge (s'), indem man $s'_n = s_m$ setzt, wenn $\gamma_m \leqq n < \gamma_{m+1}$ ist, indem man also das Glied s_m im ganzen $\gamma_{m+1} - \gamma_m$-mal wiederholt. (Für die entsprechende Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, deren m-te Partialsumme s_m ist, bedeutet dies das Einfügen von $\gamma_{m+1} - \gamma_m - 1$ Nullen *nach* dem Glied a_m; γ_m ist also der „neue" Index von a_m.) Es entsteht dann die Frage, wie die Folge γ_m beschaffen sein muß, damit aus der Summabilität (C, k) von (s) stets die Summabilität (C, k) von (s') folgt.

Dieser Prozeß (von englischen Autoren „dilution" genannt) ist in der Literatur vielfach behandelt worden. Vgl. u. a. G. H. Hardy, Quarterly Journal **38** (1907), S. 269–288, insb. § 6; G. H. Hardy and S. Chapman, ebenda **42** (1911), S. 181 bis 215, insb. § 29; S. Chapman, Proceedings of the London Math. Soc. (2) **9** (1911), S. 369–409, insb. § 27.

Es handelt sich offenbar um die beiden Summationsmethoden:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\nu \leqq x} \left(1 - \frac{\nu}{x}\right)^k a_\nu\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \sum_{\ddot{\nu} \leqq x} \left(1 - \frac{\ddot{\nu}}{x}\right)^k a_\nu\,.$$

[Zusatz während der Korrektur.] Wie mir von mehreren Seiten zugleich mitgeteilt worden ist, enthält die Arbeit des Herrn G. H. Hardy, The second theorem of consistency for summable series (Proceedings of the London Math. Soc. (2) **15** (1916), S. 72–88] eine ziemlich vollständige Beantwortung der in der Fußnote [21]) formulierten Frage. Daraus folgt, daß der im Text herangezogene Satz von F. Nevanlinna tatsächlich entbehrlich und durch reihentheoretische Hilfsmittel ersetzbar ist.

§ 6.

Entwicklung nach den Hermiteschen Polynomen.

Die in der Einleitung (vgl. c)) erwähnten Hermiteschen Polynome lassen sich durch ihre erzeugende Funktion

$$(H) \qquad e^{-z^2-2zx} = H_0(x) + H_1(x)z + H_2(x)z^2 + \cdots + H_n(x)z^n + \cdots$$

definieren, woraus

$$e^{-x^2} H_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

ferner die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \gtrless n \\ \sqrt{\pi}\, 2^n n! & \text{für} \quad m = n \end{cases} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgen.

Bekanntlich ist das n-te Polynom $H_n(x)$ $(n > 0)$ durch die n Bedingungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) x^\nu\, dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Hieraus schließen wir, daß

$$(16) \qquad H_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(-2)^m}{1.3.5 \ldots (2m-1)} L_m^{(-\frac{1}{2})}(x^2) & \text{für} \quad n = 2m, \\ \dfrac{(-2)^{m+1}}{1.3.5 \ldots (2m+1)} x L_m^{(\frac{1}{2})}(x^2) & \text{für} \quad n = 2m+1. \end{cases}$$

In der Tat ist

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m^{(-\frac{1}{2})}(x^2) x^{\nu - \frac{1}{2}}\, dx = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} L_m^{(-\frac{1}{2})}(x^2)\, x^\mu\, dx = 0$$

für $\mu = 2\nu = 0, 2, 4, \ldots, 2m-2$. Für $\mu = 1, 3, 5, \ldots, 2m-1$ ist diese Gleichung klar. Also hat man $H_{2m}(x) = \text{konst.}\, L_m^{(-\frac{1}{2})}(x^2)$. Ähnlich ergibt sich, daß $H_{2m+1}(x) = \text{konst.}\, x L_m^{(\frac{1}{2})}(x^2)$. Die konstanten Faktoren bestimmt man durch Berechnung von $H_{2m}(0)$ bzw. $H'_{2m+1}(0)$.

2. Es sei nun $f(x)$ eine für alle reellen Werte von x definierte, in jedem endlichen Intervall eigentlich integrable Funktion, die für $x \to \infty$ der Bedingung

$$f(x) = O(|x|^M) \qquad (M > 0)$$

genügt. Es sei ferner

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = g(x^2) + xh(x^2).$$

Dann sind $g(t)$ und $h(t)$ in jedem endlichen, positiven Intervall eigentlich integrable, im Unendlichen höchstens wie eine Potenz von t wachsende Funktionen; $g(t)$ ist auch für $t \to 0$ beschränkt, dagegen gilt dies bloß von $t^{\frac{1}{2}}h(t)$. Ich behaupte nun, daß in der Entwicklung von $f(x)$ nach den Hermiteschen Polynomen $H_n(x)$

$$(17) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{\pi}\,2^n} H_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\,dx$$

die Glieder mit geraden Indizes $n = 2m$ genau die Entwicklung von $g(t)$ nach den Laguerreschen Polynomen $L_m^{(-\frac{1}{2})}(t)$ und die mit ungeraden Indizes $n = 2m+1$ genau die Entwicklung von $h(t)$ nach den Polynomen $L_m^{(\frac{1}{2})}(t)$ liefern, wenn man bei den ungeraden Gliedern den gemeinsamen Faktor x abtrennt und $x^2 = t$ setzt. Es ist z. B. für $n = 2m$, da $H_n(x)$ eine gerade Funktion ist,

$$\frac{n!}{\sqrt{\pi}\,2^n} H_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\,dx$$

$$= \frac{(2m)!}{\sqrt{\pi}\,2^{2m}} \frac{2^{2m}}{[1.3.5\ldots(2m-1)]^2} L_m^{(-\frac{1}{2})}(x^2) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} g(t) L_m^{(-\frac{1}{2})}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\binom{m-\frac{1}{2}}{m}} L_m^{(-\frac{1}{2})}(x^2) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} g(t) L_m^{(-\frac{1}{2})}(t)\,dt.$$

Ähnlich zeigt man für $n = 2m+1$,

$$\frac{n!}{\sqrt{\pi}\,2^n} H_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\binom{m+\frac{1}{2}}{m}} x\, L_m^{(\frac{1}{2})}(x^2) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}} h(t) L_m^{(\frac{1}{2})}(t)\,dt.$$

3. Durch die letzte Bemerkung ist die ganze Untersuchung der Entwicklung (17) auf die Entwicklungen nach den Laguerreschen Polynomen $L_m^{(-\frac{1}{2})}(t)$ bzw. $L_m^{(\frac{1}{2})}(t)$ zurückgeführt. Für $x = 0$ reduziert sich (17) genau auf die Entwicklung von $g(t)$ nach den Polynomen $L_m^{(-\frac{1}{2})}(t)$ für $t = 0$. Der Summabilitätsexponent ist somit für $x = 0$ gleich $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

Der Fall $x \neq 0$ muß etwas eingehender betrachtet werden. Wenn $x^2 = t$, ferner $\left[\frac{n}{2}\right] = n'$, $\left[\frac{n-1}{2}\right] = n''$ gesetzt wird, dann gilt für die n-te Partialsumme $S_n(x)$ von (17) nach dem Hauptsatz B und seinen Erweiterungen (vgl. § 5, 1 und wegen $h(t)$ insbesondere § 5, 2) die folgende Darstellung:

$$S_n(x) = \pi^{-1} \int_{\sqrt{t}-h}^{\sqrt{t}+h} g(\tau^2) \frac{\sin 2\sqrt{n'}(\sqrt{t}-\tau)}{\sqrt{t}-\tau} d\tau + \pi^{-1}\sqrt{t} \int_{\sqrt{t}-h}^{\sqrt{t}+h} h(\tau^2) \frac{\sin 2\sqrt{n''}(\sqrt{t}-\tau)}{\sqrt{t}-\tau} d\tau + o(1),$$

wo $0 < h < |\sqrt{t}|$ und $\sqrt{t} = x$ mit dem richtigen Vorzeichen zu nehmen ist. Hieraus schließt man durch Anwendung des Riemannschen Lemmas, daß

$$S_n(x) = \pi^{-1} \int_{x-h}^{x+h} f(\tau) \frac{\sin \sqrt{2n}(x-\tau)}{x-\tau} d\tau + o(1),$$

so daß folgende Sätze gelten:

Es sei $f(x)$ eine für alle reellen Werte von x definierte, in jedem endlichen Intervall eigentlich integrable Funktion, die für $x \to \infty$ der Bedingung

$$f(x) = O(|x|^M) \qquad (M > 0)$$

genügt. Ihre Entwicklung nach den Hermiteschen Polynomen $H_n(x)$ laute:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{n!}{\sqrt{\pi}\, 2^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx.$$

Wenn $f(x)$ für $x = 0$ stetig ist, dann ist diese Entwicklung in jeder positiven Ordnung C-summabel.

Es gibt für $x = 0$ stetige Funktionen, für welche diese Entwicklung an der Stelle $x = 0$ divergiert.

Es sei $S_n(x)$ die n-te Partialsumme der fraglichen Entwicklung. Dann ist, wenn h beliebig, bis auf $0 < h < |x|$,

$$S_n(x) = \pi^{-1} \int_{x-h}^{x+h} f(\tau) \frac{\sin \sqrt{2n}(x-\tau)}{x-\tau} d\tau + o(1).$$

D. h. $S_n(x)$ verhält sich auf Konvergenz, Summabilität usw. hin genau so, wie die $[\sqrt{2n}]$-te Partialsumme der Fourierschen Reihe einer Funktion, die in der Umgebung von x mit $f(x)$ übereinstimmt.

Die Konvergenz des Restgliedes gegen 0 geschieht gleichmäßig in jedem endlichen, $x = 0$ nicht enthaltenden Intervall $a \leqq |x| \leqq b$, wobei $0 < h < a$ sein muß.

Hieraus folgt z. B.:

Die obige Entwicklung konvergiert in jedem, den Punkt $x = 0$ nicht enthaltenden Intervalle, wo $f(x)$ von beschränkter Schwankung ist und hat

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

zur Summe. Die Konvergenz ist gleichmäßig in jedem Teilintervalle, wo $f(x)$ stetig ist.

Die Entwicklung ist ferner auch an jeder von 0 verschiedenen Stetigkeitsstelle $x = x_0$ in jeder positiven Ordnung summabel und es gibt stetige Funktionen mit für $x = x_0$ divergenter Entwicklung.

Der Summabilitätsexponent von (17) ist somit für alle reellen Werte von x gleich 0.

(Eingegangen am 16. Mai 1925.)

Über einen Mittelwertsatz.

Von

Paul v. Szász in Budapest.

Es sei $f(x)$ eine eindeutige reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, die in einem gewissen Intervalle n-mal differenzierbar ist; in diesem Intervalle seien $n+1$ Stellen

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_n$$

gewählt. Sind nun

$$[a_0],\ [a_0, a_1],\ [a_0, a_1, a_2],\ \ldots$$

die Steigungen[1]) der Funktion $f(x)$, d. h.

$$[a_0] = f(a_0), \qquad [a_1] = f(a_1), \ldots$$

$$[a_0, a_1] = \frac{[a_0]-[a_1]}{a_0-a_1}, \qquad [a_1, a_2] = \frac{[a_1]-[a_2]}{a_1-a_2}, \ldots$$

$$[a_0, a_1, a_2] = \frac{[a_0, a_1]-[a_1, a_2]}{a_0-a_2}, \qquad [a_1, a_2, a_3] = \frac{[a_1, a_2]-[a_2, a_3]}{a_1-a_3}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so gibt es nach Cauchy[2]) wenigstens einen Mittelwert ξ zwischen a_0 und a_n, welcher der Gleichung

$$(1) \qquad [a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

[1]) Siehe Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, Julius Springer, 1924, S. 8.

[2]) Cauchy, Sur les fonctions interpolaires, Comptes rendus 11 (1840), S. 784; Œuvres (1) 5, S. 419, Théorème IX. Weitere Literaturangaben bei Nörlund[1]), S. 13 bis 14. Denselben ist jedoch, wie ich einer Mitteilung von Herrn Neder entnehme, hinzuzufügen, daß bereits H. A. Schwarz [vgl. A. Genocchi, Atti Accad. di Torino 16 (1880—81), auf S. 270] die Unzulänglichkeit des Cauchyschen Beweises festgestellt hat; es ist nämlich der Beweis des Korollars II zu C's Theorem VII, auf dem daselbst alles Folgende beruht, unrichtig.

genügt. Die linke Seite von (1) ist in $a_0, a_1, \ldots, a_n$ symmetrisch[3]), es ist nämlich[4])

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(a_i)}{(a_i - a_0) \ldots | \ldots (a_i - a_n)} \cdot \quad (2)$$

[5])

Wenn die Stellen äquidistant liegen, wenn also etwa

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \alpha + l, \quad \ldots, \quad a_n = \alpha + nl$$

ist, läßt sich (1) mit Rücksicht auf (2) auf die Form

$$\Delta^n f(\alpha) = l^n f^{(n)}(\alpha + \vartheta n l) \qquad (0 < \vartheta < 1) \quad (3)$$

bringen, wobei

$$\Delta^n f(\alpha) = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} f(\alpha + (n-\mu)l)$$

ist.

Herr R. Rothe[6]) hat bewiesen, daß in (3) für $l \to 0$

$$\vartheta \to \frac{1}{2}$$

strebt, vorausgesetzt, daß $f^{(n+1)}(x)$ in der Umgebung der Stelle α vorhanden, an dieser Stelle selbst stetig und $\neq 0$ ist.

Hier soll nun gezeigt werden, daß man sich von der Annahme der Stetigkeit befreien und den Satz für den allgemeinen Fall unter (1) verallgemeinern kann. Ich beweise nämlich den

Satz. *Das Intervall, auf welches sich* (1) *bezieht, sei die Umgebung* $(\alpha - h, \alpha + h)$ *der Stelle* α; *ferner sei* $f^{(n+1)}(\alpha)$ *vorhanden und* $\neq 0$. *Für* $h \to 0$ *strebt dann*

$$\frac{1}{h}\left(\xi - \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}\right) \to 0,$$

vorausgesetzt, daß

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} \geqq \varrho > 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (4)$$

ist, wobei ϱ *einen konstanten positiven Wert bedeutet* (*der naturgemäß* $\leqq \frac{2}{n}$ *ist.*)

Oder ausführlicher: Es gibt zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ derart, daß für jeden der Gleichung (1) genügenden Zwischenwert ξ die Ungleichung

$$\frac{1}{h}\left|\xi - \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}\right| < \varepsilon$$

---

[3]) Cauchy[2]), S. 777 resp. 412, 3° Théorème.

[4]) Vgl. etwa Nörlund[1]), S. 8, Formel (19).

[5]) Das Zeichen | bedeutet, daß im Nenner $(a_i - a_i)$ fehlt.

[6]) R. Rothe, Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 314.

besteht, sobald $h < \delta$ ist und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ der Bedingung (4) gemäß gewählt sind.

Beweis. Ich schicke folgende Bemerkung voraus. Für die ganze rationale Funktion $(n+1)$-ten Grades

$$\varphi(x) = c_0 x^{n+1} + c_1 x^n + \ldots + c_{n+1}$$

besteht die Formel

$$(5) \qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi(a_i)}{(a_i - a_0) \ldots | \ldots (a_i - a_n)} - \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = c_0 [(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) - (n+1)x].$$

Das leuchtet unmittelbar ein, wenn wir beachten, daß für die Steigungen n-ter Ordnung der Funktionen x^k $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ folgende Formeln[7]) gelten:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i^k}{(a_i - a_0) \ldots | \ldots (a_i - a_n)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i^n}{(a_i - a_0) \ldots | \ldots (a_i - a_n)} = 1,$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i^{n+1}}{(a_i - a_0) \ldots | \ldots (a_i - a_n)} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$ [8])

Es werde nun

$$(6) \qquad \varphi(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) f'(\alpha) + \ldots + (x - \alpha)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!},$$

ferner

$$(7) \qquad f(x) = \varphi(x) + \vartheta(x)$$

[7]) Nörlund[1]), S. 9. Die beiden ersten Formeln gehen auch daraus hervor, daß der Koeffizient von x^n in derjenigen ganzen rationalen Funktion $f^*(x)$ vom Grade $\leqq n$, die mit einer gegebenen Funktion $f(x)$ an den Stellen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ übereinstimmt, identisch mit der Steigung n-ter Ordnung $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ von $f(x)$ ausfällt. Es ist nämlich nach der Newtonschen Formel (vgl. Nörlund[1]), S. 11, Formel (24))

$$f^*(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} [a_0, a_1, \ldots, a_\lambda] (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{\lambda-1}).$$

Bezüglich der dritten Formel vgl. Jacobi, De functionibus alternantibus, Journal für die reine und angewandte Mathematik 22 (1841), S. 370, Formel 11 für $m = 0$ (Werke 3, S. 451–452; deutsch Ostwalds Klassiker Nr. 77, S. 64). Übrigens läßt sich diese Formel und ihre Verallgemeinerung für den Exponenten $n+k$ (vgl. Jacobi a. a. O.) durch vollständige Induktion leicht beweisen.

[8]) Es sei hier bemerkt, daß, falls $c_0 \neq 0$ ist und (1) auf $\varphi(x)$ angewandt wird, mit Hilfe von (5) für ξ der Wert

$$\xi = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}$$

folgt.

gesetzt. Dann strebt bekanntlich für $x \to \alpha$

$$\frac{\vartheta(x)}{(x-\alpha)^{n+1}} \to 0,$$ [9])

also, wenn $|x-\alpha| \leqq h$ ist, um so mehr

$$\frac{\vartheta(x)}{h^{n+1}} \to 0, \quad \text{für} \quad h \to 0. \tag{8}$$

Aus (1), (2) und (7) ergibt sich zunächst

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi(a_i)}{(a_i-a_0)\ldots|\ldots(a_i-a_n)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{\vartheta(a_i)}{(a_i-a_0)\ldots|\ldots(a_i-a_n)} = \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!} + \frac{\vartheta^{(n)}(\xi)}{n!}$$

oder, mit Rücksicht auf (5) und (6),

$$\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}[(a_0+a_1+\ldots+a_n)-(n+1)\xi] + \sum_{i=0}^{n} \frac{\vartheta(a_i)}{(a_i-a_0)\ldots|\ldots(a_i-a_n)} = \frac{\vartheta^{(n)}(\xi)}{n!}. \tag{9}$$

Es ist aber

$$\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} \frac{\vartheta(a_i)}{(a_i-a_0)\ldots|\ldots(a_i-a_n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\frac{\vartheta(a_i)}{h^{n+1}}}{\left(\frac{a_i-a_0}{h}\right)\ldots\left|\ldots\left(\frac{a_i-a_n}{h}\right)\right.},$$

also, auf Grund von (4) und (8),

$$\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} \frac{\vartheta(a_i)}{(a_i-a_0)\ldots|\ldots(a_i-a_n)} \to 0, \quad \text{für} \quad h \to 0. \tag{10}$$

Mit Rücksicht auf (9) und (10) kann also für $h \to 0$

$$\frac{1}{h}\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}[(a_0+a_1+\ldots+a_n)-(n+1)\xi] \to 0 \tag{11}$$

geschlossen werden, da, wie ich sogleich zeigen werde,

$$\frac{\vartheta^{(n)}(\xi)}{h} \to 0 \quad \text{für} \quad h \to 0. \tag{12}$$

Aus (7) ergibt sich nämlich

$$f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) + \vartheta^{(n)}(x),$$

oder, auf Grund von (6),

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(\alpha) + (x-\alpha) f^{(n+1)}(\alpha) + \vartheta^{(n)}(x).$$

---

[9]) Dieser Satz ist schon in Genocchi-Peano's Calcolo differenziale, Torino 1884, S. XIX ohne Beweis ausgesprochen. Für den Beweis siehe: Peano, Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor, Mathesis 9 (1889), S. 182, ferner J. König, Analizis (ungarisch), Budapest 1887, S. 532—538.

Also, infolge der Definition der ersten Ableitung,

$$\frac{\vartheta^{(n)}(x)}{x-\alpha} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \alpha,$$

und um so mehr

$$\frac{\vartheta^{(n)}(x)}{h} \to 0 \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

Aus (11) folgt aber — da doch $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$ vorausgesetzt ist — für $h \to 0$

$$\frac{1}{h}\left(\xi - \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}\right) \to 0,$$

w. z. b. w.

Es ist nicht schwer, diesen Satz in angemessener Weise auf den Fall

$$f^{(n+1)}(\alpha) = f^{(n+2)}(\alpha) = \ldots = f^{(n+k-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(n+k)}(\alpha) \neq 0$$

zu verallgemeinern.

Ähnlich lassen sich auch die Gültigkeitsgrenzen des Satzes von Herrn R. Rothe über das Taylorsche Theorem [10]) erweitern.

---

[10]) Vgl. [6]), S. 309–310.

(Eingegangen am 28. Mai 1925.)

Quelques propriétés des déterminants supérieurs, orthosymétriques, circulants et cycliques.

Par

Maurice Lecat (Louvain).

Les déterminants orthosymétriques, les circulants et les déterminants cycliques, à n dimensions, ont déjà fait l'objet de recherches, mais incomplètes et non satisfaisantes. Nous nous proposons ici d'étudier, d'une manière rigoureuse, certaines de leurs propriétés, tout en indiquant quelques questions à résoudre [1]).

1. La matrice *orthosymétrique* (ou *persymétrique*) est la matrice actinomorphe

$$\left\| b\left(\sum_{\varepsilon=1}^{n} i_\varepsilon - n + 1\right)\right\|_p,$$

à $1 + n(p-1)$ paramètres, la classe étant n et l'ordre p; la lettre b peut être considérée comme le symbole d'une fonction (de l'expression figurant entre parenthèses) [2]). Tout espace orthoaxial est un domaine uni et toutes les couches sont aussi orthosymétriques.

La classe étant paire, calculons le persignant en appliquant le principe d'addition des tranches signantes. Dans la direction 1, soustrayons de la tranche p la tranche $p-1$, de celle-ci la tranche $(p-2)$, etc.,

[1]) Pour la définition des déterminants supérieurs et des principales notions y relatives, voir par exemple, M. Lecat, Sur les déterminants cayléens et bicayléens anormaux, Math. Zeitschr. 15 (1922), p. 291–308, n° 1. Ce travail sera encore utile pour la suite. En attendant que paraisse le *Traité sur les déterminants supérieurs* (sous presse), on pourrait aussi consulter au moins les travaux renseignés, sous les n^{os} 43, 78, 49, 54 et 102, dans la liste chronologique placée en tête de la *Bibliographie des déterminants à plus de deux dimensions* (du même auteur) figurant en appendice de la *Bibliographie de la Relativité* (Bruxelles, 1924) et parue aussi à part.

[2]) Pour la classe $n=2$, on a la matrice considérée par H. Hankel, *Über eine besondere Klasse der symmetrischen Determinanten* (Leipziger Diss.), Göttingen 1861.

de la 2ème la première; sur la matrice ainsi obtenue, opérons de même dans la direction 2, puis successivement dans toutes les directions. Égal au persignant primitif, le déterminant obtenu est encore orthosymétrique et s'écrit

$$\left| \Delta^{\sum_{\varepsilon}^{n} i_\varepsilon - n} b_1 \right|_p,$$

en mettant b_1 pour $b(1)$ et en désignant par $\Delta^k b_1$ le premier terme de la suite des différences $k^{\text{èmes}}$ des paramètres $b_1, b_2, \ldots, b_{1+n(p-1)}$ de la matrice primitive ($\Delta^0 b_1$ étant b_1). On en conclut que: *Un persignant orthosymétrique est égal au persignant orthosymétrique des termes initiaux des suites des différences d'ordres* $0, 1, \ldots, n(p-1)$ *des paramètres de la matrice primitive.*

En cas de non-persignance, le principe d'addition des tranches ne peut plus être appliqué dans toutes les directions et la propriété n'a donc plus lieu.

Quand la suite des différences $k^{\text{èmes}}$ d'une suite $b_1, b_2, \ldots$ est composée de tous nombres égaux, on dit que $b_1, b_2, \ldots$ constituent une *suite arithmétique d'ordre* k. Supposons que, pour la suite $b_1, \ldots, b_{1+n(p-1)}$, le nombre k soit

$$E\left[\frac{1+n(p-1)}{2}\right] \equiv E;$$

on a alors

$$\Delta^{\omega} b_1 = 0 \quad \text{pour} \quad \omega = E+1, E+2, \ldots, n(p-1)$$

et le persignant orthosymétrique se réduit à

$$C(n,p)\left\{\Delta^{E\left[\frac{3+n(p-1)}{2}\right]} b_1\right\}^p,$$

$C(n, p)$ étant une fonction des nombres n et p. Pour $n = 2$, ce coefficient vaut $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$; pour $n = 4$ avec $p = 3$, il vaut 15. Quelle est son expression générale?

Si les b constituent une suite arithmétique d'ordre inférieur à E, le persignant orthosymétrique est nul, car on a alors

$$\Delta^{\Omega} b_1 = 0 \quad \text{pour} \quad \Omega = E, E+1, \ldots, n(p-1).$$

Si les paramètres forment une progression géométrique, ce déterminant est encore nul, car les premiers termes des suites des différences successives sont:

$$b_1, \quad (q-1)b_1, \quad (q-1)^2 b_1, \quad \ldots, \quad (q-1)^{n(p-1)} b_1$$

et, dans le persignant en Δ, des tranches parallèles deviennent équimultiples.

2. La matrice orthosymétrique comprend comme cas spécial la *circulante*[3]):

$$\left\| b\left(\sum_{\nu=1}^{n} i_\nu \pmod p\right)\right\|_p .$$

Dans cette matrice actinomorphe, est uni chacun des p domaines, d'étendue p^{n-1}, constitué par un système d'espaces orthoaxiaux distants de p. Toute file comprend tous les éléments distincts de la matrice. Toutes les couches d'une circulante sont des circulantes. Toute sous-matrice coaxiale est orthosymétrique; toute sous-matrice non-coaxiale le devient par des translations de tranches.

Cherchons l'expression des circulants. De l'actinomorphisme d'une circulante, il résulte que, dans la valeur de ses déterminants, la signature[4]) n'intervient que par l'espèce.

Dans un circulant-permanent, la «décomposition complète»[5]) donnera une somme de $(p!)^{n-2}$ permanents (de classe 2), dont un certain nombre pourront être circulants, les autres ayant des files parallèles identiques; mais aucun de ces composants ne sera nul. Cette méthode ne permet donc pas de ramener l'expression d'un circulant-permanent de classe n à celle d'un déterminant de même nature mais de classe 2.

Au contraire, si le circulant de classe n est à signances (l'espèce étant $\geqq 2$), les indices auxquels s'applique la décomposition complète peuvent toujours être choisis de manière à ce qu'elle donne une somme (algébrique si l'espèce $\nu \geqq 4$) de déterminants ordinaires; les uns seront, au signe près, le circulant (ordinaire) des paramètres de la matrice primitive; les autres seront nuls comme ayant au moins 2 files parallèles identiques. On en conclut que *tout circulant à signances est nul ou égal au circulant ordinaire de même ordre* et que l'étude des circulants supérieurs à signances se ramène à celle des circulants ordinaires[6]).

---

[3]) On peut dire que l'élément est b_α, l'indice α étant congru à la somme des coordonnées pour un module égal à l'ordre.

[4]) La signature est la répartition des signances (et des non-signances), parmi les divers rangs des indices du déterminant.

[5]) D'après L.-H. Rice, *P*-way Determinants, American J. Math. **40** (1918), p. 241–262, partic. p. 248.

[6]) On sait qu'un circulant ordinaire, C, d'ordre p, peut se décomposer en p facteurs. En effet, si $b_1, \ldots, b_p$ sont ses paramètres, son expression est:

$$C = (-1)^{(p-1)(p-2):2} \prod_{\alpha=1}^{p} f(x_\alpha)$$

avec

$$f(x) \equiv \sum_{\pi=1}^{p} b_\pi x^{\pi-1},$$

La question qui se pose maintenant est la suivante: *par quelle fonction de n, p, ν faut-il multiplier le circulant ordinaire d'ordre p pour obtenir la valeur du circulant de même ordre, mais de classe n et d'espèce ν $(\neq 0)$?* En particulier, pour quelles valeurs de n, p, ν trouvera-t-on zéro pour le circulant général [7])?

3. La circulante que nous venons de considérer se généralise en la matrice suivante:

$$\left\| b\left(i_1, \ldots, i_\varphi; \sum_{\nu=\varphi+1}^{n} i_\nu \pmod p\right)\right\|_p,$$

dite *circulante à φ indices neutres*; c'est une matrice actinomorphe à φ indices immobiles. Si $\varphi = 0$, la matrice est circulante (tout court) ou *purement circulante.* Dans une circulante de classe n à φ indices neutres, il y a $p^{n-\varphi}$ couches neutres de classe maximée φ et $\binom{\varphi}{\psi} p^{n-\psi}$ couches neutres de classe $\psi \leqq \varphi$; les couches, de classe $n-\varphi$, où les indices neutres ne varient pas, sont purement circulantes; les couches de classe supérieure à $n-\varphi$ ne peuvent l'être, mais elles seront nécessairement circulantes à indices neutres si $n > 2\varphi$.

Bornons-nous à calculer le circulant cubique à (un) indice neutre [8]). Considérons donc une matrice cubique dont les tranches d'une même orientation sont circulantes, celle d'abscisse i ayant pour éléments: $a_1^{(i)}, \ldots, a_p^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, p)$.

a) Calculons d'abord le quasi-persignant, Δ_1, dont les strates sont ces tranches. Les p racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité étant désignées par $\omega_1, \ldots, \omega_p$,

---

$x_1, \ldots, x_p$ désignant les p racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité $(x^p - 1 = 0)$. L'intérêt que présentent les circulants ordinaires réside, en outre, dans le théorème de Souillart [Nouv. Ann. Math. (1) **19** (1860), p. 320–322], en vertu duquel un circulant est une fonction homogénétique, le produit de deux circulants étant un circulant, abstraction faite du signe; d'où l'on déduit d'élégantes lois de la théorie des nombres. On aurait pu se demander si, pour n quelconque, il ne serait pas possible d'obtenir d'autres propriétés; mais le théorème établi dans le texte répond négativement à la question.

[7]) Voici des propriétés particulières: a) *Tout circulant quasi-persignant de classe n et d'ordre p impair est égal à $p!!$ fois le circulant persignant de classe $n-1$ et d'ordre p.* On peut le démontrer en décomposant ce déterminant en une somme de $p!$ persignants de classe $n-1$; lorsqu'il y a au moins 2 tranches parallèles identiques, un composant est nul; les autres sont en nombre $p!!$ car, dans le circulant ordinaire des paramètres $x_1, \ldots, x_p$, il y a $p!!$ termes en Πx_α si p est impair.

b) *Tout circulant quasi-persignant d'ordre pair est nul.* En effet, tous les composants persignants de classe $n-1$ sont nuls, un circulant d'ordre pair n'ayant aucun terme en Πx_α.

[8]) D'après L. Puccio, *I determinanti cubici in relazione alla teoria invariantiva delle forme. Parte prima.* Palermo, G. Castiglia, 1923, pp. 53–59.

multiplions, suivant la règle d'Armenante, le quasi-persignant cubique en question par le déterminant de Vandermonde, Ω, des ω. Si l'on pose

$$\psi_i(x) \equiv \sum_{\pi=1}^{p} a_\pi^{(i)} x^{\pi-1},$$

comme $\omega_1^p = 1$, on voit que

$$\omega_1^{p-k}\psi_i(\omega_1) = (a_{k+1}^{(i)} + \ldots + a_p^{(i)}\omega_1^{p-k-1}) + (a_1^{(i)}\omega_1^{p-k} + \ldots + a_k^{(i)}\omega_1^{p-1})$$
$$k = 0, 1, \ldots, p-1,$$

ce qui permet d'écrire d'une manière simple le déterminant-produit. Par décomposition de ce quasi-persignant en une somme algébrique de composants de classe 2, on obtient aisément

$$\Omega\Delta_1 = (-1)^{(p-1)(p-2):2}\Omega \sum_{r_1,\ldots,r_p=1}^{p} (\pm_r)^2 \prod_{i=1}^{p}\psi_i(\omega_{r_i}),$$

car chacun de ces composants, après mise hors barres du produit en π, est, à un coefficient numérique près, égal à Ω. Comme les p racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité sont inégales, $\Omega \neq 0$, et le déterminant à calculer

$$\Delta_1 = (-1)^{(p-1)(p-2):2} \sum_{r_1,\ldots,r_p=1}^{p} \prod_{i=1}^{p}\sum_{\pi=1}^{p} a_\pi^{(i)}\omega_{r_i}^{\pi-1}.$$

En ce qui concerne les deux autres quasi-persignants, Δ_2 et Δ_3, ils sont égaux, la matrice cubique étant symétrique. On peut les exprimer en une somme (non-algébrique) de déterminants ordinaires, comme on peut le faire aussi pour Δ_1; mais n'insistons pas [9]).

4. Occupons-nous enfin d'une famille de déterminants fort remarquables: les cycliques.

D'ordre $p = \prod_{\lambda=1}^{k} p_\alpha$, une matrice de classe n sera dite *cyclique* [10]) *de modulation* $(p_1, \ldots, p_k)$ *et de portée* q si ses éléments,

$$d(i_1, \ldots, i_{n-2q}; s^{(1)}, t^{(1)}, \ldots, s^{(q)}, t^{(q)}),$$

---

[9]) Il y aurait lieu de calculer aussi le permanent. On généralisera ensuite, pour une classe quelconque n, les couches de classe 2, d'une même orientation, étant des circulants ordinaires. On calculera les déterminants à signature quelconque, ce qui conduira à distinguer trois cas principaux suivant que, parmi les deux indices variables des couches considérées, il y en a zéro, un ou deux qui sont signants. Nous ne ferons pas ici cette recherche et nous allons considérer d'emblée un cas beaucoup plus général.

[10]) Pour un cas particulier ($q = 1$), cf. L. Gegenbauer, Über Determinanten höheren Ranges, Denkschr. Akad. Wiss. Wien (Math.-Naturw. Kl.), 49, II (1885), p. 225–230. Cet auteur n'introduit pas le mot cyclique; notre terminologie est, d'ailleurs, en général, assez différente de la sienne.

où

$$i, s, t = 0, 1, \ldots, p-1,$$

valent

$$h(i_1, \ldots, i_{n-2q}; \sigma_1^{(1)} - \tau_1^{(1)}, \ldots, \sigma_k^{(1)} - \sigma_k^{(1)}; \ldots; \sigma_1^{(q)} - \sigma_1^{(q)}, \ldots, \sigma_k^{(q)} - \sigma_k^{(q)}),$$

$\sigma_\alpha^{(\nu)}$ et $\tau_\alpha^{(\nu)}$ étant pris suivant le module p_α, pour $\alpha = 1, \ldots, k$, et les q nombres s étant liés aux σ correspondants par les q systèmes de congruences

$$\left[s^{(\nu)} - \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sigma_\beta^{(\nu)} \prod_{\gamma=1}^{\beta-1} p_\gamma \right] : \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} p_\beta \equiv \sigma_\alpha^{(\nu)} \pmod{p_\alpha} \qquad (\nu = 1, \ldots, q),$$

tandis que les t sont liés aux τ correspondants par les congruences obtenues en remplaçant, dans les précédentes, $s^{(\nu)}$ par $t^{(\nu)}$ et $\sigma_\alpha^{(\nu)}$ par $\tau_\alpha^{(\nu)}$. On convient que $p_0 \equiv 1$. Des nombres p_α peuvent être égaux. Les i sont les indices *neutres* (en général). Les autres (dont le nombre est le double de la portée) sont les indices *modulés*.

Si l'on écrit

$$d(\ldots) = (-1)^{\sum_\nu m_\nu} h(\ldots),$$

m_ν étant le nombre des $\sigma^{(\nu)}$ inférieurs aux $\tau^{(\nu)}$ de même indicule α, on a une *cyclique gauche*.

Quand on les oppose aux cycliques gauches, les matrices définies ci-dessus sont dites *cycliques droites*.

Considérons maintenant divers cas particuliers:

a) Si la classe est paire, les indices neutres peuvent faire défaut ($n = 2q$); la matrice est alors *purement cyclique*.

b) Si l'ordre p est une puissance d'exposant k, il est possible que tous les modules p_α soient égaux; la matrice est alors *cyclique de modulation* (p_1^k).

c) Si $k = 1$, la modulation est (p) et la matrice est *cyclique simple*.

d) Si l'on combine les particularisations a) et c), on a la *cyclique pure et simple*. Actinomorphisée d'une manière générale, cette matrice dégénère en circulante. Pour $n = 2$, ces deux matrices ne sont pas distinctes[11]), car pour cette classe, la symétrie n'est pas distincte de l'actinomorphie.

5. Théorème[12]). *Un cyclique, droit ou gauche, de classe n et*

---

[11]) Cela est assez conforme à la terminologie généralement adoptée, suivant laquelle *circulante* et *cyclique* (pure et simple) sont synonymes pour $n = 2$.

[12]) Ce théorème a été énoncé par Gegenbauer (*loc. cit.*), mais d'une manière assez vague et moins générale que dans le présent texte. — Dans ses travaux, cet auteur n'a jamais envisagé d'autres déterminants que les permanents et les omnisignants (persignants et quasi-persignants); souvent sans valeur, ses théories sur les déterminants supérieurs ne sont donc jamais générales. Celle qui fait l'objet du mémoire signalé, sans être complètement fausse, n'est guère satisfaisante; nous le verrons.

de portée 1, *les deux indices modulés* (*au moins*) *étant signants*[13]), *est réductible à un déterminant, de classe* $n-1$, *conservant, avec leur signature* (*arbitraire*), *les* $n-2$ *indices neutres, et où les éléments sont des fonctions linéaires et homogènes des éléments primitifs multipliés, si la modulation est* $(p_1, \ldots, p_k)$, *par les racines* $(p_1)^{\text{èmes}}, \ldots, (p_k)^{\text{èmes}}$ *de l'unité, respectivement positive ou négative.*

Si, en particulier, le cyclique est persignant, le déterminant réduit est quasi-persignant; si le cyclique est quasi-persignant (*la non-signance étant neutre*), *le déterminant réduit possède deux non-signances* (*dont une neutre*)[14]).

La démonstration consiste essentiellement à considérer certain déterminant, D, de polynomes et qui est à la fois: a) un cayléen[15]) de deux déterminants spéciaux, Δ_1, de classe 2, et Δ, le cyclique étudié; b) un scottien de Δ_1 et d'un déterminant, Δ_2, de polynomes. Comme Δ_1 est facteur commun aux deux produits valant D, on a $\Delta = \Delta_2$; de plus, d'après l'expression de la classe des scottiens et des cayléens en fonction de celles des matrices primitives, on voit que Δ_2 est de classe inférieure d'une unité à celle du cyclique Δ.

6. Dans le déterminant

$$\Delta \equiv \left| d(i_1, \ldots, i_{n-2}; \hat{s}, \hat{t}) \right|_{(s,t=0,1,\ldots,p-1)},$$

de classe n et d'ordre $p = \prod_{\alpha=1}^{k} p_\alpha$, la signature des i étant arbitraire (pourvu que l'espèce soit paire), posons les éléments

$$d(\ldots) = h(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma_1 - \tau_1, \ldots, \sigma_k - \tau_k),$$

en prenant les indices σ_α et τ_α suivant le module p_α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ et s étant lié aux σ par les congruences

$$(1) \qquad \left[s - \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sigma_\beta \prod_{\gamma=1}^{\beta-1} p_\gamma \right] : \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} p_\beta \equiv \sigma_\alpha \pmod{p_\alpha}$$

[13]) La propriété n'a donc pas lieu pour les permanents.

[14]) Si, comme le fait Gegenbauer, on n'envisage pas d'autres déterminants que les omnisignants, le cyclique ne peut être que persignant; mais encore faut-il, dans ce cas, indiquer le rang non-signant du déterminant réduit. Or, dans l'énoncé du théorème, tel que le donne Gegenbauer, il n'est pas question de la non-signance. Au cours de la démonstration, il y est fait allusion, mais à un seul moment et, nous le verrons, d'une manière intempestive et tout à fait inexacte.

[15]) Pour la définition des cayléens et des scottiens, voir, par exemple, M. Lecat, Math. Zeitschr. (*l. c.*), nos 1 et 4.

et de même t aux τ par des congruences analogues. Posons, en outre,

$$(2) \qquad h(\ldots) = b(i_1, \ldots, i_{n-2};\ \sigma_1 - \tau_1, \ldots, \sigma_k - \tau_k) \cdot \prod_{\varepsilon=1}^{\eta} \varphi_{\theta_\varepsilon}^{\lambda_{\theta_\varepsilon}}$$

pour $\sigma_{\theta_\varepsilon} < \tau_{\theta_\varepsilon}$, les autres σ n'étant pas inférieurs aux τ correspondants; le coefficient de b est donc 1 si $\sigma_\alpha \geqq \tau_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$.

Considérons le déterminant

$$(3) \quad M \equiv \left| \sum_{\sigma_\alpha=0}^{p_\alpha-1} h(i_1, \ldots, i_{n-2};\ \sigma_1 - \tau_1, \ldots, \sigma_k - \tau_k) \prod_{A=1} q_A^{\sigma_A(q_A\sigma_A + \lambda_A)} \right|_{(i, s', t)},$$

où le signe sommatoire, d'ordre de multiplicité k, est mis abréviativement pour

$$\sum_{\sigma_1=0}^{p_1-1} \sum_{\sigma_2=0}^{p_2-1} \cdots \sum_{\sigma_k=0}^{p_k-1},$$

comme dans la suite. Les indices s' et t satisfont aux congruences (1) où l'on remplace σ_α par ν_α; la signature est choisie de manière à satisfaire aux nécessités de la suite[16]). La notation abréviative (i, s', t), pour $(i, s', t = 0, 1, \ldots, p-1)$, suffira, les indices prenant toujours les mêmes valeurs. Ce déterminant va être envisagé d'abord comme scottien, ensuite comme cayléen.

On a manifestement:

$$M = \left| \sum_{\sigma_\alpha=-\tau_\alpha}^{p_\alpha-\tau_\alpha-1} h(i_1, \ldots, i_{n-2};\ \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \prod_{A=1}^{k} q_A^{(\sigma_A+\tau_A)(\varrho_A\nu_A+\lambda_A)} \right|_{(i, s', t)}$$

ou encore, comme les indices σ_α sont pris suivant les modules p_α:

$$(4) \quad M = \left| \sum_{\sigma_\alpha=0}^{p_\alpha-1} h'(i_1, \ldots, i_{n-2};\ \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \prod_{A=1}^{k} q_A^{(\sigma_A+\tau_A)(\varrho_A\nu_A+\lambda_A)} \right|_{(i, s', t)},$$

avec

$$h'(\ldots) \equiv \prod_{\varepsilon=1}^{\eta} \varphi_{\theta_\varepsilon}^{\lambda_{\theta_\varepsilon}} \cdot q_{\theta_\varepsilon}^{-p_{\theta_\varepsilon}(\varrho_{\theta_\varepsilon}\nu_{\theta_\varepsilon}+\lambda_{\theta_\varepsilon})}\, b(i_1, \ldots, i_{n-2};\ \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$$

si, parmi les σ, seuls

$$\sigma_{\theta_\varepsilon} \geqq p_{\theta_\varepsilon} - \tau_{\theta_\varepsilon} \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \eta),$$

le coefficient de b étant donc l'unité si tous les $\sigma_\alpha < p_\alpha - \tau_\alpha$.

---

[16]) La seule indication que donne Gegenbauer, dans tout son mémoire, est que s' doit être «fixe» (ce qui veut dire non-signant); or, pour la suite, il est nécessaire que s' soit, au contraire, signant!

[17]) Gegenbauer invoque, à tort, le théorème plus général relatif au produit d'un nombre quelconque de facteurs.

En vertu de la règle de multiplication de Scott-Rice[17]), si s' est considéré comme l'indice lié, la relation (4) devient:

$$M = \left| \prod_{a=1}^{k} q_a^{\tau_a(\varrho_a \nu_a + \lambda_a)} \right|_{(\hat{\imath}, \hat{s})} \cdot \left| \sum_{\sigma_a=0}^{p_a-1} h'(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \prod_{A=1}^{k} q_A^{\sigma_A(\varrho_A \nu_A + \lambda_A)} \right|_{(\check{\imath}, \check{s}')}$$

produit d'un déterminant de classe 2 par un déterminant de classe $n-1$. Il apparaît ici que t devait bien être pris signant.

Mais si, au déterminant M, sous la forme (3), on applique la réciproque de la règle de von Escherich (cas particulier de la règle de Cayley), on obtient

$$M = \left| \prod_{a=1}^{k} q_a^{\sigma_a(\varrho_a \nu_a + \lambda_a)} \right|_{(s, s')} \cdot \Delta, \tag{6}$$

ce qui exigeait la signance de s (auquel s'applique la sommation dans le cayléen).

En rapprochant (5) et (6) et en observant que les déterminants de classe 2, à droite, sont égaux, les τ_a jouant exactement le même rôle que les σ_a, on voit que le déterminant étudié

$$\Delta = \left| \sum_{\sigma_a=0}^{p_a-1} h'(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \cdot \prod_{A=1}^{k} q_A^{\sigma_A(\varrho_A \nu_A + \lambda_A)} \right|_{(\check{\imath}, \check{s}')}, \tag{7}$$

déterminant, de classe $n-1$, indépendant des quantités q, ϱ et λ. *Par l'adjonction de k quantités q, le cyclique peut donc se réduire à un déterminant de même ordre, mais de classe et d'espèce respectivement inférieurs d'une ou de deux unités aux classe et espèce du déterminant primitif.*

7. Puisque nous pouvons disposer des quantités q et ϱ, posons

$$q_a^{p_a} = \varphi_a, \qquad \varphi_a^{\varrho_a} = 1;$$

la relation (7) devient alors:

$$\Delta = \left| \sum_{\sigma_a=0}^{p_a-1} b(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \cdot \prod_{A=1}^{k} q_A^{\sigma_A(\varrho_A \nu_A + \lambda_A)} \right|_{(\check{\imath}, \check{s}')}. \tag{8}$$

Comme cas particuliers de cette formule, considérons les deux suivants:

a) Soit $\varrho_a = 1$, ce qui donne $\varphi_a = 1$. Les q_a deviennent alors racines primitives $(p_a)^{\text{èmes}}$ de l'unité; soit, en outre, $\lambda_a = 0$. L'égalité (8) donne:

$$|b(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma_1 - \tau_1, \ldots, \sigma_k - \tau_k)|_{(\hat{\imath}, \hat{s}, \hat{t})} = \left| \sum_{\sigma_a=0}^{p_a-1} b(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \prod_{A=1}^{k} q_A^{\sigma_A \nu_A} \right|_{(\check{\imath}, \check{s}')}, \tag{9}$$

ce qui démontre le théorème pour les déterminants cycliques droits. Si l'on remarque qu'un permanent de classe 1 et de p éléments est le produit de ces éléments, on voit que (9), pour $n=2$, contient le théorème bien connu sur les déterminants cycliques ordinaires[18]).

8. b) Soit ensuite: $\varrho_\alpha = 2$, $\varphi_\alpha = -1$; les quantités q_α deviennent racines primitives $(p_\alpha)^{\text{èmes}}$ de l'unité négative $(q_\alpha^{p_\alpha}+1=0)$ et si $\lambda_\alpha = 1$, on obtient:

$$(10)\quad \left| \operatorname{sgn} \prod_{\alpha=1}^{k} (\sigma_\alpha - \tau_\alpha) \cdot b(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma_1 - \tau_1, \ldots, \sigma_k - \tau_k) \right|_{(i,\,\widehat{s,t})} = \left| \sum_{\sigma_\alpha=0}^{p_\alpha-1} b(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \prod_{A=1}^{k} q_A^{\sigma_A(2\tau_A+1)} \right|_{(i,\,\check{s},\check{t})},$$

ce qui démontre le théorème pour les déterminants cycliques gauches[19]).

Dès que l'un des nombres p_α est pair, ces déterminants sont décomposables en un produit de deux déterminants[20]).

Si tous les $p_\alpha = 2$, la matrice, de modulation (2^k), possède des propriétés spéciales, qui feront l'objet d'un autre travail.

Si, plus particulièrement, $k=1$, on obtient le déterminant cyclique simple, de portée 1. S'il est droit, on a:

$$|b(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma - \tau)| = \left| \sum_{\sigma=0}^{p-1} q^{\sigma\tau} \cdot b(i_1, \ldots, i_{n-2}; \sigma) \right|;$$

---

[18]) Ce cas particulier a été établi, d'une manière très simple, en appliquant le principe d'addition des files, par M. Noether, Notiz über eine Klasse symmetrischer Determinanten, Math. Ann. **16** (1878/79), p. 551–555. L. Gegenbauer, Über eine spezielle symmetrische Determinante, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **8** (1880), p. 938 à 942, en a donné une autre démonstration. M. Noether [Zur Theorie der Thetafunktionen von beliebig vielen Argumenten, Math. Ann. **16** (1879/80), p. 270–344, en partic. le § 15 (p. 322–325), intitulé: Eine besondere Klasse von Determinanten, avait, un peu auparavant, considéré le cas plus particulier où $k=1$, en vue d'application à des questions d'analyse. Le déterminant, d'ordre 2^p, considéré par A. Puchta, Ein Determinantensatz und seine Umkehrung, Denkschr. Akad. Wiss. Wien **39** II (1877), p. 215–218, constitue un autre cas spécial du déterminant cyclique de Noether. Auparavant, Bessel avait envisagé le déterminant encore plus particulier

$$|a_{\varrho-r}|_{(\varrho,\,r=0,\,1,\,\ldots,\,p-1)},$$

où tous les indices doivent être pris suivant le module p; il n'est pas distinct du circulant.

[19]) Le cas particulier $(n=2,\ k=1)$ a été donné par R. F. Scott, On some theorems in determinants, Messenger of Mathematics **8** (1878/79), p. 33–37.

[20]) Pour les déterminants ordinaires, cette propriété a été signalée par J. W. L. Glaisher, On functions with recurring derivatives, Proc. Lond. Math. Soc. **4** (1872), p. 113–116; Theorems in Algebra, Messenger of Math. **8** (1878/79), p. 140–144.

s'il est gauche, on a:

$$|\operatorname{sgn}[\sigma-\tau]\cdot b(i_1,\ldots,i_{n-2};\sigma-\tau)| = \left|\sum_{\sigma=0}^{p-1} q^{\sigma(2\nu+1)}\cdot b(i_1,\ldots,i_{n-2};\sigma)\right|.$$

Le problème se pose maintenant d'étudier, d'une manière générale, les déterminants cycliques d'une portée quelconque, et en particulier, les déterminants (de classe paire) purement cycliques [21]). Ces derniers jouissent-ils de propriétés spéciales que ne possèdent pas les cycliques de portée 1?

Pour les déterminants cycliques, il y aurait lieu aussi de généraliser les résultats trouvés par Noether [22]) au sujet des mineurs des déterminants cycliques ordinaires et de l'adjoint.

---

[21]) Cf. M. Lecat, Interm. des Math. (1) **17** (1910), quest. 3716, p. 147—148.

[22]) M. Noether, Math. Ann. **16** (1879/80), partic. p. 554—555.

Louvain, le 25 juin 1925.

(Eingegangen am 28. Juni 1925.)

Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen.

(1. Mitteilung.)

Von

Werner Rogosinski in Königsberg.

Unter den Verfahren, die man zur Summierung einer formal gebildeten Reihe

$$A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

komplexer Glieder a_n benutzt und die diese Summierung, wie es in der Theorie der Dirichletschen Reihen nötig wird, in Beziehung zu einer „λ-Folge“

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots ; \quad \lambda_n \to \infty \tag{2}$$

bringen, muß als das formal einfachste die M. Rieszsche[1]) Methode der sogenannten $(\lambda, \varkappa)$-Mittel gelten.

Die Reihe (1) heißt danach für ein reelles $\varkappa \geqq 0$ $(\lambda, \varkappa)$-summierbar zur Summe S, symbolisch

$$R_\varkappa - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S, \tag{3}$$

wenn mit reellem $x \to \infty$

$$R_\varkappa(x) \equiv \sum_{\lambda_n < x} a_n \left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right)^\varkappa \to S \tag{4}$$

gilt. Insbesondere ist also R_0-Summierbarkeit von (1) mit gewöhnlicher Konvergenz der Reihe gleichbedeutend.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer gewissen Klasse neuer Summierungsverfahren und ihren Beziehungen zu den Rieszschen

[1]) M. Riesz. Sur la sommation des séries de Dirichlet, Comptes Rendus (1909). Zum Studium der Rieszschen Mittel vgl. am besten G. H. Hardy u. M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge Tracts 18 (1915), fortan „H.-R.“ zitiert.

Mitteln. Sie sind, wie diese selbst, V-Verfahren des folgenden allgemeinen Typs:

Die Reihe (1) heißt nach dem V-Verfahren summierbar zum Werte S, symbolisch

$$V-\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S, \tag{5}$$

wenn mit reellem $x \to \infty$

$$V(x) \equiv \sum_{\lambda_n < x} a_n \varphi\left(\frac{\lambda_n}{x}\right) \to S \tag{6}$$

gilt, wo $\varphi(y)$ eine in $0 \leqq y < 1$ geeignet definierte, nicht notwendig reelle Funktion ist. Bei Riesz ist speziell $\varphi(y) = (1-y)^x$.

Es ist aber weniger ein formal summierungstheoretisches Interesse, das diese Untersuchung bestimmt, und es sollen auch keineswegs alle solchen möglichen V-Verfahren — was wohl auch aussichtslos sein dürfte — gemeinsam behandelt werden, vielmehr rechtfertigt sich diese Arbeit durch die enge „*anschaulich einfache*“ Beziehung, in der einige dieser neuen Verfahren zu den „Abschnitten“

$$A_x(s) \equiv \sum_{\lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{7}$$

der zu (1) und zur λ-Folge (2) „gehörigen“ formalen Dirichletschen Reihe

$$f(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{8}$$

stehen. Diese Beziehung wird wohl am treffendsten durch das Wort „*Abschnittskoppelung*“ bezeichnet; es handelt sich nämlich um geeignete einfache additive Komposition von Abschnittswerten der Form $A_x\left(\frac{a}{x}\right)$, wo a eine beliebige komplexe Konstante ist und also das Argument mit wachsendem x gegen 0 strebt.

Es seien hier in der Einleitung nur etwa die folgenden besonders durchsichtigen V-Verfahren genannt:

I. Die „*symmetrischen Summenkoppelungen*“.

Man wähle

$$\varphi(y) = (\cos ay)^x \qquad (x \geqq 0 \text{ ganz}^2)), \tag{9}$$

also

$$V(x) \equiv K_x^a(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n \left(\cos \frac{a\lambda_n}{x}\right)^x = \frac{1}{2^x} \sum_{\nu=0}^{x} \binom{x}{\nu} A_x\left(\frac{i(x-2\nu)a}{x}\right), \tag{10}$$

---

[2]) Die Beschränkung auf ganze x, hier wie stets, ist dem Sinn der Arbeit durchaus angemessen.

z. B.

$$(10^*) \qquad K_1^a(x) = \frac{A_x\left(\frac{ia}{x}\right) + A_x\left(\frac{-ia}{x}\right)}{2},$$

$$K_2^a(x) = \frac{A_x\left(\frac{2ia}{x}\right) + 2A_x(0) + A_x\left(\frac{-2ia}{x}\right)}{4}.$$

II. Die „*symmetrischen Differenzkoppelungen*".

Man wähle

$$(11) \qquad \varphi(y) = (-2i\sin ay)^\varkappa \qquad (\varkappa \geqq 0 \text{ ganz}),$$

also

$$(12) \quad V(x) \equiv D_\varkappa^a(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n \left(-2i\sin\frac{a\lambda_n}{x}\right)^\varkappa = \sum_{\nu=0}^{\varkappa} (-1)^\nu \binom{\varkappa}{\nu} A_x\left(\frac{i(\varkappa-2\nu)a}{x}\right)$$

z. B.

$$D_1^a(x) = A_x\left(\frac{ia}{x}\right) - A_x\left(\frac{-ia}{x}\right),$$

$$D_2^a(x) = A_x\left(\frac{2ia}{x}\right) - 2A_x(0) + A_x\left(\frac{-2ia}{x}\right).$$

In dem ersten Paragraphen dieser Mitteilung werden nun diese und mit ihnen eine recht große Klasse allgemeiner V-Verfahren in ihrer Beziehung zu den Rieszschen Mitteln durch das folgende Theorem erfaßt:

Theorem: Voraussetzung.

1. $\varphi(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu (1-y)^{\varkappa+\nu}$ ($\varkappa \geqq 0$ *ganz*, $\alpha_0 \neq 0$, $0 \leqq y \leqq 1$)

2. $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_\nu|$ *konvergent.*

Behauptung. A. *Aus* $R_\varkappa(x) \to S$ *folgt* $V(x) \to S \cdot \varphi(0)$.

B. *Aus* $V(x) \to C$ *und* $R_\mu(x) \to S$ (*für irgendein festes* $\mu \geqq 0$) *folg.*

(a) $$C = S \cdot \varphi(0)$$

und

(b) $$R_\varkappa(x) \to S.$$

Man sieht, daß die V-Verfahren dieses Theorems, also auch die obigen Koppelungen, zufolge A mindestens ebenso „stark" sind, wie die gemäß 1. „entsprechenden" $R_\varkappa$-Mittel. B lehrt aber sogar, daß, wenn noch

$$(13) \qquad \varphi(0) = 1$$

normiert wird (falls $\varphi(0) \neq 0$ ist), wenigstens unter der Voraussetzung der R-Summierbarkeit von (1) (irgendeiner Ordnung) ein solches V-Ver-

fahren mit der R_x-Bildung äquivalent ist. Wir wollen dann kurz von „*bedingter*[3]) *Äquivalenz*" des V- mit dem R_x-Verfahren sprechen.

So findet man z. B., daß das K_x^a-Verfahren der symmetrischen Summenkoppelungen (10) im Falle $a = \frac{p\pi}{2}$ (p ungerade) mit dem R_x-Verfahren, sonst aber stets mit Konvergenz bedingt äquivalent ist.

Allgemeiner wollen wir das Bestehen einer Relation

$$V(x) \to S \cdot \varphi(0) \tag{14}$$

im Sinne des Theorems als für das R_x-Verfahren „*bedingt charakteristisch*" bezeichnen. So ergibt sich z. B. bei den Differenzkoppelungen (12), daß die Relation

$$D_x^a(x) \to 0 \tag{15}$$

im Falle $a = k\pi$ (k ganz) für das R_x-Verfahren, sonst aber für Konvergenz bedingt charakteristisch ist.

Aus der Fülle der interessanten Anwendungsmöglichkeiten des allgemeinen Theorems werden im § 2 dieser Mitteilung diese und ähnliche merkwürdig durchsichtige Verfahren und Relationen herausgegriffen und genauer besprochen werden. Besonders bemerkt sei noch die Tatsache, daß unser Theorem als fast unmittelbare Folgerung, freilich mit der Einschränkung

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \to 1 \tag{16}$$

für die λ-Folge, den bekannten O-Umkehrsatz des R-Verfahrens[4]) enthält.

Vom Standpunkte der Theorie der Dirichletschen Reihen aus kann man sich mit den Ergebnissen dieser Mitteilung durchaus zufrieden geben. Hier pflegt man sich sowieso bislang auf die „Halbebene endlicher Ordnung von $f(s)$[5])" zu beschränken, wo die Reihe R-summierbar ist[6]). In dieser Halbebene decken aber unsere Untersuchungen ein für die ganzzahligen Ordnungen der R-Summierbarkeit charakteristisches Abschnittsverhalten auf.

Vom summierungstheoretischen Gesichtspunkte aus erhebt sich freilich das ungleich schwierigere Problem, die speziellen V-Verfahren in bezug auf „*strenge Äquivalenz*" mit den Rieszschen Mitteln zu untersuchen, bzw. festzustellen, ob die Relationen (14) „streng" charakteristisch sind. Meine diesbezüglichen Ergebnisse, die aber keineswegs, nicht einmal betreffs der symmetrischen Summenkoppelungen, abschließend sind, werde ich

---

[3]) scil. bezüglich des R-Verfahrens.

[4]) H.-R., Theorem 35, S. 46.

[5]) H.-R., S. 14.

[6]) H.-R., Theorem 38, S. 49 und 41, S. 53.

demnächst in einer zweiten Mitteilung für sich darstellen. Hier sei nur im voraus mitgeteilt, daß z. B. das $K_\varkappa^{\frac{\pi}{2}}$-Verfahren für alle $\varkappa \leqq 4$ mit dem $R_\varkappa$-Verfahren streng äquivalent, dagegen etwa das $K_1^{\frac{3\pi}{2}}$-Verfahren nicht mit dem R_1-Verfahren streng äquivalent ist.

Die Bedeutung der symmetrischen Summen- und Differenzkoppelungen für die Theorie der trigonometrischen Reihen, wo diese Verfahren zuerst eingeführt worden sind, habe ich unlängst dargestellt[7]). Im folgenden wird gelegentlich auf diese Arbeit verwiesen werden.

§ 1.

Dem Beweise des in der Einleitung formulierten Theorems über die allgemeinen V-Verfahren (6) schicken wir zunächst einige sehr einfache, im übrigen wohlbekannte[8]) Hilfssätze über das Rieszsche $R_\varkappa$-Verfahren (4) samt ihren leichten Beweisen voraus. Dabei werden wir für den Abschnitt $A_x(0)$ stets kurz

$$A(x) \equiv \sum_{\lambda_n < x} a_n \tag{17}$$

schreiben.

Hilfssatz 1. *Für $x > 0$ und ganzes $\varkappa > 0$ ist*

$$R_\varkappa(x) = \frac{\varkappa!}{x^\varkappa} \int_0^x \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{\varkappa-1}} A(\tau_\varkappa)\, d\tau_\varkappa\, d\tau_{\varkappa-1} \dots d\tau_1 \equiv \frac{\varkappa!}{x^\varkappa} \left(\int_0^x \right)^\varkappa A(\tau)\, d\tau. \tag{18}$$

Beweis. Für jedes V-Verfahren (6), für welches die Ableitung $\varphi'(y)$ in $0 \leqq y \leqq 1$ stetig existiert, ist

$$V(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n \varphi\left(\frac{\lambda_n}{x}\right) = -\frac{1}{x} \int_0^x A(\tau) \varphi'\left(\frac{\tau}{x}\right) d\tau + A(x) \cdot \varphi(1), \tag{19}$$

also insbesondere bei den $R_\varkappa$-Mitteln mit

$$\varphi(y) = (1-y)^\varkappa \tag{a}$$

für positives $\varkappa$ zunächst

$$R_\varkappa(x) = \frac{\varkappa}{x} \int_0^x A(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{x}\right)^{\varkappa-1} d\tau, \tag{20}$$

was für $\varkappa = 1$ mit (18) übereinstimmt. Allgemein ergibt sich für $\varkappa > 0$ durch fortgesetzte partielle Integration aus (20)

---

[7]) W. Rogosinski, Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen, Math. Annalen 95 (1925), S. 110–134.

[8]) H.-R., S. 28–29.

(b) [9]) $$R_\varkappa(x) = \frac{\varkappa\cdot(\varkappa-1)}{x^2}\int_0^x\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{\varkappa-2}\int_0^\tau A(\vartheta)\,d\vartheta\,d\tau$$

$$= \frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{x^3}\int_0^x\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{\varkappa-3}\int_0^\tau\int_0^t A(\vartheta)\,d\vartheta\,dt\,d\tau = \ldots$$

und schließlich die Behauptung.

Aus (18) folgt unmittelbar der

Hilfssatz 2. *Es seien $\mu > \varkappa \geqq 0$ ganz. Für $x > 0$ gilt*

$$R_\mu(x) = \frac{\mu!}{\varkappa!}\cdot\frac{1}{x^\mu}\left(\int_0^x\right)^{\mu-\varkappa} R_\varkappa(\tau)\,\tau^\varkappa\,d\tau. \tag{21}$$

Hilfssatz 3. *Es seien $\mu > \varkappa \geqq 0$ ganz.*

Aus $|R_\varkappa(x)| \leqq M$ für alle x folgt $|R_\mu(x)| \leqq M$ für alle x.

Beweis. Formel (21) und die aus ihr für $A(\tau) \equiv 1$ folgende Identität

$$1 \equiv \frac{\mu!}{\varkappa!}\cdot\frac{1}{x^\mu}\left(\int_0^x\right)^{\mu-\varkappa}\tau^\varkappa\,d\tau. \tag{21*}$$

Endlich ergeben (21) und (21*) ersichtlich den

Hilfssatz 4. *Es seien $\mu > \varkappa \geqq 0$ ganz* [10]).

Aus $R_\varkappa(x) \to S$ folgt $R_\mu(x) \to S$.

Genauer gilt bei reellem $A(\tau)$

$$\underline{\lim}\, R_\varkappa(x) \leqq \underline{\lim}\, R_\mu(x) \leqq \overline{\lim}\, R_\mu(x) \leqq \overline{\lim}\, R_\varkappa(x). \tag{22}$$

Diese wenigen einfachen Bemerkungen über die Rieszschen Mittel genügen schon zum Beweise unseres grundlegenden Theorems über die V-Verfahren (6).

Theorem. Voraussetzung.

1. $\varphi(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (1-y)^{\varkappa+\nu}$ $(\varkappa \geqq 0$ *ganz*, $a_0 \neq 0$, $0 \leqq y \leqq 1)$.

2. $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ *konvergent.*

Behauptung. A. *Aus $R_\varkappa(x) \to S$ folgt $V(x) \to S\cdot\varphi(0)$.*

B. *Aus $V(x) \to C$ und $R_\mu(x) \to S$ (für irgendein festes $\mu \geqq 0$) folgt*

$$C = S\cdot\varphi(0) \tag{a}$$

[9]) Die partielle Integration in (b) ist $(\varkappa-1)$-mal auszuführen.

[10]) Der Satz gilt auch für nicht ganze μ und $\varkappa$; vgl. H.-R., Theorem 16, S. 29.

und

$$(b) \qquad R_\varkappa(x) \to S.$$

Beweis. Die Voraussetzung 1 ist mit der Identität

$$(23) \qquad V(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu R_{\varkappa+\nu}(x)$$

gleichbedeutend.

A. Wir dürfen $S = 0$ voraussetzen, anderenfalls man in (1) nur a_0 durch $a_0' = a_0 - S$ zu ersetzen hat.

Aus Hilfssatz 3 folgt jetzt die Existenz eines $M > 0$, so daß für alle ganzzahligen $\nu \geqq 0$ und alle x

$$(c) \qquad |R_{\varkappa+\nu}(x)| \leqq M$$

und überdies nach Hilfssatz 4

$$(d) \qquad R_{\varkappa+\nu}(x) \to 0$$

gilt.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung 2 ein $N(\varepsilon)$, so daß

$$(e) \qquad \sum_{\nu=N}^{\infty} |a_\nu| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

wird. Für $x > X(\varepsilon)$ wird daher nach (c) und (d)

$$(f) \qquad |V(x)| \leqq \sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu|\,|R_{\varkappa+\nu}(x)| + \sum_{\nu=N}^{\infty} |a_\nu|\,|R_{\varkappa+\nu}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

wie behauptet.

B. Es genügt, die Behauptung (b) zu beweisen, weil dann (a) aus Teil A folgt. Ferner darf wieder $S = 0$ vorausgesetzt werden, so daß aus

$$(g) \qquad R_\mu(x) \to 0$$

jetzt

$$(h) \qquad R_\varkappa(x) \to 0$$

zu folgern ist.

Weiter darf μ ganzzahlig[10]) $> \varkappa$ vorausgesetzt werden, weil sonst nach Hilfssatz 4 nichts zu beweisen bleibt, und endlich genügt es ersichtlich, statt (h)

$$(i) \qquad R_{\mu-1}(x) \to 0$$

zu zeigen.

Wir setzen

$$\text{(j)} \qquad V(x) = \sum_{\nu=0}^{\mu-\varkappa-1} \alpha_\nu R_{\varkappa+\nu}(x) + \sum_{\nu=\mu-\varkappa}^{\infty} \alpha_\nu R_{\varkappa+\nu}(x) \equiv V_1(x) + V_2(x).$$

Aus A und (g) folgt sofort

$$\text{(k)} \qquad V_2(x) \to 0,$$

so daß die Voraussetzungen von B

$$\text{(l)} \qquad V_1(x) \to C$$

ergeben.

Für $\mu = \varkappa + 1$ bedeutet dies

$$\text{(m)} \qquad \alpha_0 R_\varkappa(x) \to C,$$

wo wegen Hilfssatz 4 $C = 0$ sein muß, d. i. die Behauptung.

Für $\mu \geqq \varkappa + 2$ ist aber nach (21*) auch

$$\text{(n)} \qquad V_1^*(x) \equiv \frac{(\mu-1)!}{\varkappa!} \cdot \frac{1}{x^{\mu-1}} \left(\int_0^x \right)^{\mu-\varkappa-1} V_1(\tau) \tau^\varkappa d\tau$$

$$= \frac{(\mu-1)!}{\varkappa!} \cdot \frac{1}{x^{\mu-1}} \left(\int_0^x \right)^{\mu-\varkappa-1} \{C + o(1)\} \tau^\varkappa d\tau \to C.$$

Nun ist für $\nu = 0$ nach (21)

$$\text{(o)} \qquad \frac{(\mu-1)!}{\varkappa!} \cdot \frac{1}{x^{\mu-1}} \left(\int_0^x \right)^{\mu-\varkappa-1} R_\varkappa(\tau) \tau^\varkappa d\tau = R_{\mu-1}(x).$$

Um also

$$\text{(p)} \qquad \alpha_0 \cdot R_{\mu-1}(x) \to C$$

und damit, wegen (g) und Hilfssatz 4, das behauptete (i) zu beweisen, genügt es, für die übrigen in $V_1(x)$ auftretenden $0 < \nu \leqq \mu - \varkappa - 1$

$$\text{(q)} \qquad \frac{1}{x^{\mu-1}} \left(\int_0^x \right)^{\mu-\varkappa-1} R_{\varkappa+\nu}(\tau) \tau^\varkappa d\tau \to 0$$

zu zeigen.

Es ist aber für ein solches ν (die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bezeichnen gewisse numerische Konstanten)

$$(\mathfrak{r}) \qquad \frac{1}{x^{\mu-1}}\left(\int_0^x\right)^{\mu-\varkappa-1} R_{\varkappa+\nu}(\tau)\tau^{\varkappa}\,d\tau = \frac{1}{x^{\mu-1}}\left(\int_1^x\right)^{\mu-\varkappa-1} R_{\varkappa+\nu}(\tau)\frac{\tau^{\varkappa+\nu}}{\tau^{\nu}}\,d\tau + o(1)$$

$$= \frac{1}{x^{\mu-1}}\left(\int_1^x\right)^{\mu-\varkappa-2}\left\{\left[\frac{1}{t^{\nu}}\int_0^t R_{\varkappa+\nu}(\vartheta)\vartheta^{\varkappa+\nu}\,d\vartheta\right]_1^{\tau}\right.$$

$$\left. + \nu\int_1^{\tau}\frac{1}{t^{\nu+1}}\int_0^t R_{\varkappa+\nu}(\vartheta)\vartheta^{\varkappa+\nu}\,d\vartheta\,dt\right\}d\tau + o(1)$$

$$= \frac{1}{x^{\mu-1}}\left\{\alpha\left(\int_1^x\right)^{\mu-\varkappa-2} R_{\varkappa+\nu+1}(\tau)\tau^{\varkappa+1}\,d\tau + \beta\left(\int_1^x\right)^{\mu-\varkappa-1} R_{\varkappa+\nu+1}(\tau)\tau^{\varkappa}\,d\tau\right\} + o(1)$$

$$= \frac{1}{x^{\mu-1}}\left\{\gamma\left(\int_1^x\right)^{\mu-\varkappa-3} R_{\varkappa+\nu+2}(\tau)\tau^{\varkappa+2}\,d\tau + \delta\left(\int_1^x\right)^{\mu-\varkappa-2} R_{\varkappa+\nu+2}(\tau)\tau^{\varkappa+1}\,d\tau\right.$$

$$\left. + \varepsilon\left(\int_1^x\right)^{\mu-\varkappa-1} R_{\varkappa+\nu+2}(\tau)\tau^{\varkappa}\,d\tau\right\} + o(1) = \dots$$

$$= \frac{1}{x^{\mu-1}}\sum_{l=1}^{\mu-\varkappa-1}\beta_l\left(\int_1^x\right)^{l} R_{\mu+\nu-2}(\tau)\tau^{\mu-l-1}\,d\tau + o(1)$$

$$= \beta_1 R_{\mu+\nu-1}(x) + \frac{1}{x^{\mu-1}}\sum_{l=1}^{\mu-\varkappa-1}\gamma_l\left(\int_1^x\right)^{l} R_{\mu+\nu-1}(\tau)\tau^{\mu-l-1}\,d\tau + o(1) = o(1),$$

weil $\mu+\nu-1 \geqq \mu$ ist und aus (g), Hilfssatz 4 und (21*) ersichtlich für $l \geqq 1$

$$(\mathfrak{s}) \qquad \frac{1}{x^{\mu-1}}\left(\int_1^x\right)^{l} R_{\mu+\nu-1}(\tau)\tau^{\mu-l-1}\,d\tau \to 0$$

folgt.

Damit ist das Theorem vollständig bewiesen.

Zusatz. *Wenn statt* $V(x) \to C$ *etwa*

$$(24) \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\,|V(x)| \leqq K$$

vorausgesetzt wird, so zeigt ein Blick auf den Beweis von B, *daß jetzt statt*

$$(\mathfrak{p}) \qquad \alpha_0 \cdot R_{\mu-1}(x) \to C$$

noch

$$(\mathfrak{t}) \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\,|\alpha_0(R_{\mu-1}(x) - S)| \leqq K$$

gefolgert werden kann.

Von dieser Bemerkung werden wir im folgenden eine wichtige Anwendung machen.

§ 2.

Es wird sich jetzt darum handeln, durch geeignete Wahl der „erzeugenden" Funktion $\varphi(y)$ in (6) einen Einblick in das Abschnittsverhalten der Dirichletschen Reihe (8) in ihren „Summierungshalbebenen"[11]) zu gewinnen, der zugleich für das jeweilige Riesssche Verfahren (ganzzahliger Ordnung) daselbst charakteristisch ist. Für diesen Zweck können wir uns durchaus mit den im eingangs präzisierten Sinne „bedingten" Aussagen unseres Theorems begnügen.

I. *Abschnittsnäherungen.* Dies Verfahren erhält man durch Wahl von

$$(25) \qquad \varphi(y) = e^{-ay} = e^{-a} \cdot e^{a(1-y)} = e^{-a} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^\nu (1-y)^\nu}{\nu!} \quad (a \text{ beliebig}),^{12})$$

und es ist

$$(26) \qquad V(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n \frac{a}{x}} = A_x\left(\frac{a}{x}\right).$$

Das Theorem lehrt den

Satz 1. *Das Verfahren der Abschnittsnäherung ist bedingt äquivalent mit Konvergenz.*

II. *Abschnittskoppelungen.* Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varkappa+1}$ beliebige von 0 verschiedene, $a_1, a_2, \ldots, a_{\varkappa+1}$ beliebige untereinander verschiedene komplexe Größen. Die Funktion

$$(27) \qquad \varphi(y) = \sum_{i=1}^{\varkappa+1} \alpha_i e^{-a_i y}; \qquad \varphi(0) = \sum_{i=1}^{\varkappa+1} \alpha_i$$

führt zu einem Verfahren

$$(28) \qquad V(x) \equiv \mathfrak{K}_\varkappa(x) = \sum_{i=1}^{\varkappa+1} \alpha_i A_x\left(\frac{a_i}{x}\right),$$

das wir als „$(\varkappa+1)$-*fache Abschnittskoppelung*" bezeichnen wollen. Sind die a_i reell bzw. rein imaginär, so sprechen wir aus unmittelbar einleuchtenden Gründen von „*horizontalen*" bzw. „*vertikalen*" Koppelungen.

1. Der Spezialfall $\varkappa = 1$.

Setzt man

$$(a) \qquad \alpha_1 = \alpha_1' e^{a_1}; \qquad \alpha_2 = \alpha_2' e^{a_2},$$

so wird nur für

$$(b) \qquad \alpha_1' + \alpha_2' = 0$$

---

[11]) H.-R., S. 43.

[12]) Für $a = 0$ ist natürlich $\varphi(y) \equiv 1$.

das zugehörige $\varkappa$ unseres Theorems zu 1. Ein höheres $\varkappa$ kann nicht erzielt werden, weil

$$\text{(c)} \qquad \alpha_1' + \alpha_2' = 0, \quad \alpha_1' a_1 + \alpha_2' a_2 = 0$$

wegen $a_1 + a_2$ nicht gemeinsam durch nicht verschwindende α_1', α_2' erfüllbar ist.

So findet man den

Satz 2a. *Das (durch $\varphi(0) = 1$) normierte Verfahren der zweifachen Abschnittskoppelung ist nur für*

$$\text{(29)} \qquad \alpha_1 = \frac{e^{a_1}}{e^{a_1} - e^{a_2}}; \quad \alpha_2 = -\frac{e^{a_2}}{e^{a_1} - e^{a_2}} \qquad (a_1 \not\equiv a_2 \pmod{2\pi i})$$

mit dem R_1-Verfahren, sonst aber mit Konvergenz bedingt äquivalent. Die Relation

$$\text{(30)} \qquad A_x\left(\frac{a_1}{x}\right) - A_x\left(\frac{a_2}{x}\right) \to 0$$

ist nur, wenn $a_1 \equiv a_2 \pmod{2\pi i}$ ist, für die R_1-Summierbarkeit, sonst aber für Konvergenz bedingt charakteristisch.

Die auf die R_1-Mittel bezüglichen Aussagen dieses Satzes kann man auch so zusammenfassen:

Satz 2a*. *Die Relation*

$$\text{(31)} \qquad e^{a_1}\left(A_x\left(\frac{a_1}{x}\right) - S\right) - e^{a_2}\left(A_x\left(\frac{a_2}{x}\right) - S\right) \to 0$$

ist für die R_1-Summierbarkeit (im Falle $a_1 \not\equiv a_2 \pmod{2\pi i}$ zum Werte S) bedingt charakteristisch.

Spezialisiert man auf „*symmetrische Summen- bzw. Differenzkoppelungen*“ ($a_1 = -a_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ bzw. $\alpha_1 = -\alpha_2$), so findet man, daß nur das in der Einleitung unter (10*) genannte Verfahren $K_1^a(x)$, und zwar nur

$$\text{(32)} \qquad K_1^{\frac{p\pi}{2}}(x) = \frac{A_x\left(\frac{ip\pi}{2x}\right) + A_x\left(\frac{-ip\pi}{2x}\right)}{2} \qquad (p \text{ ungerade}),$$

also eine vertikale Koppelung, dem R_1-Verfahren bedingt äquivalent ist.

Ähnlich ist nur die Relation

$$\text{(33)} \qquad D_1^{k\pi}(x) = A_x\left(\frac{ik\pi}{x}\right) - A_x\left(\frac{-ik\pi}{x}\right) \to 0 \qquad (k \text{ ganz})$$

für die R_1-Summierbarkeit bedingt charakteristisch.

2. Will man *allgemein* das Verfahren der $\mathfrak{R}_\varkappa(x)$ in eine bedingt charakteristische Beziehung zum $R_\varkappa$-Verfahren setzen, so hat man mit

$$\text{(d)} \qquad \alpha_i = \alpha_i' e^{a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varkappa + 1)$$

das Gleichungssystem

$$\text{(e)} \qquad \sum_{i=1}^{\varkappa+1} \alpha_i' a_i^{\varrho} = 0 \text{ [13]} \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa - 1)$$

zu erfüllen. Nimmt man noch die „Normierung"

$$\text{(f)} \qquad \sum_{i=1}^{\varkappa+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\varkappa+1} \alpha_i' e^{a_i} = 1$$

hinzu, so ist das System (e) und (f) nur im Falle

$$\text{(34)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} e^{a_1} & e^{a_2} & \ldots & e^{a_{\varkappa+1}} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{\varkappa+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_{\varkappa+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{\varkappa-1} & a_2^{\varkappa-1} & \ldots & a_{\varkappa+1}^{\varkappa-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

und zwar dann eindeutig auflösbar. Wir erhalten somit den

Satz 2. *Das (durch $\varphi(0) = 1$) normierte Verfahren der $(\varkappa+1)$-fachen Abschnittskoppelungen ist nur für $\Delta \neq 0$ und*

$$\text{(35)} \qquad \alpha_i = (-1)^{i-1} \prod_{\substack{k>l \\ k,\, l \neq i}} (a_k - a_l)^{e^{a_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varkappa+1)$$

mit dem $R_\varkappa$-Verfahren bedingt äquivalent.

Äquivalenz mit einem höheren R-Verfahren kann wieder *nicht* erzielt werden, weil sonst (e) auch noch für $\varrho = \varkappa$ erfüllt sein müßte, was wegen des Nichtverschwindens der Potenzdeterminante der a_i unmöglich ist.

Ist endlich $\Delta = 0$, so hat man statt (f) die Normierung

$$\text{(g)} \qquad \sum_{i=1}^{\varkappa+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\varkappa+1} \alpha_i' e^{a_i} = 0$$

zu wählen, und die α_i sind bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt. Man erhält so in einer (35) umfassenden Formulierung den

Satz 2*. *Die Relation*

$$\text{(36)} \qquad \sum_{i=1}^{\varkappa+1} (-1)^{i-1} \prod_{\substack{k>l \\ k,\, l \neq i}} (a_k - a_l)\, e^{a_i} \left(A_x\left(\frac{a_i}{x}\right) - S \right) \to 0$$

ist für die $R_\varkappa$-Summierbarkeit (im Falle $\Delta \neq 0$ zum Werte S) bedingt charakteristisch.

---

[13]) Für ein $a_i = 0$ ist $a_i^0 = 1$, sonst $a_i^\varrho = 0$ zu verstehen.

Als besonders bemerkenswerten Spezialfall von (35) erhält man wieder die „*vertikalen symmetrischen Summenkoppelungen*“

$$K_{\varkappa}^{\frac{p\pi}{2}}(x)=\frac{1}{2^{\varkappa}}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\binom{\varkappa}{\nu}A_x\left(\frac{i(\varkappa-2\nu)p\pi}{2x}\right), \qquad (p \text{ ungerade}) \tag{37}$$

die ein mit dem $R_\varkappa$-Verfahren bedingt äquivalentes Summierungsverfahren vermitteln.

Die „*vertikalen symmetrischen Differenzkoppelungen*“

$$D_{\varkappa}^{k\pi}(x)=\sum_{\nu=0}^{\varkappa}(-1)^{\nu}\binom{\varkappa}{\nu}A_x\left(\frac{i(\varkappa-2\nu)k\pi}{x}\right) \qquad (k>0 \text{ ganz}) \tag{38}$$

geben dagegen in

$$D_{\varkappa}^{k\pi}(x)\to 0 \tag{39}$$

eine für die $R_\varkappa$-Summierung bedingt charakteristische Relation.

3. Wählt man die α_i' so, daß (e) nur für die $\varrho\leqq\varkappa^*-1$ mit $\varkappa^*<\varkappa$, nicht aber für $\varrho=\varkappa^*$ erfüllt ist, so erhält man ersichtlich Relationen, die für die $R_{\varkappa^*}$-Summierung bedingt charakteristisch sind.

So ergeben sich z. B. für $\varkappa=2$, $\varkappa^*=1$

$$a_1=a, \qquad a_2=0, \qquad a_3=-a \tag{h}$$

und

$$\alpha_1'=\frac{e^{-a}}{2}, \qquad \alpha_2'=-\mathfrak{Cof}\,a, \qquad \alpha_3'=\frac{e^{a}}{2} \tag{i}$$

bzw.

$$\alpha_1'=\frac{e^{-a}}{2}, \qquad \alpha_2'=\mathfrak{Sin}\,a, \qquad \alpha_3'=-\frac{e^{a}}{2} \tag{k}$$

die folgenden *bemerkenswerten Relationen*

$$\frac{A_x\left(\frac{a}{x}\right)+A_x\left(-\frac{a}{x}\right)}{2}-\mathfrak{Cof}\,a\,(A_x(0)-S)\to S \qquad (a\neq k\pi i;\ k \text{ ganz}) \tag{40}$$

bzw.

$$\frac{A_x\left(\frac{a}{x}\right)-A_x\left(-\frac{a}{x}\right)}{2}+\mathfrak{Sin}\,a\,(A_x(0)-S)\to 0 \qquad \left(a\neq\frac{p\pi i}{2}, p \text{ ungerade}\right), \tag{41}$$

die beide für das R_1-Verfahren bedingt charakteristisch sind. Sie enthalten offenbar speziell die früheren Resultate (32) und (33). Für die ausgeschlossenen Werte von a führt (40) auf die Ergebnisse (37) und (39) mit $\varkappa=2$ und ist dann für die R_2-Summierbarkeit bedingt charakteristisch. (41) ergibt dann in

$$\frac{A_x\left(\frac{ip\pi}{2x}\right)-A_x\left(-\frac{ip\pi}{2x}\right)}{2i}+A_x(0)\to S \qquad (p=4k+1,\ k \text{ ganz}) \tag{42}$$

und

$$(43)\qquad \frac{A_x\left(\frac{ip\pi}{2x}\right)-A_x\left(-\frac{ip\pi}{2x}\right)}{2i}-A_x(0)\to -S \quad (p=4k+3,\ k\ ganz)$$

zwei neue für die R_2-Summierbarkeit bedingt charakteristische Relationen.

Wir wollen darauf verzichten, die Fülle der Anwendungsmöglichkeiten dieser Überlegung zur Aufspürung weiterer formal besonders durchsichtiger, für die Rieszschen Mittel bedingt charakteristischer Beziehungen hier noch genauer auszunutzen.

III. Die abgeleiteten Ergebnisse lassen sich ohne weiteres auf die *Theorie der trigonometrischen Reihen* übertragen, wo sie ja auch zuerst Anwendung gefunden haben [7]).

Es seien

$$(44)\qquad T(\tau)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n\tau+b_n\sin\lambda_n\tau) \qquad (a_n,\ b_n,\ \tau\ \text{reell})$$

eine formal geschriebene, zur λ-Folge (2) gehörige trigonometrische Reihe,

$$(45)\qquad s_x(\tau)\equiv\sum_{\lambda_n<x}(a_n\cos\lambda_n\tau+b_n\sin\lambda_n\tau)$$

ihre Abschnitte. Die Reihe

$$(46)\qquad \bar{T}(\tau)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(b_n\cos\lambda_n\tau-a_n\sin\lambda_n\tau)$$

heißt die zu $T(\tau)$ „konjugierte" trigonometrische Reihe; ihre Abschnitte bezeichnen wir mit $\bar{s}_x$.

Man beachte die Identitäten

$$(47)\qquad \frac{s_x(\tau)+s_x(-\tau)}{2}=\sum_{\lambda_n<x}a_n\cos\lambda_n\tau=\frac{A_x(i\tau)+A_x(-i\tau)}{2}$$

und

$$(48)\qquad \frac{s_x(\tau)-s_x(-\tau)}{2}=\sum_{\lambda_n<x}b_n\sin\lambda_n\tau=i\cdot\frac{B_x(i\tau)-B_x(-i\tau)}{2},$$

ferner, daß wegen

$$(49)\quad T(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n(\vartheta+\tau_0)+b_n\sin\lambda_n(\vartheta+\tau_0)) \qquad (\vartheta=\tau-\tau_0)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}((a_n\cos\lambda_n\tau_0+b_n\sin\lambda_n\tau_0)\cos\lambda_n\vartheta$$

$$+(b_n\cos\lambda_n\tau_0-a_n\sin\lambda_n\tau_0)\sin\lambda_n\vartheta)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^*\cos\lambda_n\vartheta+b_n^*\sin\lambda_n\vartheta)\equiv T^*(\vartheta)$$

der Wert $\tau_0=0$ keine bevorzugte Rolle spielt!

So erhält man die nachstehenden Sätze, in deren Aussagen, worauf noch besonders aufmerksam gemacht sei, *im Falle* $\lambda_n = n$ *das* $R_\varkappa$*-Verfahren durch das dann äquivalente*[14]) *Cesàro-*$(C_\varkappa)$*-Verfahren ersetzt* werden kann.

Aus (32) und allgemeiner (37) folgt der

Satz 3. *Für trigonometrische Reihen* (44) *ist das Verfahren der „symmetrischen Summenkoppelung"*

$$\mathfrak{S}_1^{(p)}(x) \equiv \frac{s_x\left(\tau + \frac{p\pi}{2x}\right) + s_x\left(\tau - \frac{p\pi}{2x}\right)}{2} \qquad (50)$$

(p ungerade)

mit dem R_1*-Verfahren bedingt äquivalent.*

Allgemeiner ist das Verfahren[15])

$$\mathfrak{S}_\varkappa^{(p)}(x) \equiv \frac{1}{2^\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\nu} s_x\left(\tau + \frac{(\varkappa - 2\nu)p\pi}{2x}\right) \qquad (51)$$

(p ungerade)

mit dem $R_\varkappa$*-Verfahren bedingt äquivalent.*

(33) bzw. (39) ergeben ebenso den

Satz 4. *Die Relation*

$$s_x\left(\tau + \frac{l\pi}{x}\right) - s_x\left(\tau - \frac{k\pi}{x}\right) \to 0 \qquad (52)$$

(k > 0 ganz)

ist für die R_1*-Summierbarkeit der konjugierten Reihe* $\bar{T}(\tau)$ *bedingt charakteristisch.*

Allgemeiner ist für ungerades $\varkappa$ *die Relation*

$$\sum_{\nu=0}^{\varkappa} (-1)^\nu \binom{\varkappa}{\nu} s_x\left(\tau + \frac{(\varkappa - 2\nu)k\pi}{x}\right) \to 0 \qquad (53)$$

(k > 0 ganz)

für die $R_\varkappa$*-Summierbarkeit von* $\bar{T}(\tau)$ *bedingt charakteristisch, während sie es für gerades* $\varkappa > 0$ *in bezug auf die* $R_\varkappa$*-Summierbarkeit von* $T(\tau)$ *selbst ist.*

Endlich finden wir aus (40) und (41) den

Satz 5. *Die Relation*

$$\frac{s_x\left(\tau + \frac{a}{x}\right) + s_x\left(\tau - \frac{a}{x}\right)}{2} - \cos a\,(s_x(\tau) - S) \to S \qquad (54)$$

[16]) *(*$a + k\pi$*, k ganz)*

ist für die R_1*-Summierbarkeit von* $T(\tau)$ *zum Werte* S *bedingt charakteristisch.*

---

[14]) M. Riesz, Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Comptes Rendus, 12. Juni 1911.

[15]) Für $\varkappa > 1$, $\lambda_n = n$ hat Herr Fekete zuerst diese Koppelungen angegeben [7]).

[16]) Die Formel (54) stammt von Herrn Fejér, der sie für eine C_1-summierbare übliche $(\lambda_n = n)$ trigonometrische Reihe fand [7]).

Die Relation

55) $$\frac{s_x\left(\tau+\frac{a}{x}\right)-s_x\left(\tau-\frac{a}{x}\right)}{2}-\sin a\,(\bar{s}_x(\tau)-\bar{S})\to 0\quad\left(a\neq\frac{p\pi}{2},\ p\ \textit{ungerade}\right)$$

ist für die R_1-Summierbarkeit von $\bar{T}(\tau)$ (im Falle $\sin a\neq 0$ zum Werte $\bar{S}$) bedingt charakteristisch.

Für die Ausnahmewerte von a sind (54) *bzw.* (55) *für die R_2-Summierbarkeit von $T(\tau)$ bzw. $\bar{T}(\tau)$ bedingt charakteristisch.*

IV. An die Formel (52) kann man zwei wichtige, im übrigen mit anderem Beweise bekannte Bemerkungen unmittelbar anknüpfen.

Es sei $T(\tau)$ die Fourierreihe einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f(\tau)$. In der unter [7]) zitierten Arbeit habe ich bewiesen, daß an jeder „Sprungstelle" τ, wo also

56) $$\lim_{h\to 0}\,(f(\tau+h)-f(\tau-h))=D\qquad(h>0)$$

existiert, die Relation

57) $$s_m\left(\tau+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m\left(\tau-\frac{k\pi}{m}\right)\to\frac{2}{\pi}\,D\cdot\int_0^{k\pi}\frac{\sin u}{u}\,du\qquad(k\text{ und }m\ \textit{ganz})$$

gilt. (52) lehrt also:

1. *Wenn $D=0$ ist, also z. B. an den Stetigkeitsstellen von $f(\tau)$, ist die zur Fourierreihe von $f(\tau)$ konjugierte trigonometrische Reihe entweder von keiner oder von der ersten Ordnung C-summierbar* [17]).

2. *Wenn $D\neq 0$ ist, also z. B. an den Unstetigkeitsstellen erster Art von $f(\tau)$, ist die konjugierte Reihe von keiner Ordnung C-summierbar* [18]).

Zur Begründung beachte man noch, daß für Fourierreihen

1) $$a_n,\ b_n=o(1)$$

ist, also wegen

m) $$s_x\left(\tau+\frac{k\pi}{x}\right)-s_{[x]}\left(\tau+\frac{k\pi}{[x]}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{[x]}a_n\left(\cos n\left(\tau+\frac{k\pi}{x}\right)-\cos n\left(\tau+\frac{k\pi}{[x]}\right)\right)$$

$$+b_n\left(\sin n\left(\tau+\frac{k\pi}{x}\right)-\sin n\left(\tau+\frac{k\pi}{[x]}\right)\right)$$

$$=O\sum_{n=0}^{[x]}(|a_n|+|b_n|)\left|\sin\left(\frac{nk\pi}{2}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)\right)\right|=o\sum_{n=0}^{[x]}\frac{1}{x}=o(1),$$

57) auch für nicht ganze m gilt.

[17]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, The allied series of a Fourier series, Proc. Lond. Math. Soc. ser. 2, 24 (1924), S. 211–246; siehe Theorem I, S. 215.

[18]) A. Pringsheim, Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenz-

V. Durch Wahl geeigneter anderer Funktionen $\varphi(y)$ können aus unserem Theorem noch eine Fülle interessanter, für die $R_\varkappa$-Summierbarkeit einer Reihe bedingt charakteristischer Relationen abgeleitet werden. So verlohnt es sich insbesondere noch, die Abschnittskoppelungen der formal differenzierten Dirichletschen Reihe (8) zu bilden. Der Leser wird sich die dabei entspringenden Ergebnisse leicht selbst zurechtlegen, so daß auf ihre Darstellung hier verzichtet werden kann.

Wir wollen nur noch eine letzte Folgerung aus unserem Theorem ziehen, die sich auf einen *fast unmittelbar* abzulesenden Beweis der bekannten Umkehrsätze des R-Verfahrens bezieht.

Wählt man als erzeugende Funktion des V-Verfahrens

$$\varphi(y) = y, \tag{58}$$

so ergibt sich, daß die Relation

$$\sum_{\lambda_n < x} a_n \lambda_n = o(x) \tag{59}$$

für die Konvergenz der Reihe (1) bedingt charakteristisch ist.

Hierin ist insbesondere enthalten der sogenannte

$(o - R \to K)$-Satz. *Wenn die Reihe* (1) *R-summierbar und*

$$a_n = o\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \tag{60}$$

ist, so ist (1) *sogar konvergent.*

Ohne Schwierigkeit, allerdings mit einer gewissen *Einschränkung über die λ-Folge*, erhalten wir aber auch den tiefer gelegenen Hardyschen

$(O - R \to K)$-Satz[19]. *Es sei*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \to 1.^{20}) \tag{61}$$

Wenn die Reihe (1) *R-summierbar und*

$$a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \tag{62}$$

ist, so ist (1) *sogar konvergent.*

Beweis. Für ganzes $k > 0$ ist gleichmäßig in den k

$$\frac{1}{x^k} \sum_{\lambda_n < x} \lambda_n^k a_n = O\left(\frac{1}{x^k} \sum_{\lambda_n < x} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \lambda_n^{k-1}\right) \qquad (\lambda_{-1} = 0) \tag{n}$$

---

kreise, Münchener Sitzungsberichte **30** (1900), S. 37–100; s. S. 87. $T(\tau)$ ist sogar *eigentlich divergent*.

[19]) G. H. Hardy, An extension of a theorem on oscillatings series, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, **12** (1912), S. 174–180.

[20]) Der Satz gilt auch ohne diese Voraussetzung.

und hierin wegen (61) gleichmäßig in den x bei festem k

$$(o) \qquad \frac{1}{x^k}\sum_{\lambda_n<x}(\lambda_n-\lambda_{n-1})\lambda_n^{k-1}=\frac{1}{x^k}\sum_{\lambda_n<x}(\lambda_n-\lambda_{n-1})\lambda_{n-1}^{k-1}+o(1)$$

$$<\frac{1}{x^k}\int_0^x y^{k-1}dy+o(1)=\frac{1}{k}+o(1),$$

o daß gleichmäßig in den k

$$(p) \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{1}{x^k}\sum_{\lambda_n<x}\lambda_n^k a_n\right|=O\left(\frac{1}{k}\right)$$

gilt.

Ist nun $\mu\geqq 1$ ganz und die Reihe (1) R_μ-summierbar zum Werte S, so lehrt (p) und der *Zusatz* zu unserem Theorem — es ist $\varphi(y)=y^k$, also $\alpha_0=1$, $\varkappa=0$ zu setzen —, daß gleichmäßig in den k

$$(q) \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\,|R_{\mu-1}(x)-S|=O\left(\frac{1}{k}\right),$$

also

$$(r) \qquad R_{\mu-1}(x)\to S$$

gilt. Daraus folgt aber die Behauptung.

Königsberg i. Pr., den 4. Juli 1925.

(Eingegangen am 11. Juli 1925.)

Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide.

Von

Ch. H. Müntz in Berlin-Nikolassee.

Einleitung.

Für die O-Abschätzung des Gitterrestes n-dimensionaler Ellipsoide mit homogener Grundform und rationalen Koeffizienten verdankt man die bisher besten Resultate den Herren Walfisz[1]) und Landau[2]). In einer letztens erschienenen Arbeit[3]) dehnt Herr Landau diese Resultate auch auf rational verschobene Ellipsoide aus und beweist für alle betreffenden Gitterreste bei $n \geqq 5$ nicht nur $O\left(x^{\frac{n}{2}-1}\right)$, sondern auch, bei $n \geqq 3$, $\Omega\left(x^{\frac{n}{2}-1}\right)$; das letztere Resultat war auf Grund der früheren Hauptformeln nur für kontinuierlich veränderliches x selbstverständlich und wird nun auch für (allein interessierendes) diskontinuierliches x abgeleitet; für $n < 5$ bleiben bei O noch gewisse Spannen übrig.

Wir werden hier unter den gleichen Voraussetzungen etwas weitergehende Ω-Resultate gewinnen, die im folgenden Satze zusammengefaßt seien.

Es sei

$$Q(u) = \sum_{g,h=1}^{n} c_{gh}(u_g - a_g)(u_h - a_h)$$

eine positiv definite quadratische Form mit rationalen c_{gh} und a_f; dann sei, mit ganzen rationalen $u_f = m_f$ und l, $l > 0$,

$$A(x) = \sum_{0 < Q(m) \leqq x} 1, \qquad r(l) = \sum_{l-1 < Q(m) \leqq l} 1;$$

[1]) Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 300–307.
[2]) Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 126–132.
[3]) Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 299–310.

es bezeichne D die Determinante der c_{gh}, ferner, ein für allemal,

$$c = c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} D^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Alsdann gilt für

$$P(l) = A(l) - \frac{cn}{2} \sum_{\lambda=1}^{l} \lambda^{\frac{n}{2}-1} = \sum_{\lambda=1}^{l} \left\{ r(\lambda) - \frac{\pi^{\frac{n}{2}} D^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lambda^{\frac{n}{2}-1} \right\}$$

bei ganzen rationalen $l > 0$, $n \geqq 2$, sowohl

$$\text{(I)} \qquad P(l) = \Omega_R\left(l^{\frac{n-1}{4}}\right),$$

d. h. immer wieder $> K l^{\frac{n-1}{4}}$, $K = \text{Const.} > 0$, als auch

$$\text{(II)} \qquad P(l) = \Omega_L\left(l^{\frac{n-1}{4}}\right),$$

d. h. immer wieder $< -K l^{\frac{n-1}{4}}$, wobei K i. a. von Q abhängt.

Für den eigentlichen üblichen Gitterrest

$$R(x) = A(x) - cx^{\frac{n}{2}} + 1$$

folgt daraus ohne weiteres:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} R(l) &= \Omega_R\left(l^{\frac{n}{2}-1}\right), \\ R\left(l+\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right) &= \Omega_L\left(\left(l+\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right)^{\frac{n}{2}-1}\right) \end{aligned}$$

bei $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$, während bisher in dieser Richtung unseres Wissens nur

$$R(x) = \Omega_R\left(x^{\frac{n-1}{4}}\right), \qquad R(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{n-1}{4}}\right)$$

für kontinuierliches x bekannt gewesen ist[4]). Natürlich ist in (III) das Landausche Resultat (v. o.)

$$\text{(IV)} \qquad R(x) = \Omega\left(x^{\frac{n}{2}-1}\right)$$

mit enthalten.

Übrigens sind die hier befolgten Methoden von den Landauschen durchaus verschieden.

---

[4]) Implizit, allerdings auch mit Angabe endlicher Erfüllungsschranken, enthalten in einer Abhandlung von Landau, Gött. Nachr. 1924, S. 1–14.

§ 1.
Die Grundformeln.

Die weiter unten folgenden Betrachtungen stützen sich auf eine allgemeine, von Fourierreihen mit n Variablen ausgehenden Theorie, deren Grundzüge ausführlich in einer anderen Abhandlung des Verfassers auseinandergesetzt worden sind [5]) und hier nur mit kurzen Beweisandeutungen rekapituliert werden sollen.

Es sei $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ für $-\infty \leqq \xi_f \leqq \infty$ eine willkürlich gegebene, nur gewissen hinreichenden Stetigkeits- und Konvergenzbedingungen — wie sie hier übrigens stets reichlich erfüllt sein werden — unterworfene Funktion ihrer n zunächst reellen Argumente und

$$(1) \qquad \Psi(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \prod_{f=1}^{n} \cos(2\pi \eta_f \xi_f)\, d\xi_f$$

die zugehörige Fouriersche („reziproke") Komplementärfunktion; dann gilt bekanntlich der Cauchy-Poissonsche Summensatz

$$(1^*) \qquad \xi_1 \ldots \xi_n \sum_{l_1, \ldots, l_n = -\infty}^{\infty} \Phi(l_1 \xi_1, \ldots, l_n \xi_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_n = -\infty}^{\infty} \Psi(m_1 \xi_1^{-1}, \ldots, m_n \xi_n^{-1}),$$

wo die über alle Gitterpunkte $(l_1, \ldots, l_n)$ bzw. $(m_1, \ldots, m_n)$ des n-dimensionalen Raumes erstreckten Summationen auf Grund der vorausgesetzten Bedingungen über Φ absolut und gleichmäßig konvergieren. Die gleiche Beziehung bleibt auch bestehen, wenn Ψ, abweichend von (1), durch

$$(1_*) \qquad \Psi(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, e^{2\pi i \sum_{f=1}^{n} \xi_f \eta_f}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

definiert wird.

Nun sei speziell, unter Wahrung der verlangten hinreichenden Stetigkeits- und Konvergenzbedingungen,

$$(2) \qquad \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = F(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = \zeta^2)$$

vorausgesetzt; es stellt sich heraus, daß dann aus (1) auch analog

$$(2_*) \qquad \Psi(\eta_1, \ldots, \eta_n) = G(\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2 = \omega^2)$$

ausfällt, wobei $F(\xi^2)$ und $G(\omega^2)$ durch die folgende, übrigens reziproke Beziehung miteinander verbunden sind, auch für $\omega \to +0$:

$$(2^*) \qquad G(\omega^2) = 2\pi\, \omega^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^{\infty} F(\zeta^2)\, \zeta^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi\omega\zeta)\, d\zeta,$$

---

[5]) Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. für 1925, S. 81–93.

unter $J_\nu(u)$ in üblicher Weise die Besselsche Funktion erster Art mit dem Index ν verstanden.

Der Beweis beruht darauf, daß man eine für $n = 2$ auf Bessel selbst zurückgehende Beziehung folgendermaßen — mit Hilfe bekannter Sonine-Gegenbauerscher Integrale oder, noch einfacher, mit Hilfe des Lerchschen Satzes — verallgemeinern kann: es gilt, für zunächst reelle α_ϱ und positiven Wert der Quadratwurzel,

$$(\underline{2}) \qquad \left(\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha_1 \cos\theta_1) \cdot \cos(\alpha_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2)$$

$$\cdot \cos(\alpha_3 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3) \ldots \cos(\alpha_{n-1} \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1})$$

$$\cdot \cos(\alpha_n \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1}) \cdot \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}\right);$$

man braucht dann in (1), unter der Voraussetzung (2), nur die Eulersche Koordinatentransformation

$$(\overline{2}) \qquad \xi_1 = \zeta \cos\theta; \quad \xi_\nu = \zeta \cos\theta_\nu \prod_{\varkappa=1}^{\nu-1} \sin\theta_\varkappa, \qquad 1 < \nu < n;$$

$$\xi_n = \zeta \prod_{\varkappa=1}^{n-1} \sin\theta_\varkappa; \quad d\xi_1 \ldots d\xi_n = \zeta^{n-1} d\zeta \prod_{\varkappa=1}^{n-1} \sin^{n-1-\varkappa}\theta_\varkappa\, d\theta_\varkappa$$

anzuwenden, um über (2) zu (2*) zu gelangen.

Wird insbesondere, im Einklang mit den verlangten Voraussetzungen,

$$(3) \qquad F(\zeta^2) = e^{-\zeta}$$

gewählt, so läßt sich aus (2*) mit Hilfe bekannter Formeln aus der Theorie der Integrale mit Besselschen Funktionen explizit

$$(3_*) \qquad G(\omega^2) = (4\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{!\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (1 + 4\pi^2\omega^2)^{\frac{-n-1}{2}}$$

bestimmen. Wenn also die Anzahl der Darstellungen einer ganzen rationalen Zahl $l \geqq 0$ als Summe von n Quadraten ganzer rationaler Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ allgemein mit $r(l)$ bezeichnet, ferner $\xi_1 = \ldots = \xi_n = \xi$ genommen wird, so erhält man aus (1*) unter den Voraussetzungen (2), (3):

$$(\underline{3}) \qquad 1 + \sum_{l=1}^{\infty} r(l)\, e^{-l^{\frac{1}{2}}\xi} = c' \left\{ \xi^{-n} + \xi \sum_{m=1}^{\infty} r(m) (\xi^2 + 4\pi^2 m)^{\frac{-n-1}{2}} \right\},$$

hier, wie im folgenden, ein für allemal zur Abkürzung

$$(\overline{3}) \qquad c' = (4\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

gesetzt; die erhaltene Bezeichnung (3) gilt offenbar allgemein für

$$\xi = \sigma + it, \qquad \sigma > 0.$$

Ein unbestimmtes Integral der linken Seite von (3) ist

$$\xi - \sum_{l=1}^{\infty} r(l)\, l^{-\frac{1}{2}}\, e^{-l^{\frac{1}{2}}\xi},$$

ein ebensolches der rechten Seite

$$-c'\left\{\frac{\xi^{-n+1}}{n-1} + \frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\left((\xi^2 + 4\pi^2 m)^{\frac{-n+1}{2}} - (4\pi^2 m)^{\frac{-n+1}{2}}\right)\right\};$$

die beiden so gewonnenen Ausdrücke unterscheiden sich demnach nur um eine Konstante c_0, auf deren genauen Wert es hier nicht ankommt. In gleicher Weise kann man zu noch höheren Integrationsstufen von (3) aufsteigen; allein wesentlich ist dabei das Verhalten der Funktionen

$$(4) \qquad a_k(\xi) = \sum_{l=1}^{\infty} r(l)\, l^{-\frac{k}{2}}\, e^{-l^{\frac{1}{2}}\xi}, \qquad k \geqq 0,$$

sin $k\pi = 0$, in horizontaler Nähe der kritischen Punkte, d. h. für

$$\xi = \sigma, \qquad \xi = \sigma \pm 2\pi i m^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma \to +0;$$

man findet nunmehr mit

$$(4_*) \qquad c = \frac{c'}{\Gamma(n+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

ohne weiteres die folgenden Äquivalenzen und Abschätzungen:

$$(4^*) \qquad \begin{aligned} &a_0(\sigma) \sim c \cdot \Gamma(n+1)\,\sigma^{-n} = c\, n\, \Gamma(n)\,\sigma^{-n};\\ &a_k(\sigma) \sim c\, n\, \Gamma(n-k)\,\sigma^{-n+k}, \qquad k < n;\\ &a_0(\sigma + 2\pi i m^{\frac{1}{2}}) \sim c'\, r(m)(4\pi i m^{\frac{1}{2}})^{\frac{-n+1}{2}}\, \sigma^{\frac{-n-1}{2}}, \qquad i = e^{\frac{\pi i}{2}};\\ &a_k(\sigma + 2\pi i m^{\frac{1}{2}}) = o\left(\sigma^{\frac{-n-1}{2}}\right), \qquad k > 0. \end{aligned}$$

Diese Beziehungen lassen sich entsprechend auf beliebige Ellipsoide übertragen (§§ 4—5); sie erlauben hier ferner, das Problem der Abschätzung

des Gitterrestes für $n \geqq 4$ beiderseitig nach unten befriedigend zu beantworten, wie dies zuerst für die n-dimensionale Kugel gezeigt sei[6]).

§ 2.

Der Gitterrest der n-Kugel.

In Erweiterung der bekannten Hardyschen Methode für $n = 2$ bilden wir zunächst rein formal die Funktion

$$\mathfrak{A}(\xi) = \frac{\xi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} A(l) l^{-\frac{1}{4}} e^{l^{\frac{1}{2}}\xi}, \tag{5}$$

$$A(l) = \sum_{\lambda=1}^{l} r(\lambda).$$

Man hat demnach:

$$\mathfrak{A}(\xi) = \frac{\xi}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} r(\lambda) \sum_{l=\lambda}^{\infty} l^{-\frac{1}{4}} e^{-l^{\frac{1}{2}}\xi}, \tag{5$_*$}$$

worin die letzteren Summen sich nach der klassischen Eulerschen Summenformel mit an beliebiger Stelle angesetztem exaktem Restglied bequem umformen lassen; es ist so auch sofort zu ersehen, daß $\mathfrak{A}(\xi)$ für $\Re\xi = \sigma > 0$ durch (5) als analytische Funktion von ξ wohldefiniert ist.

Für die Anwendung der Eulerschen Formel mit $h = 1$:

$$f'(a) + f'(a+1) + \ldots + f'(a+q-1)$$

$$= \{f(a+q) - f(a)\} - \frac{1}{2}\{f'(a+q) - f'(a)\} + \frac{B_2}{2!}\{f''(a+q) - f''(a)\}$$

$$+ \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-2}}{(2m-2)!}\{f^{(2m-2)}(a+q) - f^{(2m-2)}(a)\}$$

$$- \frac{1}{(2m)!} \int_0^1 \sum_{\varkappa=1}^{q} f^{(2m)}(a+\varkappa-1+\tau)\varphi_{2m}(\tau)\,d\tau,$$

wobei $\varphi_{2m}(\tau)$ das entsprechende Bernoullische Polynom in τ bedeutet, hat man hier bei festem ξ zu setzen:

$$f'(l) = \frac{\xi}{2} l^{-\frac{1}{4}} e^{-\xi l^{\frac{1}{2}}}, \quad f(l) = -e^{-\xi l^{\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{\xi}{2} \sum_{l=\lambda}^{L-1} l^{-\frac{1}{2}} e^{-\xi l^{\frac{1}{2}}} = \left(e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}} - e^{-\xi L^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi}{2}\left(\lambda^{-\frac{1}{4}} e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}} - L^{-\frac{1}{4}} e^{-\xi L^{\frac{1}{2}}}\right) + \tag{5*}$$

---

[6]) Den Fall $n = 2$, bei dem man übrigens mit $a_0(\xi)$ allein auskommt, hat G. H. Hardy in einer heute bereits klassischen Abhandlung (Quarterly Journal of Math. 46, S. 263–283) erledigt; das folgende gibt die Verallgemeinerung der Methode auf beliebige n.

$+$ elementar übersehbare weitere Entwicklung mit Restintegral, deren Einzelheiten — da es hier zunächst nur auf Größenordnungen allein ankommt — erst später (vgl. § 3) nachgetragen werden mögen. Der Übergang zu $L=\infty$ ist in (5^*) auf beiden Seiten ohne weiteres durchführbar; man erhält:

$$(\underline{5}) \quad \frac{\xi}{2}\sum_{l=\lambda}^{\infty} l^{-\frac{1}{2}} e^{-\xi l^{\frac{1}{2}}} = e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{\xi}{4}\lambda^{-\frac{1}{2}} e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{B_2}{2!}\left(\xi\frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{4} + \xi^2\frac{\lambda^{-1}}{4}\right) e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}} +$$

$+$ weitere, wiederum elementar übersehbare Entwicklung, in der das jeweilige Restintegral stets leicht beherrscht werden kann.

Nach Einsetzen in (5_*) wird man auf die Funktionen $a_k(\xi)$ geführt, und erhält dann auf Grund der Beziehungen (4^*), mit übrigens explizit angebbaren Konstanten d_k (v. u.):

$$(6) \quad \mathfrak{A}(\sigma) = c\{\Gamma(n+1)\sigma^{-n} + d_2\Gamma(n-1)\sigma^{-n+2} + d_4\Gamma(n-3)\sigma^{-n+4} + \ldots\},$$

$$d_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}, \ldots,$$

wobei die ∞-Ordnung des Restausdrucks für $\sigma \to +0$ stets kleiner ausfällt als diejenige des letzten exakten Gliedes; dagegen hat man

$$(6_*) \qquad \mathfrak{A}(\sigma + 2\pi i m^{\frac{1}{2}}) \sim c' r(m) (4\pi i m)^{\frac{-n+1}{2}} \sigma^{\frac{-n-1}{2}}.$$

Nunmehr ziehen wir zum Vergleich die Funktionen

$$(6^*) \qquad \mathfrak{b}_k(\xi) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{\frac{k}{2}} e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}\xi}$$

heran; mit Hilfe des grundlegenden Mellinschen Integrals

$$(\underline{6}) \qquad e^{-u} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} u^{-s}\Gamma(s)\,ds, \qquad \Re u > 0, \qquad \varkappa > 0$$

findet man in üblicher Weise, wobei nur wohlbekannte Abschätzungen der Γ- und der (Riemannschen) ζ-Funktion auf vertikalen Geraden heranzuziehen sind:

$$(\bar{6}) \quad \mathfrak{b}_k(\xi) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varkappa>k+2)} \lambda^{\frac{k-s}{2}} \xi^{-s}\Gamma(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varkappa)} \zeta\left(\frac{s-k}{2}\right)\xi^{-s}\Gamma(s)\,ds$$

$$= 2\Gamma(k+2)\xi^{-(k+2)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta\left(\frac{-\nu-k}{2}\right)\frac{(-\xi)^\nu}{\nu!},$$

worin der letztere Summenausdruck eine ganze transzendente Funktion von ξ darstellt[7]).

[7]) Statt der komplexen Residuentheorie würde übrigens auch die Eulersche Summenformel die hier nötigen Abschätzungen von $\mathfrak{b}_k(\xi)$ liefern können.

Es läßt sich daher gewiß ein

$$(7) \qquad \mathfrak{B}(\xi) = \frac{c\xi}{2}\{\mathfrak{b}_{n-1}(\xi) + d_2\mathfrak{b}_{n-3}(\xi) + \ldots\}$$

mit den gleichen Koeffizierten d_k, wie in (6), derart bilden, daß man z. B. bestimmt für $\sigma \to +0$

$$(7_*) \qquad \mathfrak{A}(\sigma) - \mathfrak{B}(\sigma) = o\left(\sigma^{\frac{-n-1}{2}}\right)$$

erzielt. Für die Funktion

$$(7^*) \qquad G(\xi) = \mathfrak{A}(\xi) - \mathfrak{B}(\xi)$$

$$= \frac{\xi}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A(\lambda) - c\left(\lambda^{\frac{n}{2}} + d_2\lambda^{\frac{n}{2}-1} + \ldots\right)\right\}\lambda^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}\xi}$$

gelten dann die Beziehungen:

$$(7) \qquad \mathfrak{G}(\sigma) = o\left(\sigma^{\frac{-n-1}{2}}\right),$$

$$\mathfrak{G}(\sigma + 2\pi i m^{\frac{1}{2}}) \sim c'r(m)(4\pi i m)^{\frac{-n+1}{2}}\sigma^{\frac{-n-1}{2}}.$$

Dieser Funktion stelle man nun, wieder in Erweiterung der Hardy-schen Theorie[8]), die folgende entgegen:

$$(8) \qquad \mathfrak{K}(\xi) = K\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^{\frac{n-3}{4}}e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}\xi} \qquad (K = \text{Const.} > 0),$$

für die offenbar aus (7) umgekehrt gilt:

$$(8_*) \qquad \mathfrak{K}(\sigma) \sim 2K\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sigma^{\frac{-n-1}{2}},$$

$$\mathfrak{K}(\sigma + 2\pi i m^{\frac{1}{2}}) = o\left(\sigma^{\frac{-n-1}{2}}\right).$$

Nunmehr sei angenommen, für alle $\lambda \geqq L_0$ gelte etwa stets

$$(8^*) \qquad P(\lambda) = A(\lambda) - c\left(\lambda^{\frac{n}{2}} + d_2\lambda^{\frac{n}{2}-1} + \ldots\right) < K\lambda^{\frac{n-1}{4}}$$

Dann bilde man die Funktion

$$(9) \qquad \mathfrak{H}(\xi) = \mathfrak{G}(\xi) - \mathfrak{K}(\xi),$$

worauf aus (7), (8_*) nun für jedes ganze rationale $m > 0$ mit $r(m) > 0$ folgt:

---

[8]) Der entscheidende Grundgedanke führt hier übrigens auf E. Schmidt zurück (Math. Annalen 57, S. 195—204).

$$(9_*)\quad |\mathfrak{H}(\sigma+2\pi i m^{\frac{1}{4}})| = \left|\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A(\lambda)-c\left(\lambda^{\frac{n}{2}}+\ldots\right)-K\lambda^{\frac{n-1}{4}}\right\}\lambda^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}\xi}\right|$$

$$\leqq \left|\sum^{1\ldots L_0-1}\right| + \left|\sum^{L_0\ldots\infty}\right| \leqq O(1)-\mathfrak{H}(\sigma);$$

$$c'r(m)(4\pi m)^{\frac{-n+1}{2}} \leqq 2K\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

was aber sofort zu einem Widerspruch führt, sobald z. B.

$$(9^*)\qquad K < \frac{c'r(1)}{2(4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = 2n$$

gewählt wird. In genau der gleichen Weise entsteht der analoge Widerspruch, wenn für $\lambda \geqq L_0$ stets statt (8_*) umgekehrt

$$(8_{**})\qquad P(\lambda) = A(\lambda) - c\left(\lambda^{\frac{n}{2}} + d_2\lambda^{\frac{n}{2}-1}+\ldots\right) > -K\lambda^{\frac{n-1}{4}}$$

mit (9^*) angenommen wird. Für die Abschätzung des Gitterrestes der n-Kugel nach unten hat man daher, mit den heute üblich gewordenen Bezeichnungen:

$$(10)\qquad P(\lambda) = \Omega_R\left(\lambda^{\frac{n-1}{4}}\right), \qquad P(\lambda) = \Omega_L\left(\lambda^{\frac{n-1}{4}}\right).$$

Als eigentlicher Gitterrest wird für gewöhnlich

$$(10_*)\qquad R(\lambda) = A(\lambda) - c\lambda^{\frac{n}{2}} + 1$$

angesehen; wegen $d_2 > 0$ hat man daher aus (10) sofort

$$(\underline{10})\qquad R(\lambda) = \Omega_R\left(\lambda^{\frac{n}{2}-1}\right).$$

Wegen des in (6) angegebenen, aus (4^*) und $(\underline{5})$ folgenden, genauen Wertes von d_2 hat man ferner noch für $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$:

$$R\left(\lambda+\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right) = A\left(\lambda+\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right) - c\left(\lambda+\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right)^{\frac{n}{2}} + 1$$

$$= A(\lambda) - c\left(\lambda+\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right)^{\frac{n}{2}} + 1 = P(\lambda) - \frac{cn\varepsilon}{2}\lambda^{\frac{n}{2}-1} + \ldots,$$

d. h. auch:

$$(\overline{10})\qquad R\left(\lambda+\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right) = \Omega_L\left(\left(\lambda+\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right)^{\frac{n}{2}-1}\right).$$

Nach bereits bekannten Ergebnissen der Literatur gilt[9]) für setige x nach oben:

$$(\underline{10^*})\qquad R(x) = O\left(x^{\frac{n}{2}-1}\right), \qquad n > 4;$$

[9]) Vgl. Fußnoten [1]), [2]).

die hier gegebenen Abschätzungen nach unten — $(\underline{10})$, $(\overline{10})$ — zeigen u. a., daß $\frac{n}{2}-1$ auch bei diskontinuierlichem x die wahre Größenordnung des Restes für $n>4$ angibt (Landau), während für $n=4$ noch eine log-Spanne problematisch bleibt; für $n=3$ sind die oben gefundenen Resultate bei diskontinuierlichem x ($=\lambda$ bzw. $\lambda+\frac{1}{2}+\varepsilon$, λ rational ganz) anscheinend ebenfalls neu, während dann für stetige x bereits mehr bekannt ist: nämlich, bei der gleichen Größenordnung $(\frac{3}{4})$, die Angabe expliziter Schranken für die Erfüllung der zugehörigen Ungleichungen[10]); für $n=2$ endlich sind die betreffenden Betrachtungen von Hardy bereits erledigt.

§ 3.

Konstantenbestimmung.

Es ist vielleicht nicht ausgeschlossen, daß z. B. die (wichtigere) erste Ω-Abschätzung in (10) zugleich die *richtige* Größenordnung von $P(\lambda)$ angibt, was dann natürlich sehr viel mehr aussagen würde, als $(\underline{10})$ allein; dies möge es rechtfertigen, daß hier noch die an sich rein formale Präzisierung der Konstanten d_k in der Definition von $P(\lambda)$ im einzelnen durchgeführt wird.

Für die in § 2 benutzte Anwendung des Eulerschen Summensatzes hatte man zu setzen — vgl. (5^*) —:

$$f(l)=-e^{-\xi l^{\frac{1}{2}}};\quad f'(l)=\frac{\xi}{2}\,l^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\xi l^{\frac{1}{2}}};\quad \ldots.$$

Der elementare Schluß von k auf $k+1$ liefert dann allgemein:

$$\begin{aligned}(11)\qquad (-1)^{k+1}f^{(k)}(l)=l^{-k+\frac{1}{2}}e^{-\xi l^{\frac{1}{2}}}\Big\{&\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\Big(k-\frac{3}{2}\Big)\\ &+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\Big(k-\frac{3}{2}\Big)\frac{\xi}{2}\,l^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\Big(k-\frac{5}{2}\Big)\binom{k-2}{1}\frac{\xi^2}{4}\,l\\ &+\frac{5}{2}\cdots\Big(k-\frac{5}{2}\Big)\binom{k-3}{1}\frac{\xi^3}{8}\,l^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{2}\cdots\Big(k-\frac{7}{2}\Big)\binom{k-3}{2}\frac{\xi^4}{16}\,l^2\\ &+\frac{7}{2}\cdots\Big(k-\frac{7}{2}\Big)\binom{k-4}{2}\frac{\xi^5}{32}\,l^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{2}\cdots\Big(k-\frac{9}{2}\Big)\binom{k-4}{3}\frac{\xi^6}{64}\,l^3\\ &+\text{weiter nach dem gleichen Gesetze,}\end{aligned}$$

wobei die rechte Seite von selbst mit dem k-ten Gliede $\left(\frac{\xi l^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^k$ abbricht.

Die so erhaltenen Ausdrücke sind nun in (5) bis $(\overline{6})$ einzusetzen, worauf man als vollständige Entwicklung auf Grund von $(\overline{6})$ erhält:

---

[10]) Vgl. Fußnote [4]).

$$(11_*)\quad \mathfrak{A}(\sigma) = cn\Big\{\Gamma(n)\sigma^{-n} + \frac{\Gamma(n-1)}{4}\sigma^{-n+2}$$
$$+ \frac{B_2}{2!}\Big(\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n-3)}{2} + \frac{\Gamma(n-2)}{4}\Big)\sigma^{-n+4}$$
$$- \frac{B_4}{4!}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{\Gamma(n-7)}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{\Gamma(n-6)}{4}$$
$$+ \frac{3}{2}\binom{2}{1}\frac{\Gamma(n-5)}{8} + \frac{\Gamma(n-4)}{16}\Big)\sigma^{-n+8}$$
$$+ \frac{B_6}{6!}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{9}{2}\frac{\Gamma(n-11)}{2} + \frac{3}{2}\cdots\frac{9}{2}\frac{\Gamma(n-10)}{4}$$
$$+ \frac{3}{2}\cdots\frac{7}{2}\binom{4}{1}\frac{\Gamma(n-9)}{8} + \frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\binom{3}{1}\frac{\Gamma(n-8)}{16}$$
$$+ \frac{5}{2}\binom{3}{2}\frac{\Gamma(n-7)}{32} + \frac{\Gamma(n-6)}{64}\Big)\sigma^{-n+12}$$

$+ - +$ nach dem gleichen Gesetz, an beliebiger Stelle mit elementar beherrschbarem Restglied von niederer Ordnung des ∞-werdens für $\sigma \to +0$ abschließend,

$+$ fernere, hier in den Einzelheiten unwesentliche, für $\sigma \to +0$ regulär bleibende, weitere Entwicklung aus den m-Gliedern in (3) und den Integralformeln von (3).

Die Klammerfaktoren hinter den Bernoullischen Zahlen in (11_*) lassen sich aber in überaus einfacher Weise auswerten; diese in (11_*) auftretenden Ausdrücke kann man nämlich auch dadurch erhalten, daß man im Ausdruck (11) für $-f^{(2\nu)}(l)$, $2\nu < n$, durchweg $\xi = 1$ setzt, mit $\frac{1}{2}l^{\frac{n}{2}-1}$ multipliziert und von 0 bis ∞ integriert. Es ist demnach das jeweilige Klammeraggregat, nach wiederholter partieller Integration, gleich:

$$(11^*)\quad -\frac{1}{2}\int_0^\infty f^{(2\nu)}(l)\,l^{\frac{n}{2}-1}\,dl = \frac{1}{2}\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\int_0^\infty f^{(2\nu-1)}(l)\,l^{\frac{n}{2}-2}\,dl = \dots$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\dots\Big(\frac{n}{2}-2\nu\Big)\int_0^\infty e^{-l^{\frac{1}{2}}}\,l^{\frac{n}{2}-2\nu-1}\,dl$$
$$= \Big(\frac{n}{2}-1\Big)\dots\Big(\frac{n}{2}-2\nu\Big)\Gamma(n-4\nu).$$

Das Einsetzen in (11_*) liefert demnach:

$$(11)\quad \mathfrak{A}(\sigma) = cn\Big\{\Gamma(n)\sigma^{-n} + \frac{1}{2}\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\Gamma(n-2)\sigma^{-n+2}$$
$$+ \frac{B_2}{2!}\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\Big(\frac{n}{2}-2\Big)\Gamma(n-4)\sigma^{-n+4}$$
$$- \frac{B_4}{4!}\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\dots\Big(\frac{n}{2}-4\Big)\Gamma(n-8)\sigma^{-n+8}$$

$+ - - +$ nach dem gleichen Gesetze, solange etwa der Exponent von σ noch negativ ist,

$-$ Restausdruck von niedrigerer Ordnung des ∞-werdens bei $\sigma \to +0$, als das letzte exakte Glied.

Als Definition von $P(l)$ in (8_*), (8_{**}), (10) ist daher, wegen $\left(\frac{n}{2} - 2\nu\right)\Gamma(n-4\nu) = \frac{1}{2}\Gamma(n-4\nu+1)$, zu nehmen:

$$P(l) = A(l) - c\left\{l^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}l^{\frac{n}{2}-1} + B_2\binom{\frac{n}{2}}{2}l^{\frac{n}{2}-2} - B_4\binom{\frac{n}{2}}{4}l^{\frac{n}{2}-4}\right.$$

$+ - +$ nach dem gleichen Gesetze, solange etwa der Exponent von l noch positiv ist. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer stellt aber hier einfach die Euler-Bernoullische Entwicklung von $\frac{n}{2}\sum_{\lambda=1}^{l}\lambda^{\frac{n}{2}-1}$ ohne eventuelles Restglied (für $n = 2n'+1$) dar; da es bei $P(l)$ nur auf Größenordnungen $\geqq \frac{n-1}{4}$ ankommt, kann man daher jetzt aufs neue

$$P(l) = \sum_{\lambda=0}^{l} r(\lambda) - cn\sum_{\lambda=1}^{l}\lambda^{\frac{n}{2}-1} \tag{12}$$

definieren, und erhält also für *dieses*:

$$P(l) = \Omega_R\left(l^{\frac{n-1}{4}}\right), \quad P(l) = \Omega_L\left(l^{\frac{n-1}{4}}\right). \tag{12*}$$

§ 4.

Verallgemeinerte Grundformeln.

Der Fall mit beliebiger reeller positiv-definiter Form ζ^2

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = F\Big(\sum_{g,h=1}^{n} c_{gh}\xi_g\xi_h = \zeta^2\Big), \quad c_{gh} = c_{hg}, \tag{13}$$

in den allgemeinen Ausführungen des § 1 läßt sich durch eine lineare Substitution in den Variablen unschwer auf den bisher behandelten Grundfall der Einheitsform zurückführen. Man findet, wenn $c_{gh}^{(-1)}$ die Koeffizienten der zu ζ^2 *reziproken* quadratischen Form bedeuten, wieder:

$$\Psi(\eta_1, \ldots, \eta_n) = G\Big(\sum_{g,h=1}^{n} c_{gh}^{(-1)}\eta_g\eta_h = \omega^2\Big), \tag{13*}$$

und der Zusammenhang zwischen F und G ist hier, mit nur geringer Abweichung gegen (2^*), gegeben durch

$$(13^*) \qquad D^{\frac{1}{2}} \cdot G(\omega^2) = 2\pi\omega^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty F(\zeta^2)\,\zeta^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi\omega\zeta)\,d\zeta;$$

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} \cdots c_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n1} \cdots c_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

für den ausführlichen Beweis, ebenso wie denjenigen der hier folgenden weiteren Verallgemeinerungen, sei auf die in [3]) zitierte Abhandlung verwiesen.

Als erste sinnvolle Verallgemeinerung kann der Fall (reell-) verschobener Ellipsoide herangezogen werden:

$$(\underline{13}) \qquad \Phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = F\Big(\sum_{g,h=1}^{n} c_{gh}(\xi_g - a_g)(\xi_h - a_h) = \zeta^2\Big),$$

mit gegebenen reellen a_f; hier empfiehlt es sich, die Definition (1_*) für Ψ heranzuziehen; die Zurückführung auf die Einheitsform, analog wie bei (13), liefert dann

$$(\overline{13}) \qquad D^{\frac{1}{2}} \Psi(\eta_1, \ldots, \eta_n) = e^{2\pi i \sum_f a_f \eta_f} \cdot 2\pi\omega^{-\frac{n}{2}+1} \cdot \int_0^\infty F(\zeta^2)\,\zeta^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi\omega\zeta)\,d\zeta.$$

mit der gleichen Bedeutung von ω, wie in (13_*).

Eine zweite, durch die der ganzen Betrachtung zugrunde liegende Theorie der Fouriereihen gebotene, Verallgemeinerung von (13) besteht in der (Epstein-Landauschen) Einführung von Exponentialgewichten bei F:

$$(\underset{\sim}{13}) \qquad \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = e^{-2\pi i \sum_{f=1}^{n} b_f \xi_f} F\Big(\sum_{g,h=1}^{n} c_{gh}\xi_g\xi_h\Big);$$

man erhält dann, mit der Definition (1_*) für Ψ:

$$(\widetilde{13}) \qquad \Psi(\eta_1, \ldots, \eta_n) = G\Big(\sum_{g,h=1}^{n} c_{gh}^{(-1)}(\eta_g - b_g)(\eta_h - b_h) = \omega^2\Big);$$

der Zusammenhang zwischen F und G ist wiederum durch (13^*) gegeben.

Endlich wäre noch als letzte Verallgemeinerung, die (13) und $(\underset{\sim}{13})$ umfaßt und vereinigt,

$$(13_{**}) \qquad \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = e^{-2\pi i \sum_{f=1}^{n} b_f \xi_f} F\Big(\sum_{g,h=1}^{n} c_{gh}(\xi_g - a_g)(\xi_h - a_h)\Big)$$

anzunehmen; die gleiche Methode führt dann auf

$$(13^{**}) \qquad \Psi(\eta_1, \ldots, \eta_n) = e^{2\pi i \sum_{f=1}^{n} a_f(\eta_f - b_f)} \Big(\sum c_{gh}^{(-1)}(\eta_g - b_g)(\eta_h - b_h)\Big),$$

wieder mit dem Zusammenhang (13^*).

§ 5.

Ganze und rationale Ellipsoide.

Es seien nun die Koeffizienten c_{gh} der vorgeschriebenen positiv-definiten (zunächst homogenen) quadratischen Form als rational ganz vorausgesetzt, und es möge c_{gh}^* der zu c_{gh} gehörende Hauptminor sein, so daß man allgemein

$$c_{gh}^{(-1)} = D^{-1} c_{gh}^* \tag{14}$$

hat; es möge $r_*(l)$ die Anzahl der Darstellungen einer beliebigen ganzen rationalen Zahl $l \geqq 0$ durch die vorgeschriebene Form

$$r_*(l) = \sum_{\Sigma c_{gh} l_g l_h = l} 1 \tag{14$_*$}$$

mit ganzen rationalen l_f bedeuten, ebenso

$$r^*(l) = \sum_{\Sigma c_{gh}^* l_g l_h = l} 1 \tag{14*}$$

diejenige für die — ebenfalls ganzzahlige — adjungierte Form mit den Minoren c_{gh}^* als Koeffizienten. Wählt man daraufhin in (13) wieder:

$$F(\zeta^2) = e^{-\zeta}, \tag{14}$$

so erhält man in (13$_*$), (13*) — vgl. (3$_*$) —

$$D^{\frac{1}{2}} G(\omega^2) = (4\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (1 + 4\pi^2\omega^2)^{\frac{-n-1}{2}} \tag{14}$$

und somit, nach dem Cauchy-Poissonschen Summensatz, mit $\xi_1 = \ldots = \xi_n = \xi$ und (3):

$$1 + \sum_{l=1}^{\infty} r_*(l)\, e^{-l^{\frac{1}{2}}\xi} = c' D^{-\frac{1}{2}} \left\{ \xi^{-n} + \xi \sum_{m=1}^{\infty} r^*(m) (\xi^2 + 4\pi^2 D^{-1} m)^{\frac{-n-1}{2}} \right\}. \tag{15}$$

Daraufhin aber erfolgt die Beweisführung für den Gitterrest des ganzformigen n-Ellipsoids genau ebenso, wie vorhin (§§ 2—3) bei der n-dimensionalen Kugel. Nur erscheint in den Endformeln c ersetzt durch $cD^{-\frac{1}{2}}$; ferner ist hinsichtlich der analog zu (9*) zu wählenden Konstanten $K > 0$, auf deren möglichst günstigen Wert es hier nicht so sehr ankommt, eine passende Veränderung vorzunehmen: es genügt jedenfalls, irgendein $m > 0$ mit $r^*(m) > 0$ heranzuziehen, etwa $m = c_{11}^*$ mit $r^*(m) \geqq 2$ für $l_1 = \pm 1$, $l_2 = \ldots = l_n = 0$.

Etwas komplizierter gestalten sich die Verhältnisse, sobald man die Koeffizienten c_{gh} der Ausgangsform beliebig *rational* annimmt. Es sei dann $E > 1$ der kleinste gemeinsame Nenner aller c_{gh} und allgemein

$$(16) \qquad E c_{gh} = c_*^{gh}$$

gesetzt, so daß alle c_*^{gh} rational ganz sind; ferner seien nun mit c_{gh}^* die Minoren von c_*^{gh} bezeichnet; analog zu (14_*), (14^*) sei jetzt $r_*(l)$ die Anzahl der Darstellungen von l durch $\sum_{g,h=1}^{n} c_*^{gh} l_g l_h$, ebenso $r^*(m)$ diejenige von m durch $\sum_{g,h=1}^{n} c_{gh}^* m_g m_h$ bei ganzen rationalen l_g, l_h, m_g, m_h. Die Grundformel für die unveränderte Wahl $(\underline{14})$, $(\overline{14})$ lautet alsdann zunächst ganz analog, wie in den ganzzahligen Fällen. Wenn aber hier, in hinreichender Allgemeinheit für das rationale Problem, gesetzt wird:

$$\mathfrak{A}(\xi) = \frac{\xi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} A(l) l^{-\frac{1}{2}} e^{-l^{\frac{1}{2}}\xi};$$

$$A(l) = \sum_{0 < \sum_{g,h=1}^{n} c_{gh} l_g l_h \leqq l} 1 \leqq \sum_{0 < \sum_{g,h=1}^{n} c_*^{gh} l_g l_h \leqq lE} 1;$$

$$r(l) = A(l) - A(l-1) = r_*(lE - E + 1) + r_*(lE - E + 2) + \ldots + r_*(lE),$$

wobei eine Verwechslung mit der engeren früheren Bedeutung von $r(l)$ (§§ 2—3) wohl nicht zu befürchten ist, so hat man:

$$\mathfrak{A}(\xi) = \frac{\xi}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} r(\lambda) \sum_{l=\lambda}^{\infty} l^{-\frac{1}{2}} e^{-l^{\frac{1}{2}}\xi} = \frac{\xi}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} r(\lambda) \left\{ e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{\xi}{4} \lambda^{-\frac{1}{2}} e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$+$ weitere Eulersche Entwicklung, wie in $(\underline{5})$, so daß die hier zu prüfenden Funktionen

$$\mathfrak{a}_0(\xi) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} r(\lambda) e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{k'=1}^{E-1} r_*(\lambda E - k') e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}}$$

bzw. die Integralfunktionen $\mathfrak{a}_k(\xi)$ von $\mathfrak{a}_0(\xi)$ sind. Man betrachte zuerst

$$\mathfrak{a}_0(\xi; 0) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} r_*(\lambda E) e^{-\xi\lambda^{\frac{1}{2}}};$$

offenbar wird man beim Cauchy-Poissonschen Summensatz auf diese Funktion geführt, wenn z. B.

$$(17) \qquad \zeta^2 = \sum_{g,h=1}^{n} c_*^{gh} \xi_g \xi_h; \qquad F(\zeta^2) = E^{-1} e^{-E^{-\frac{1}{2}}\xi} \sum_{\nu=0}^{E-1} e^{-2\pi i \nu E^{-1} \zeta^2};$$

$$\xi_1 = \ldots = \xi_n = 1$$

gewählt wird. Das Glied für $\nu = 0$ liefert in $(\overline{14})$ zu G in der bisherigen Weise den Beitrag G_0 mit

$$G_0 = c' D^{\frac{n}{2}} \xi \left(D\xi^2 + 4\pi^2 E^{-n+1} \sum' c^*_{gh}\, \eta_g \eta_h \right)^{\frac{-n-1}{2}}$$

was ein beliebiges sonstiges ν (>0) anbelangt, so braucht man nur wieder für die gleiche Form wie in (17) die Berechnung des entsprechenden Beitrags zu G nach $(\overline{14})$ vorzunehmen, wobei dann noch in bekannter Weise zunächst für reelle $\varrho = E^{-\frac{1}{2}} \xi$

$$e^{-\varrho\xi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\theta^2 - \frac{\varrho^2 \xi^2}{\theta^2}} d\theta$$

einzusetzen wäre. Die explizite Berechnung von G_ν ist dabei durchaus nicht notwendig; es genügt, was keine weiteren Schwierigkeiten verursacht, nach einmaliger Integration festzustellen, daß G_ν für $\xi = \sigma \to +0$ *endlich* bleibt, ebenso auf Grund analytischer Fortsetzung auch für $\xi = \sigma + 2\pi i m^{\frac{1}{2}}$, $\sigma \to +0$; für die Betrachtungen, die daraufhin — bei leicht gesicherter Konvergenz — analog zu §§ 2—3 vorzunehmen wären, ist der G_ν-Beitrag alsdann überhaupt belanglos.

Wird aber

$$a_0(\xi; k') = \sum_{\lambda=1}^{\infty}{}' r_*(\lambda E - k')^{-\xi \lambda^{\frac{1}{2}}}$$

für $k' > 0$ betrachtet, so hat man nur ganz entsprechend

$$(17_*) \qquad F(\zeta^2) = E^{-1} e^{-E^{-\frac{1}{2}} \xi (\zeta^2 + k')^{\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{\nu=0}^{E-1}{}' e^{-2\pi i \nu E^{-1} (\zeta^2 - k')}$$

und wieder

$$e^{-\varrho(\zeta^2+k')^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\theta^2 - \frac{\varrho^2(\zeta^2+k')}{\theta^2}} d\theta$$

zu setzen; man erhält so (mutatis mutandis) die gleichen Verhältnisse wie vorhin für $k' = 0$, und die analogen Betrachtungen wie in §§ 2—3 liefern die gleichen Endergebnisse auch für den *rationalen* homogenen Fall.

Nur wenige, nunmehr einleuchtende, formale Erweiterungen sind auf Grund von $(\underline{13})$—$(\overline{13})$ vorzunehmen, wenn der Mittelpunkt der betrachteten Ellipsoide um rationale a_f verschoben wird; die Ausführung der Einzelheiten, die zum allgemeinen Satz der Einleitung führen, darf jetzt wohl ohne weiteres unterbleiben.

Nikolassee b. Berlin, d. 3. Juni 1925.

(Eingegangen am 1. August 1925.)

Betrachtungen zur Begründung der Mathematik.

Zweite Abhandlung[1]).

Von

M. Pasch in Gießen.

I.

1. Das Bedürfnis nach einer sicheren Begründung der Mathematik ruft immer weitere Erörterungen hervor. Von entscheidender Wichtigkeit für solche Erörterungen ist, daß auch die versteckte sten Beweisgründe aufgedeckt und ausgesprochen werden. So selbstverständlich dies erscheint, so gehen doch gerade in der Erfüllung dieser Forderung die Wege der Forscher bedenklich auseinander. Insbesondere kommen die Begriffe und Sätze, die ich nach verschiedenen Vorarbeiten in der angezogenen Abhandlung von 1924 als einen „Kern" der Arithmetik hinstellen durfte, in anderen Bearbeitungen gar nicht oder nur unvollkommen zu ihrem Recht, obwohl von dem, was diese Kernbegriffe und Kernsätze ausdrücken, nichts entbehrt werden kann. Daß die Bearbeitungen grundlegender Teile der Mathematik überwiegend nicht soweit zurückgreifen, wie es der Gegenstand gestattet und verlangt, ist eine Erscheinung, die man wohl für jedes Zeitalter feststellen könnte. Wenn nun mein zunächst dem Gebiete der Geometrie zugewendetes Bestreben, den Anfängen soweit als irgend möglich nachzuspüren, sich eines gewissen Erfolges erfreuen durfte, so haben meine Versuche, *die dabei gewonnenen Einsichten für Arithmetik und Analysis nutzbar zu machen*, soviel ich sehen kann, keine nennenswerte Wirkung gehabt. Der Aufbau der Arithmetik, den ich in der Abhandlung von 1916 „Über den Ursprung des Zahlbegriffs" [Teil I: Archiv der Mathematik und Physik **28** (1919); Teil II: Mathematische Zeitschrift **11** (1921)] dargestellt und den „Betrachtungen" von 1924 zugrunde gelegt habe, verlangt freilich einen lang und beschwerlich scheinenden Aufstieg, schon um

[1]) Siehe Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 231–240.

von den einfachsten Vorstellungen bis zu den natürlichen Zahlen zu gelangen. Aber dieser Aufbau enthält nichts, wovon die Arithmetik nicht tatsächlich Gebrauch macht und machen muß, und er trägt die Bürgschaft für seine innere Widerspruchsfreiheit in sich selbst.

2. Die Darstellung von 1916 setzt die Schriften von 1909 (Grundlagen der Analysis) und 1914 (Veränderliche und Funktion) voraus, stellt sich jedoch ganz auf den Boden der vorher von mir zwar zur Sprache gebrachten, aber nicht durchgeführten Entscheidbarkeitsforderung. Danach wird bei der Einführung eines Begriffs durch Definition eine allgemeine Anweisung gefordert, die es in jedem einzelnen Fall ermöglicht, eine „Kette" von Urteilen herzustellen, unter denen eines die Entscheidung darüber liefert, ob die Definition in dem betreffenden Fall zutrifft oder nicht[2]).

3. Die Begriffe, die ich im Gegensatz zum Vorgehen anderer Mathematiker aus dem Stoff der Analysis heraushob, um ihn auf einen Kern zurückzuführen, konnte ich als die kombinatorischen Begriffe bezeichnen. Diese Begriffe haben für die Begründung der Analysis die gleiche Wichtigkeit, wie in der Geometrie die Begriffe, die sich um die Zwischenlage drehen (topologische Begriffe); Begriffe, die sich mit Notwendigkeit darboten, als ich (1873—1882) die axiomatische Bearbeitung der Geometrie unternahm. Daß diese geometrischen Begriffe und die darauf bezüglichen Sätze[3]) nicht entbehrt werden können, wird m. W. allgemein zugestanden. Aber ebensowenig können in der Analysis die kombinatorischen Begriffe entbehrt werden[4]). Wenn ich also für die Analysis auf dem in der Abhandlung von 1916 vertretenen Standpunkt verharre, so darf doch die Ausführung im einzelnen nicht als eine irgendwie abgeschlossene gelten

---

[2]) Den Inhalt der Mathematik, der auf dem Boden der Entscheidbarkeitsforderung steht, nannte ich *perfekte Mathematik*, den anderen Inhalt *imperfekte*: Jahresber. d. deutschen Math.-Vereinigung 27 (1918), S. 230. Vorher hatte ich „eigentliches" und „uneigentliches Rechnen" unterschieden: Veränderliche und Funktion, § 76. Die imperfekte Mathematik muß sich auf die perfekte stützen, die perfekte von der imperfekten unabhängig bleiben.

[3]) Siehe Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882. Ich gehe dort nicht von Punkten, Geraden und Ebenen aus, sondern von Punkten, geraden Strecken und (begrenzten) ebenen Flächen. Erst von da aus kann zur unbegrenzten Geraden und unbegrenzten Ebene aufgestiegen werden. Dabei blieben die krummen Gebilde ganz ausgeschlossen. Eine Axiomatik der geometrischen Gebilde ohne Einschränkung habe ich angebahnt in der Schrift: Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie, Leipzig, Felix Meiner, 1922.

[4]) Diese Begriffe müssen im Lehrgebäude der Mathematik allen anderen vorangestellt werden. Sie gehören mithin in die perfekte Mathematik und sind dort unentbehrlich. Über den Sachverhalt täuscht man sich hinweg, wenn man die natürlichen Zahlen (mit manchen sogar auch die Zahlenschreibung) als etwas fertig Gegebenes zugrunde legt.

wollen[5]). Vielmehr halte ich es für notwendig, die Darstellung in entscheidenden Punkten noch nachzuprüfen und zu verschärfen. In diesem Sinn will ich mich hier mit dem Begriff des *Gemeinnamens* beschäftigen.

II.

4. Die Gegenüberstellung von Ding und Name bildete schon in den „Grundlagen der Analysis" den Ausgangspunkt. Dabei unterschied ich Eigennamen, die nur eine Bedeutung haben, nur einem Besitzer gehören, und Gemeinnamen, die nicht nur eine Bedeutung haben, nicht nur einem Träger gehören. Sind die Träger eines Gemeinnamens einzeln angegeben, so nenne ich ihn einen Sammelnamen. Diesem Fall ist es gleichzusetzen, wenn der Gemeinname durch eine mathematische Definition eingeführt und die Möglichkeit, seine Träger einzeln anzugeben, bewiesen ist. Mathematische Betrachtungen können auch an Gemeinnamen anknüpfen, die nicht mathematisch, sondern nur empirisch eingeführt sind. Wenn dann die Träger des Gemeinnamens nicht einzeln angegeben vorliegen, solche abgeschlossene Angaben dennoch als möglich gelten sollen, so muß man auf eine mathematische Begründung dieser Möglichkeit verzichten.

Ist ein Eigenname oder ein Sammelname nur empirisch eingeführt, so ist es in dem auf die Entscheidbarkeitsforderung gegründeten Lehrgebäude für jedes vorgelegte Ding von vornherein als entscheidbar zu betrachten, ob ihm der Name zukommt oder nicht.

5. Die Dinge, an die wir bei unserer Betrachtungsweise unmittelbar anknüpfen, sind Erfahrungsgegenstände. Die Möglichkeit, jederzeit „Angaben" angegebener Dinge zu wiederholen und überdies weitere Dinge anzugeben, wird durch unsere Kernsätze gewährleistet. Auf Grund der Kernsätze werden zusammengesetzte Begriffe, die angebbare Dinge bedeuten, definiert, d. h. es wird für Ausdrücke, die eine Bedeutung haben, eine besondere Bezeichnung eingeführt (explizite Definition). Zu Dingen, die nicht vorher schon angebbar waren, gelangen wir dadurch nicht. Anders bei der impliziten Definition. Betrachten wir etwa in der „Abhandlung von 1916" die Stelle, wo die implizite Definition zuerst auftritt (§ 16). Dort ist (Nr. 71) den in einer „Rotte $\mathfrak{A}$ enthaltenen" Dingen der Sammelname A erteilt; dabei kann natürlich die Rotte $\mathfrak{A}$ durch jede — mit ihr konforme oder nicht konforme — Rotte U ersetzt werden, die aus den Dingen A besteht. Die Aussage, daß ein Ding a unter den Sammelnamen A fällt, ist also gleichbedeutend mit der Aussage, daß das Ding a in einer

[5]) Vielleicht werden sich Zusammenhänge finden lassen, durch die die umfangreichen Entwicklungen in den ersten Paragraphen der „Grundlagen der Analysis" zusammengezogen werden könnten.

(und mithin in jeder) Rotte U enthalten ist. Hier ist die Wahl der Rotte U willkürlich gelassen. Über diese Willkür ist die Sprache dadurch hinweggekommen, daß sie Redeweisen schuf, wie: Das Ding a ist in der Sammlung (der Menge, dem Haufen u. dgl.) M enthalten. Dabei gründet sich der Gebrauch des Begriffs einer Sammlung nicht von vornherein auf eine mathematische Definition; vielmehr entstand erst hinterher die Frage, welche Stellung im Lehrgebäude dieser Begriff einnimmt. Eine Antwort ergibt sich, indem man die Sätze aufsucht, mittels deren der Begriff zur Verwendung gelangt. So kommt man zu der impliziten Definition (a. a. O. Nr. 71): Mit der Aussage „Das Ding a ist in einer Rotte U enthalten", soll gleichbedeutend sein die Aussage „Das Ding a ist in dem Ding M enthalten". Weiter wird das so eingeführte Ding M eine Sammlung genannt, und zwar „die" Sammlung der Dinge A. Diese Definition hat also die Wirkung, daß der Name M so behandelt wird, als wäre er Eigenname eines Dinges. Die in dem Ding (der Sammlung) M enthaltenen Dinge nannte ich die Glieder der Rotte $\mathfrak{A}$ und mithin der Rotten U; ich kann sie jetzt die Glieder (Elemente, Stücke) der Sammlung M nennen.

Das so aufgetretene Ding M ist weder ein empirisch vorliegendes, noch ein durch explizite Definition gegebenes Ding. Wir haben es hier mit einer erweiterten Anwendung des Wortes „Ding" zu tun. Diese ist fernerhin nur zulässig, wo die Berechtigung ausdrücklich begründet wird. Sätze und Definitionen, die dieser Begriffserweiterung vorangehen, können fernerhin nur in dem Sinn, den sie ursprünglich besaßen, herangezogen werden. Dies kommt insbesondere für die Definition des Sammelnamens A in Betracht.

Wegen des Näheren, insbesondere wegen der Aufrechterhaltung der Kernbegriffe und Kernsätze, muß ich mich hier auf das beziehen, was ich a. a. O. in den §§ 17 und 18 ausgeführt habe.

III.

6. Die Einführung der Sammlung M in Nr. 5 hatte zur Voraussetzung, daß die Dinge A einzeln angegeben waren, daß also eine Rotte $\mathfrak{A}$ dieser Dinge vorlag, oder daß doch die Möglichkeit einer solchen Rotte feststand. Damit ist schon gesagt, daß die Sammlung der Dinge A erst nach diesen Dingen auftreten, nicht eines dieser Dinge sein kann. Aus dem Bestehen der Rotte $\mathfrak{A}$ folgt allgemein die Möglichkeit der in Nr. 5 mit dem Gemeinnamen U bezeichneten Rotten aus den A. Der Gemeinnname U verhält sich aber wesentlich anders, als der Gemeinname A: Sind nämlich Dinge U angegeben, so können stets noch weitere Dinge U angegeben werden.

Allgemein: Hat ein Gemeinname V die Eigenschaft, daß allemal, wenn Dinge V angegeben sind, noch Dinge V angegeben werden können, so will ich diesen Namen hier einen *unbeschränkten* Gemeinnamen nennen. Die

Unmöglichkeit, die Angaben von Dingen V zu einem Abschluß zu bringen, muß, wenn der Name V durch eine mathematische Definition eingeführt war, durch einen Beweis begründet, anderenfalls als Hypothese hingestellt werden (vgl. Nr. 4). Mit dem Fall eines Gemeinnamens, der weder als Sammelname, noch als unbeschränkter Gemeinname bezeichnet werden kann, werde ich mich hier nicht beschäftigen.

Jedenfalls muß, wie in Nr. 4 bei Eigennamen und Sammelnamen, auch bei anderen Gemeinnamen für jedes vorgelegte Ding entscheidbar sein, ob ihm der Gemeinname zukommt oder nicht.

7. Im folgenden sei V ein unbeschränkter Gemeinname. Dann können wir nicht auf dem in Nr. 4 für den Sammelnamen eingeschlagenen Wege zu einer Ausdrucksweise gelangen, durch die alle Träger des Namens V Stücke eines Dinges werden. Doch ist es ein Schritt in dieser Richtung, wenn man so schreibt, als ließen sich auch die Dinge V abschließend angeben, etwa:

$$a, b, c \text{ usw., oder: } a, b, c, \ldots,$$

wo das „und so weiter" oder die Punkte die Unmöglichkeit einer vollkommenen Darstellung andeuten sollen; einer Darstellung, in die die Dinge V so eingehen müßten, als wären sie die Stücke einer Sammlung. Das Endergebnis dieses Herganges kann wieder nur in einer impliziten Definition festgelegt werden, etwa folgendermaßen: Mit der Aussage: „Das Ding a fällt unter den Gemeinnamen V", soll gleichbedeutend sein die Aussage: „Das Ding a ist in dem Ding N enthalten." Das so eingeführte Ding N wird eine *Menge* genannt, und zwar „die" Menge der Dinge V. Diese Dinge nenne ich die Stücke der Menge, auch: die in der Menge enthaltenen Dinge.

Der Sprachgebrauch wendet das Wort „Menge" auf Gemeinnamen jeder Art an, nicht bloß auf die unbeschränkten. Danach müßte ich hier nicht einfach „Menge" sagen, sondern etwa: unbeschränkte Menge. Der Kürze halber habe ich hiervon abgesehen.

8. Indem wir den Namen N einführen und ihn so behandeln, als wäre er Eigenname eines Dinges, erweitern wir abermals den Sinn des Wortes „Ding". Sätze und Definitionen, die dieser Begriffserweiterung vorangehen, können weiterhin (zunächst) nur in ihrem ursprünglichen Sinn herangezogen werden, so besonders die Definition des Gemeinnamens V (vgl. oben Nr. 5, Abs. 2). Ein Ding im Sinn dieser Definition ist N nicht; N ist nicht eines der Dinge V, nicht selbst in N enthalten.

Als wir uns oben mit dem Sammelnamen beschäftigten, gingen wir nur auf den Fall eines einzelnen Sammelnamens näher ein. Die Ausdehnung auf verschiedene Sammelnamen wird dadurch begünstigt, daß die Frage, ob ein Sammelname mit einem anderen gleichbedeutend ist oder

nicht, entscheidbar ist; siehe die Abhandlung von 1916, Nr. 62. Dagegen fehlt es an einer allgemeinen Anweisung für die Vergleichung im Fall *beliebiger* Gemeinnamen. Vielmehr ist, wenn noch eine Menge eingeführt werden soll, etwa die Menge N' der Dinge V', und mithin die Frage aufgeworfen werden muß, ob die Menge N von N' verschieden ist oder nicht, ob also die Gemeinnamen V und V' gleichbedeutend sind oder nicht, zur Beantwortung dieser Frage ein besonderes Verfahren erforderlich. Auf der mit der Einführung des Namens N erreichten Stufe der Begriffsbildung ist also die Frage, ob ein vorgelegter Name — Gemeinname oder Eigenname — mit einem anderen gleichbedeutend ist, nicht mehr allgemein entscheidbar.

Wenn also in dem auf die Forderung der Entscheidbarkeit gegründeten Lehrgebäude Mengen eingeführt werden, so müssen dafür, daß verschiedene Mengen vorliegen, besondere Beweise gesucht werden.

9. Ist eine Menge angegeben, oder sind Mengen angegeben, so können noch Mengen angegeben werden.

Die Einführung des Mengenbegriffs hat zur Folge, daß der Sinn des Wortes „Ding" sich stufenweise erweitert. Ebenso ändert sich der Sinn des Ausdrucks „Alle Mengen" von Stufe zu Stufe; der Name Menge ist ein unbeschränkter Gemeinname, dessen Umfang sich jedoch nur auf eine bestimmte Stufe beziehen kann. Der Ausdruck „Menge aller Mengen" hätte also auf jeder Stufe einen anderen Sinn.

Von einem Gemeinnamen verlangt man zuerst, daß Dinge angegeben werden können, die unter ihn fallen, dann aber auch, daß Dinge angegeben werden können, die nicht unter ihn fallen. Das Wort „Ding" ist zwar kein Eigenname, aber ebensowenig ist es zu den Gemeinnamen zu rechnen. Damit schon entfällt die „Menge aller Dinge".

Schlußwort.

Die hier entwickelte Auffassung habe ich, wenn auch weniger scharf und weniger ausführlich, in den „Grundlagen der Analysis" befolgt; siehe dort besonders § 33. Wegen der Gesichtspunkte, die bei dem späteren Ausbau der in diesem Buche vertretenen Auffassung der Analysis maßgebend waren, verweise ich auf die mehrfach erwähnte Abhandlung von 1916 und die im Eingang erwähnte Abhandlung von 1924. Durch die gegenwärtigen Betrachtungen habe ich die Anschauungsweise, aus der meine früheren Schriften hervorgegangen sind, möglichst scharf herausarbeiten wollen, um zu der schwebenden Erörterung über die Grundfragen der Mathematik einen weiteren Beitrag zu liefern.

(Eingegangen am 9. August 1925.)

Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome.

Von

G. Szegö in Berlin.

Herr Fejér hat in zwei Arbeiten[1]) äußerst wichtige und interessante Schlüsse gezogen aus der folgenden bemerkenswerten Eigenschaft der Binomialreihe:

I. *Es sei* $0 < \varrho \leqq 1$ *und*

$$\frac{1}{(1-z)^{\varrho}} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots .$$

Dann ist

$$\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n | < \frac{H}{|1-z|^{\varrho}}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\ |z| \leqq 1,\ z \neq 1),$$

wobei H eine nur von ϱ *abhängige Konstante bedeutet.*

Im folgenden möchte ich für diesen Satz einen neuen, einfachen Beweis geben, der nur von der Tatsache Gebrauch macht, daß die Entwicklungskoeffizienten von $f(z) = \frac{1}{(1-z)^{\varrho}}$ sämtlich positiv, dagegen die von $\frac{1}{f(z)}$ mit Ausnahme des Absolutgliedes sämtlich negativ ($\leqq 0$) sind. Verbindet man diese Beweismethode mit einer interessanten Bemerkung des Herrn Th. Kaluza (vgl. § 1), so erhält man den folgenden allgemeineren Satz, dessen Beweis in § 1 gegeben wird:

II. *Es sei*

$$f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots$$

[1]) A. Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel, Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 267–284; B. Abschätzungen für die Legendreschen und verwandten Polynome, ebenda **24** (1925), S. 285–298. Die letzte Arbeit soll fortan mit „B“ zitiert werden.

regulär für $|z|<1$. *Außerdem sei*

$$\gamma_n > 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

ferner

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} \leqq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \leqq \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \leqq \ldots \leqq \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leqq \ldots ;$$ [2])

schließlich sei die Reihe

$$\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n+\ldots$$

divergent. Dann ist

$$|\gamma_0+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots+\gamma_n z^n| \leqq 2|f(z)|$$
$$(n=0,1,2,\ldots;\ |z|<1).$$

Man kann hier den Faktor 2 auch durch $1+|z|^{n+1}$ ersetzen.

In § 2 stelle ich einige Bemerkungen zu diesem Satze und Anwendungen desselben zusammen.

Der eingangs erwähnte Satz über die Binomialreihe läßt sich aber auch in einer anderen Richtung verallgemeinern, indem man sich von der Beschränkung $\varrho \leqq 1$ befreit. Ich beweise in § 3 den folgenden Satz:

III. *Es sei* $\varrho > 1$ *und*

$$\frac{1}{(1-z)^\varrho} = \gamma_0+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots+\gamma_n z^n+\ldots .$$

Dann ist

$$|\gamma_0+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots+\gamma_n z^n| < \frac{H n^{\varrho-1}}{|1-z|^\varrho}$$
$$(n=0,1,2,\ldots;\ |z|\leqq 1;\ z\neq 1),$$

wobei H eine, nur von ϱ *abhängige Konstante bedeutet.*

Ich bemerke, daß die Größenordnung des Zählers in der letzten Abschätzung die „wahre" ist. Es wird nämlich gezeigt, daß

$$\operatorname*{Max}_{|z|\leqq 1} |(1-z)^\varrho(\gamma_0+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots+\gamma_n z^n)| > H' n^{\varrho-1}$$

ist, wo die positive Konstante H' nur von ϱ abhängt.

Für $1<\varrho<2$ kann z. B. $H=2\binom{n+\varrho}{n+1}$ und $H'=\binom{n+\varrho}{n+1}$ gesetzt werden. Es gilt also z. B.

$$\frac{1.3.5\ldots(2n+3)}{2.4\ldots(2n+2)} < \operatorname*{Max}_{|z|\leqq 1} |(1-z)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1.3.5\ldots(2k+1)}{2.4\ldots 2k} z^k| < 2\frac{1.3.5\ldots(2n+3)}{2.4\ldots(2n+2)}.$$

Es ist mir nicht gelungen, eine Verallgemeinerung von III zu finden, die sich zu III so verhält, wie II zu I.

[2]) Hieraus folgt $\gamma_{n+1} \leqq \gamma_n$; vgl. den Schluß am Ende von § 1, 3.

Die Konstante H in I kann als eine obere Schranke für $M_n = \underset{|z| \leqq 1}{\text{Max}} |(1-z)^{\varrho}(\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n)|$ aufgefaßt werden, wenn $n = 0, 1, 2, \ldots$. Die Bestimmung der unteren Grenze dieser H (d. h. die Bestimmung der oberen Grenze der M_n) scheint keine leichte Aufgabe zu sein. In § 4 wird in Verbindung mit einer allgemeineren Aufgabe $\lim_{n \to \infty} M_n$ bestimmt. Für $\varrho = \frac{1}{2}$ lautet z. B. das Resultat folgendermaßen:

IV. *Es sei*

$$M_n = \underset{|z| \leqq 1}{\text{Max}} \left| \sqrt{1-z} \left(1 + \frac{1}{2} z + \frac{1.3}{2.4} z^2 + \ldots + \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} z^n\right)\right|.$$

Der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} M_n = M$$

ist vorhanden und läßt sich folgendermaßen charakterisieren. Man betrachte die Cornusche Spirale, beschrieben durch

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{i\pi}{4}} \left(\int_0^x \cos(\alpha^2)\, d\alpha - i \int_0^x \sin(\alpha^2)\, d\alpha \right)$$

für $0 \leqq x < +\infty$. (*Sie geht vom Nullpunkt aus und „endet" in* 1.) *Dann ist M gleich der Maximaldistanz dieser Kurve vom Nullpunkt.*[3])

Es ist

$$M = 1.342 \ldots$$

Aus B, § 1, 6 geht bloß $1 \leqq M \leqq \sqrt{2}$ hervor.

Ich bemerke zu diesem Satze folgendes. Setzt man

$$\sqrt{1-z} \sum_{k=0}^{n} \frac{1.3 \ldots (2k-1)}{2.4 \ldots 2k} z^k = \varphi_n(z),$$

---

[3]) Es ist also

$$M = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underset{\xi > 0}{\text{Max}} \left\{ \left(\int_0^{\xi} \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau}}\, d\tau \right)^2 + \left(\int_0^{\xi} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}}\, d\tau \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Eine andere Form von M lautet, wie man leicht bestätigt, folgendermaßen:

$$M = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \underset{\xi > 0}{\text{Max}} \int_0^{\sqrt{\xi}} \sin(\xi - \alpha^2)\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underset{\xi > 0}{\text{Max}} \int_0^{\xi} \frac{\sin(\xi - \tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underset{\xi > 0}{\text{Max}} \left| \int_0^{\xi} \frac{\sin(\xi - \tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\tau \right|.$$

Alle diese Maxima werden, wie eine nähere Diskussion zeigt, für $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$ erreicht.

(Vgl. E. Landau, Über eine Integralungleichung, Christiaan Huygens 1 (1921—22), S. 235—237.)

so ist offenbar $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = 1$ gleichmäßig in jedem Bereiche, der aus dem Einheitskreis durch Entfernen einer beliebig kleinen Umgebung von $z = 1$ entsteht. Andererseits ist $\varphi_n(1) = 0$. Die Folge $\varphi_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ konvergiert also ungleichmäßig in der Umgegung von $z = 1$. Die Tatsache, daß $\operatorname{Max} |\varphi_n(z)| (|z| \leqq 1)$ gegen eine Zahl > 1 konvergiert, erinnert an das sog. Gibbssche Phänomen in der Theorie der Fourierschen Reihen. In § 4 wird übrigens der Wertevorrat der Funktion $\varphi_n(z)$ $(|z| \leqq 1)$ für große Werte von n eingehend untersucht.

Der Gegenstand des § 5 liegt in einer etwas anderen Richtung. Es handelt sich hier um die Ausdehnung der klassischen Laplaceschen asymptotischen Formel für die Legendreschen Polynome auf allgemeinere Polynomklassen, welche Herr Fejér in B, § 2 eingeführt hat. Es wird nämlich das folgende Theorem bewiesen:

V. *Die Koeffizienten der Potenzreihe*

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

seien den folgenden Bedingungen unterworfen:

1. *Sie sind positiv und konvergieren monoton abnehmend gegen Null, d. h.*

$$\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq \ldots > 0; \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0;^{4})$$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1;$

3. $\frac{\alpha_n}{\alpha_{2n}} < C$, *wo* C *von* n *unabhängig ist.*

Dann gilt für die durch die Gleichung

$$f(re^{i\theta}) f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n$$

definierten Polynome $P_n(\cos\theta)$ *die folgende asymptotische Formel:*

$$P_n(\cos\theta) = 2\alpha_n \Re\, e^{-in\theta} f(e^{2i\theta}) + o(\alpha_n),$$

und zwar gleichmäßig in einem beliebigen Intervall $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$, *wo* $0 < \varepsilon < \pi$. *Mit anderen Worten, das Restglied* $o(\alpha_n)$ *konvergiert nach Division durch* α_n *im genannten Intervalle gleichmäßig gegen Null.*

Für $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} z^n$ erhält man hieraus die Laplacesche Formel für die Legendreschen Polynome:

$$P_n(\cos\theta) = 2\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\Re\,\frac{e^{-in\theta}}{\sqrt{1-e^{2i\theta}}} + o\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

---

[4]) Hieraus folgt, daß $f(z)$ für $|z| = 1$, $z \neq 1$ konvergiert, und zwar gleichmäßig auf jedem Bogen, der den Punkt $z = 1$ nicht enthält.

§ 1.

Beweis von II.

1. Ich beweise zunächst den folgenden Satz:

Es sei

$$f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots$$

regulär und von 0 verschieden für $|z| < 1$ *und man setze*

$$\frac{1}{f(z)} = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_n z^n + \ldots .$$

Außerdem sei

$$\gamma_0 > 0,\ \gamma_1 \geqq 0,\ \gamma_2 \geqq 0,\ \ldots,\ \gamma_n \geqq 0,\ \ldots;\ \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \text{ divergent,}$$

und

$$\beta_1 \leqq 0,\ \beta_2 \leqq 0,\ \ldots,\ \beta_n \leqq 0,\ \ldots .$$

Dann ist

$$|\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n| < 2\,|f(z)|$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\ |z| \leqq 1).$$

Es ist klar, daß das Cauchysche Produkt aus der n-ten Partialsumme von $f(z)$ und aus $\frac{1}{f(z)}$ die folgende Gestalt hat:

$$(1) \qquad \frac{1}{f(z)}(\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n) = 1 + q_{n+1} z^{n+1} + q_{n+2} z^{n+2} + \ldots .$$

Es gilt hierbei

$$q_{n+k} = \gamma_0 \beta_{n+k} + \gamma_1 \beta_{n+k-1} + \ldots + \gamma_n \beta_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

so daß die Koeffizienten $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots$ sämtlich $\leqq 0$ sind. Die linke Seite von (1) strebt ferner für $z \to 1 - 0$ gegen 0, da doch $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ eigentlich divergiert. Die Reihe auf der rechten Seite von (1) konvergiert also für $z = 1$ und es ist

$$1 + q_{n+1} + q_{n+2} + \ldots = \lim_{z \to 1-0} \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n}{f(z)} = 0.$$

Wir schließen somit für $|z| < 1$

$$\left|\frac{1}{f(z)}(\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n)\right| \leqq 1 + |z|^{n+1}(|q_{n+1}| + |q_{n+2}| + \ldots)$$
$$= 1 - |z|^{n+1}(q_{n+1} + q_{n+2} + \ldots) = 1 + |z|^{n+1} < 2, \text{ w. z. b. w.}^{5}).$$

---

[5]) Vgl. die Schlußweise bei G. Pólya, Neuer Beweis für die Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen endlicher Ordnung, Sitzungsberichte der bayerischen Akademie der Wiss. 1921, S. 32–33. Die dort behandelte Funktion

$$E_p(z) = (1 - z)\, e^{\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}}$$

kann als Beispiel für den im Text stehenden Satz verwendet werden, indem man $f(z) = \frac{1}{E_p(z)}$ setzt.

2. Ich verdanke einer brieflichen Mitteilung des Herrn Th. Kaluza die folgende Bemerkung:

Wenn die Koeffizienten der Potenzreihe

$$f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots$$

sämtlich positiv sind, wenn ferner $\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}$ *mit wachsendem n nicht abnimmt, dann sind in der Potenzreihe*

$$\frac{1}{f(z)} = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_n z^n + \ldots$$

sämtliche Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ *nichtpositiv.*

Es sei nämlich $n \geqq 1$. Aus den Gleichungen

$$\gamma_0 \beta_n + \gamma_1 \beta_{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1} \beta_1 + \gamma_n \beta_0 = 0,$$
$$\gamma_0 \beta_{n+1} + \gamma_1 \beta_n + \gamma_2 \beta_{n-1} + \ldots + \gamma_n \beta_1 + \gamma_{n+1} \beta_0 = 0$$

erhält man durch Elimination von β_0

$$\beta_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{\gamma_{n-k}}{\gamma_0} \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} - \frac{\gamma_{n-k+1}}{\gamma_{n-k}} \right).$$

Hier sind auf der rechten Seite die Faktoren von sämtlichen β_k nichtnegativ, so daß man hieraus $\beta_{n+1} \leqq 0$ schließen kann, wenn $\beta_1 \leqq 0$, $\beta_2 \leqq 0, \ldots, \beta_n \leqq 0$ bereits bekannt ist. Wegen $\beta_1 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_0^2}$ folgt hieraus die Behauptung.

3. Durch Kombination der beiden obigen Sätze ergibt sich II unmittelbar. Es ist nur noch nachzuweisen, daß aus den Voraussetzungen von Satz II $f(z) \neq 0$ $(|z| < 1)$ folgt. Der Konvergenzradius von $f(z)$ ist mindestens gleich 1. Ferner existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}.$$

Dieser Grenzwert muß also $\leqq 1$ sein; d. h. $\gamma_{n+1} \leqq \gamma_n$, die Koeffizienten nehmen monoton ab. Die Abschnitte einer solchen Potenzreihe haben aber nach einem bekannten Satz von Kakeya[6]) ihre sämtlichen Nullstellen außerhalb des Einheitskreises, woraus $f(z) \neq 0$ $(|z| < 1)$ folgt[7]).

---

[6]) Vgl. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (Berlin, Julius Springer 1916), S. 20.

[7]) Ich verdanke diese letzte Bemerkung einer mündlichen Mitteilung von Herrn Fejér.

§ 2.

Anwendungen von II.

1. Es ist klar, daß I aus II unmittelbar folgt. In der Tat, wenn

$$\frac{1}{(1-z)^{\varrho}} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots$$

gesetzt wird, dann ist für $0 < \varrho \leqq 1$

$$\gamma_0 = 1\,;\ \gamma_n = \binom{n+\varrho-1}{n} = \frac{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+n-1)}{1.2\ldots n} > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und $\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \dfrac{\varrho+n}{n+1} = 1 - \dfrac{1-\varrho}{n+1}$ nimmt mit wachsendem n nicht ab. Ferner ist $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ divergent. Die oben erwähnte Vorzeicheneigenschaft der reziproken Potenzreihe

$$(1-z)^{\varrho} = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_n z^n + \ldots$$

läßt sich freilich in diesem speziellen Falle direkt dartun. Es ist ja

$$\beta_0 = 1; \qquad \beta_n = \frac{-\varrho(-\varrho+1)(-\varrho+2)\ldots(-\varrho+n-1)}{1.2.3\ldots n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man sieht ferner, daß die in § 1 definierten Größen $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots$ für $0 < \varrho < 1$ sämtlich *negativ* sind, so daß dann sogar

$$|(1-z)^{\varrho}(\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n)| < 1 + |z|^{n+1} \quad (n = 0, 1, 2\ldots;\ z \leqq 1)$$

gilt. Man kann also in I stets $H = 2$ schreiben. (Für $\varrho = 1$ natürlich nur dann, wenn das Zeichen $<$ durch $\leqq$ ersetzt wird.)

2. Herr Fejér hat mich aufmerksam gemacht, daß es mit Hilfe des Satzes II unmittelbar gelingt, die in B, § 1 behandelte Stieltjessche Abschätzung

$$(*) \qquad |P_n(\cos\theta)| < \frac{A}{\sqrt{n}\sqrt{\sin\theta}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ 0 < \theta < \pi)$$

($P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom, A eine von n und θ unabhängige Konstante) auf die allgemeineren Polynomklassen, die er ebenda in § 2 definiert hat, zu übertragen. Diese Polynome, die nun ebenfalls mit $P_n(\cos\theta)$ bezeichnet werden mögen, lassen sich aus einer Potenzreihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

mit lauter reellen Koeffizienten folgendermaßen herleiten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{-in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n.$$

(Vgl. die Einleitung, Satz V.) In B, §§ 2, 3 beweist Herr Fejér für diese Polynome die Ungleichungen

$$|P_n(\cos\theta)| \leqq \frac{4\,\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\sin\theta} \qquad (n=0,1,2,\ldots;\ 0<\theta<\pi),$$

$$|P_n(\cos\theta) - P_{n+2}(\cos\theta)| \leqq 7\,\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]} \qquad (n=0,1,2,\ldots;\ 0\leqq\theta\leqq\pi),$$

wenn nur $\alpha_0 = 1$ *ist, die* α_n *positiv sind und die Folge* α_n *mit wachsendem* n *nicht zunimmt.* (Für den Fall $\alpha_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}$ beziehen sich diese Ungleichungen auf die Legendreschen Polynome; die zweite Ungleichung stammt für diesen Spezialfall (mit einer anderen Konstanten) von Stieltjes.) Demgegenüber wird dort das Analogon der tiefer liegenden Stieltjesschen Ungleichung (*) nur für die durch die Binomialreihe $\alpha_n = \binom{n+\varrho-1}{n}$ $(0<\varrho<1)$ erzeugten Polynome bewiesen. Man zeigt nun auf Grund von II ähnlich, wie in B, § 1 den folgenden Satz:

Es sei

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

regulär für $|z|<1$. *Außerdem sei*

$$\alpha_n > 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \leqq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \leqq \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \leqq \ldots \leqq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leqq \ldots;\ ^{8})$$

schließlich sei die Reihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

divergent. Setzt man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{-in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n,$$

dann ist

$$|P_n(\cos\theta)| \leqq 8\,\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]} |f(e^{2i\theta})| \qquad (n=0,1,2,\ldots;\ 0<\theta<\pi).$$

3. Folgender Satz dürfte ferner nicht ohne Interesse sein.

Es sei α_n *positiv und* $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ *nicht abnehmend mit wachsendem* n. *Die Nullstellen der Polynome* $P_n(\cos\theta)$ *sind dann sämtlich reell und voneinander verschieden.*

---

[8]) Dann sind die α_n a fortiori monoton fallend (vgl. §§ 1, 3), so daß $f(z)$ für $|z|=1$, $z \neq 1$ konvergiert, und zwar gleichmäßig auf jedem Bogen, der den Punkt $z=1$ nicht enthält.

In der Tat ist

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{ik\theta} \cdot \alpha_{n-k} e^{-i(n-k)\theta} = 2\,\Re \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \alpha_k \alpha_{n-k} z^{n-2k} \quad (z = e^{i\theta}),$$

wo das Zeichen Σ' andeutet, daß das Glied $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ den Faktor $\frac{1}{2}$ erhält, wenn n gerade ist. Nun liegen nach dem bereits oben erwähnten Satze von Kakeya die Nullstellen des Polynoms $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \alpha_k \alpha_{n-k} z^{n-2k}$ sämtlich im Einheitskreise, da $\alpha_k \alpha_{n-k}$ mit wachsendem k nicht zunimmt:

$$\alpha_k \alpha_{n-k} \geqq \alpha_{k+1} \alpha_{n-k-1}, \qquad \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-k-1}} \geqq \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \qquad \left(k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1\right).$$

(Bei geradem n wird der letzte Koeffizient durch den Faktor $\frac{1}{2}$ noch weiter vermindert.) Sie liegen sogar *im Innern* des Einheitskreises, wenn man vom Ausnahmefall

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \ldots = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$$

absieht[9]). Nach dem Argumentprinzip der Funktionentheorie besitzt aber dann der Realteil dieses Polynoms für $z = e^{i\theta}$ $2n$ verschiedene Nullstellen[10]).

Der Ausnahmefall $\alpha_k = \alpha_0 \lambda^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ kann direkt erledigt werden. Dann ist nämlich

$$P_n(\cos\theta) = \alpha_0^2 \lambda^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

§ 3.

Beweis von III.

Die Methode von § 1 braucht beim Beweise von Satz III nur wenig modifiziert zu werden. Es ist zunächst $\gamma_n > 0$. Es sei ferner a ganz, $a < \varrho \leqq a+1$. Setzt man nun

$$(1-z)^\varrho = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_n z^n + \ldots,$$

---

[9]) Aus der Umformung

$$(a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m)(1-z) = z^{m+1} \sum_{\nu=0}^{m} (a_\nu - a_{\nu+1})(z^{-\nu-1} - 1) \quad (a_{m+1} = 0)$$

folgt nämlich, wenn $a_0 > a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots a_m \geqq 0$ und $|z| \geqq 1$, $z \neq 1$, daß die linke Seite nicht verschwindet. In der Tat ist dann

$$\Re \sum_{\nu=0}^{m} (a_\nu - a_{\nu+1})(z^{-\nu-1} - 1) \leqq \Re (a_0 - a_1)(z^{-1} - 1) < 0.$$

In unserem Falle heißt die Bedingung $a_0 > a_1$, daß $\frac{\alpha_1}{\alpha_0} < \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$.

[10]) Vgl. die Schlußweise bei G. Pólya, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 359–361.

so ist

$$\beta_0 > 0, \quad -\beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \ldots, \quad (-1)^a \beta_a > 0,$$

$$(-1)^{a+1}\beta_{a+1} > 0, \quad (-1)^{a+1}\beta_{a+2} \geqq 0, \quad (-1)^{a+1}\beta_{a+3} \geqq 0, \ldots.$$

Wir setzen ferner, wie in § 1,

$$(1-z)^{\varrho}(\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n) = 1 + q_{n+1} z^{n+1} + q_{n+2} z^{n+2} + \ldots.$$

Man schließt wie dort, daß die Größen q_{n+a+1}, $q_{n+a+2}, \ldots$ sämtlich das Vorzeichen $(-1)^{a+1}$ besitzen. (Für $\varrho = a+1$ ist nur q_{n+a+1} von Null verschieden.) Es ist ferner

$$1 + q_{n+1} + q_{n+2} + \ldots = 0,$$

so daß für $|z| \leqq 1$

$$\begin{aligned} &|(1-z)^{\varrho}(\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n)| \\ &\leqq 1 + |q_{n+1}| + |q_{n+2}| + \ldots \\ &= 1 + |q_{n+1}| + |q_{n+2}| + \ldots + (-1)^a (1 + q_{n+1} + q_{n+2} + \ldots) \\ &\leqq 2(1 + |q_{n+1}| + |q_{n+2}| + \ldots + |q_{n+a}|). \end{aligned} \tag{2}$$

Andererseits ist

$$\operatorname*{Max}_{|z| \leqq 1} |(1-z)^{\varrho}(\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n)| > |q_{n+1}|.$$

Nun gilt

$$q_{n+1} z^{n+1} + q_{n+2} z^{n+2} + \ldots = -(1-z)^{\varrho}(\gamma_{n+1} z^{n+1} + \gamma_{n+2} z^{n+2} + \ldots)$$

(so daß z. B. $q_{n+1} = -\gamma_{n+1}$), woraus wegen $\gamma_n \sim \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \frac{1}{n^{1-\varrho}}$ die Behauptung folgt.

Man kann auch genauere Resultate erzielen. Für $1 < \varrho < 2$ ist z. B. $a = 1$ und

$$1 + |q_{n+1}| + |q_{n+2}| + \ldots = 2|q_{n+1}| = 2\gamma_{n+1} = 2\binom{n+\varrho}{n+1}.$$ [11])

In der entsprechenden Ungleichung (2) gilt dann stets das Zeichen $<$, wie man leicht einsieht [12]).

---

[11]) Ähnlich erhält man auf der rechten Seite von (2) stets

$$2(|q_{n+1}| + |q_{n+2}| + \ldots + |q_{n+a}|),$$

wenn a ungerade ist.

[12]) Man kann den Satz III auch durch Zurückführung auf Satz I beweisen. Für $1 < \varrho \leqq 2$ geht dies z. B. folgendermaßen. Es sei

$$\frac{1}{(1-z)^{\varrho}} = \gamma_0^{(\varrho)} + \gamma_1^{(\varrho)} z + \gamma_2^{(\varrho)} z^2 + \ldots + \gamma_n^{(\varrho)} z^n + \ldots.$$

(Fortsetzung der Fußnote 12 auf nächster Seite.)

§ 4.

Konstantenbestimmung.

1. Um den Grenzwert der in der Einleitung definierten Maxima M_n für $n \to \infty$ zu bestimmen, behandle ich eine etwas allgemeinere Aufgabe. Es sei $0 < \varrho < 1$ und

$$(1-z)^{\varrho}(\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n) = \varphi_n(z)$$

gesetzt. Dann gilt offenbar $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = 1$ für $|z| \leqq 1$, $z \neq 1$, und zwar gleichmäßig, wenn eine gewisse Umgebung $|1-z| < \varepsilon$ von $z = 1$ ausgeschlossen wird, $0 < \varepsilon < 2$. Es sei nun $\mathfrak{M}_n$ die Gesamtheit der Werte, die $\varphi_n(z)$ für $|z| \leqq 1$, $|1-z| < \varepsilon$ annimmt. Wie ist die Häufungsmenge $\mathfrak{M}'$ der Mengen $\mathfrak{M}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ beschaffen [13])?

Es sei ω eine feste positive Zahl, n so groß gewählt, daß $\frac{\omega}{n} < \varepsilon$, und es sei $|z| \leqq 1$, $|1-z| > \frac{\omega}{n}$. Dann ist

$$1 - \varphi_n(z) = (1-z)^{\varrho}(\gamma_{n+1} z^{n+1} + \gamma_{n+2} z^{n+2} + \ldots)$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{1-\varrho}}\left(\gamma_{n+1} z^{n+1} + (\gamma_{n+2} - \gamma_{n+1}) z^{n+2} + (\gamma_{n+3} - \gamma_{n+2}) z^{n+3} + \ldots\right).$$

Hieraus folgt, da $\gamma_{n+1} = O\left(\frac{1}{n^{1-\varrho}}\right)$, $\gamma_{n+1} - \gamma_{n+2} = O\left(\frac{1}{n^{2-\varrho}}\right)$,

$$|1 - \varphi_n(z)| < \frac{1}{|1-z|^{1-\varrho}} O\left(\frac{1}{n^{1-\varrho}} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^{2-\varrho}}\right) < \frac{1}{|1-z|^{1-\varrho}} \frac{C}{n^{1-\varrho}},$$

wo C nur von ϱ abhängt. Es ist somit

$$|1 - \varphi_n(z)| < \left(\frac{n}{\omega}\right)^{1-\varrho} \frac{C}{n^{1-\varrho}} = \frac{C}{\omega^{1-\varrho}}, \tag{3}$$

d. h. beliebig klein, wenn ω genügend groß ist.

Dann ist $(|z| \leqq 1)$

$$(1-z)^{\varrho} \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^{(\varrho)} z^k$$

$$= (1-z)^{\varrho-1}\left(\gamma_0^{(\varrho)} + (\gamma_1^{(\varrho)} - \gamma_0^{(\varrho)})\, z + (\gamma_2^{(\varrho)} - \gamma_1^{(\varrho)})\, z^2 + \ldots + (\gamma_n^{(\varrho)} - \gamma_{n-1}^{(\varrho)})\, z^n - \gamma_n^{(\varrho)} z^{n+1}\right)$$

$$= (1-z)^{\varrho-1} \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^{(\varrho-1)} z^k - \gamma_n^{(\varrho)} z^{n+1} (1-z)^{\varrho-1} = -\gamma_n^{(\varrho)} z^{n+1} (1-z)^{\varrho-1} + O(1).$$

Hieraus folgt übrigens

$$\operatorname*{Max}_{|z|\leqq 1} \left|(1-z)^{\varrho} \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^{(\varrho)} z^k\right| \sim 2^{\varrho-1} \gamma_n^{(\varrho)} \sim \frac{2^{\varrho-1}}{\Gamma(\varrho)} n^{\varrho-1}.$$

[13]) Ein Punkt gehört zur Häufungsmenge $\mathfrak{M}'$, wenn in einer beliebigen Umgebung von ihm Punkte von unendlich vielen $\mathfrak{M}_n$ liegen. (Sie ist offenbar unabhängig von ε.) Im vorliegenden Falle gilt dies sogar für alle genügend großen n, d. h. $\mathfrak{M}'$ ist die „Grenzmenge" der $\mathfrak{M}_n$. — $\mathfrak{M}'$ enthält offenbar die Punkte 0 und 1.

Es sei andererseits $|z| \leqq 1$, $|1-z| \leqq \frac{\omega}{n}$. Man hat

$$\gamma_n = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \frac{1}{n^{1-\varrho}} + O\left(\frac{1}{n^{2-\varrho}}\right),$$

d. h.

$$\varphi_n(z) = \frac{(1-z)^\varrho}{\Gamma(\varrho)} \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^{1-\varrho}} + O(|1-z|^\varrho).$$

Setzt man $1-z = \frac{\zeta}{n}$, so daß $|\zeta| \leqq \omega$, dann ist zunächst bei festem ζ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-z)^\varrho}{\Gamma(\varrho)} \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^{1-\varrho}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\zeta^\varrho}{\Gamma(\varrho)} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\left(1-\frac{\zeta}{n}\right)^n\right]^{\frac{k}{n}}}{\left(\frac{k}{n}\right)^{1-\varrho}}$$

$$= \frac{\zeta^\varrho}{\Gamma(\varrho)} \int_0^1 \frac{e^{-\zeta t}}{t^{1-\varrho}} dt = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^\zeta e^{-\tau} \tau^{\varrho-1} d\tau.$$

Diese Grenzwertgleichung gilt gleichmäßig für $|\zeta| \leqq \omega$. Wenn nun z eine Folge von Werten z_n durchläuft, für welche

$$|z_n| \leqq 1, \quad |1-z_n| \leqq \frac{\omega}{n}$$

gilt, so setze man $n(1-z_n) = \zeta_n$, so daß

$$|\zeta_n - n| \leqq n, \quad |\zeta_n| \leqq \omega.$$

Um die Häufungswerte der Zahlen $\varphi_n(z_n)$ zu bestimmen, beschränke man sich auf eine Teilfolge von n-Werten, für welche $\lim \zeta_n = \zeta$ existiert. Es ist offenbar $\Re\zeta \geqq 0$, ferner $|\zeta| \leqq \omega$, und somit

$$\lim \varphi_n(z_n) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^\zeta e^{-\tau} \tau^{\varrho-1} d\tau. \tag{4}$$

Umgekehrt, wenn ζ so vorgeschrieben ist, daß $\Re\zeta \geqq 0$ und $|\zeta| \leqq \omega$, dann hat z. B. die Folge

$$z_n = 1 - \frac{\zeta}{n}$$

für genügend große n die obige Eigenschaft. Sämtliche Werte der auf der rechten Seite von (4) angeschriebenen Funktion für $\Re\zeta \geqq 0$, $|\zeta| \leqq \omega$ gehören somit zu $\mathfrak{M}'$. Nun ist aber ω beliebig und bekanntlich

$$\lim_{|\zeta| \to \infty} \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^\zeta e^{-\tau} \tau^{\varrho-1} d\tau = 1, \quad \Re\zeta \geqq 0.$$

Hieraus folgt mit Beachtung von (3), daß $\mathfrak{M}'$ mit der Gesamtheit der Werte

$$w = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^{\zeta} e^{-\tau} \tau^{\varrho-1} d\tau \quad \text{für} \quad \Re\zeta \geqq 0$$

übereinstimmt.

Wir bemerken, daß diese Funktion auf der imaginären Achse $\Re\zeta = 0$ sicher solche Werte annimmt, die dem Betrage nach größer als 1 sind; („Gibbssches Phänomen", vgl. die Einleitung). In der Tat gilt für $\zeta = i\xi \ \ (\xi > 0)$

$$w = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^{i\xi} e^{-\tau} \tau^{\varrho-1} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^{\xi} e^{-\left(t - \frac{\varrho\pi}{2}\right)} t^{\varrho-1} dt = 1 - \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_{\xi}^{\infty} e^{-i\left(t - \frac{\varrho\pi}{2}\right)} t^{\varrho-1} dt$$

und hieraus schließt man durch partielle Integration für $\xi \to +\infty$

$$w = 1 + \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \frac{i e^{-i\left(\xi - \frac{\varrho\pi}{2}\right)}}{\xi^{1-\varrho}} + O\left(\frac{1}{\xi^{2-\varrho}}\right).$$

Für $\varrho = \frac{1}{2}$ ist z. B.

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau .$$

Das Maximum von $|w|$ für $\Re\zeta \geqq 0$ wird auf der imaginären Achse erreicht. Es sei $\zeta = i x^2$, $0 \leqq x < +\infty$. Setzt man $\tau = i\alpha^2 = (e^{\frac{i\pi}{4}}\alpha)^2$, dann ist

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^x e^{-i\alpha^2} d\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{i\pi}{4}} \left(\int_0^x \cos(\alpha^2) d\alpha - i \int_0^x \sin(\alpha^2) d\alpha \right).$$

Die oben gestellte Aufgabe kann auch für die geometrische Reihe $(\varrho = 1)$ gelöst werden. Dann ist $\varphi_n(z) = 1 - z^{n+1}$, so daß $\mathfrak{M}'$, wie man sofort einsieht, mit der Kreisscheibe $|1 - z| \leqq 1$ übereinstimmt.

2. Auf die Analogie dieser Ergebnisse zum Gibbsschen Phänomen ist schon oben hingewiesen worden. Es sei nur noch bemerkt, daß es auch Fälle gibt, wo derartige Erscheinungen *nicht* auftreten. So z. B. bei der Reihe

$$\log \frac{1}{1-z} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots,$$

d. h. für die Funktionenfolge

$$\varphi_n(z) = \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{-1} \left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n}\right)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots, |z| \leqq 1).$$

Hier ist, wie ich nun zeigen möchte, die vorhin definierte Menge $\mathfrak{M}'$ mit dem reellen Intervalle $[0, 1]$ identisch.

Es sei wieder zunächst $\varepsilon > 0$, $\omega > 0$ und n so groß, daß $\frac{\omega}{n} < \varepsilon$. Es sei ferner $|z| \leqq 1$ und $\frac{\omega}{n} < |1 - z| < \varepsilon$. Dann ist

$$\left|\log \frac{1}{1-z}\right| \geqq \log \frac{1}{|1-z|} > \log \frac{1}{\varepsilon}$$

und, wie oben,

$$|1 - \varphi_n(z)| < \left|\log \frac{1}{1-z}\right|^{-1} \frac{1}{1-z|} O\left(\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right)$$

$$< \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \frac{n}{\omega} O\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{C}{\omega},$$

wo die Konstante C nur von ε abhängt.

Anderseits sei $|z| \leqq 1$ und $|1 - z \leqq \frac{\omega}{n}$. Es ist

$$\varphi_n(z) = \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k - 1}{k} + \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Das erste Glied ist hier absolut kleiner als

$$\left|\log \frac{1}{1-z}\right|^{-1} |z - 1| \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k} \leqq \omega \left|\log \frac{1}{1-z}\right|^{-1}$$

$$\leqq \omega \left(\log \frac{1}{|1-z|}\right)^{-1} \leqq \omega \left(\log \frac{n}{\omega}\right)^{-1},$$

es konvergiert somit für $n \to \infty$ gegen Null. Das zweite Glied ist wegen $\Re \log \frac{1}{1-z} = \log \frac{1}{|1-z|} \to +\infty$ und $\left|\Im \log \frac{1}{1-z}\right| < \frac{\pi}{2}$

$$\sim \frac{\log n}{\log \frac{1}{|1-z|}} \leqq \frac{\log n}{\log \frac{n}{\omega}} \to 1.$$

$\mathfrak{M}'$ liegt also ganz im reellen Intervall $[0, 1]$. Man kann ferner durch passende Wahl der von n abhängigen Zahl z mit $|1 - z| \leqq \frac{\omega}{n}$ erreichen, daß der Quotient

$$\frac{\log n}{\log \frac{1}{|1-z|}}$$

gegen eine beliebige Zahl des Intervalls $0 < \lambda < 1$ konvergiert. (Man braucht bloß $z = 1 - n^{-\frac{1}{\lambda}}$ zu setzen.) Hieraus folgt die Behauptung[14].

[14]) Die Reihe $\log \frac{1}{1-z}$ kann in gewissem Sinne als Grenzfall der Binomialreihe für $\varrho \to 0$ aufgefaßt werden. Dementsprechend geht die in 1 gefundene Häufungs-

§ 5.

Über eine Verallgemeinerung der Laplaceschen asymptotischen Formel für die Legendreschen Polynome.

Die in Satz V erwähnten Polynome $P_n(\cos\theta)$ (vgl. auch § 2, **2**, **3**) können folgendermaßen geschrieben werden:

$$P_n(\cos\theta) = 2\,\Re \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \alpha_k \alpha_{n-k} e^{-i(n-2k)\theta},$$

wo das Zeichen Σ' darauf hinweist, daß das Glied $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu versehen ist, wenn n eine gerade Zahl bedeutet (vgl. § 2, **3**). D. h.

$$P_n(\cos\theta) = 2\alpha_n\,\Re\, e^{-in\theta} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} \alpha_k e^{2ik\theta}.$$

Es sei nun η positiv und $N = N(\eta)$ so groß, daß

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_k e^{2ik\theta} \right| < \eta,$$

wenn $m \geqq N$; hierbei ist $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$. Eine derartige Bestimmung von N ist stets möglich, da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ wegen der Voraussetzung 1 von Satz V auf jedem Bogen des Einheitskreises, der $z = 1$ nicht enthält, gleichmäßig konvergiert.

Wegen der Voraussetzung **2** ist offenbar

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} \alpha_k e^{2ik\theta} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k e^{2ik\theta};$$

dieser Grenzwert unterscheidet sich von $f(e^{2i\theta})$ höchstens um η.

---

menge für $\varrho \to 0$ tatsächlich in das reelle Intervall $[0, 1]$ über. Es ist nämlich

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^{\zeta} e^{-\tau}\, \tau^{\varrho-1}\, d\tau = 1$$

für $\Re\,\zeta \geqq 0$, $\zeta \neq 0$, und zwar gleichmäßig in jedem, $\zeta = 0$ nicht enthaltenden Bereiche. Wenn ferner ζ gleichzeitig mit ϱ gegen 0 geht, dann ist

$$\frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^{\zeta} e^{-\tau}\, \tau^{\varrho-1}\, d\tau = \varrho \int_0^{\zeta} \tau^{\varrho-1}\, d\tau + o(\varrho) = \zeta^{\varrho} + o(\varrho).$$

Es ist $\zeta^{\varrho} = e^{\varrho \log \zeta} \sim e^{\varrho \log |\zeta|}$ und die Häufungspunkte des letzteren Ausdrucks erfüllen das Intervall $[0, 1]$.

Es sei nun n so groß, daß $\left[\frac{n}{2}\right] > N$. Es ist

$$\sum_{k=N+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n}\alpha_k e^{2ik\theta} = \sum_{k=N+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n}\alpha_k e^{2ik\theta} - \frac{\lambda_n}{2}\frac{\alpha_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}{\alpha_n}\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]} e^{2i\left[\frac{n}{2}\right]\theta}$$

$$\left(\lambda_n = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } n \\ 1 & \text{für gerade } n \end{cases}\right).$$

Auf die rechtsstehende Summe wende man die Abelsche partielle Summation an. Man hat

$$\left|\sum_{k=N+1}^{K} \alpha_k e^{2ik\theta}\right| < 2\eta \qquad \left(K = N+1, N+2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

und $\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n}$ ist monoton wachsend mit k. D. h. (vgl. B, Fußnote [9]))

$$\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} \leqq \frac{\alpha_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}{\alpha_n}, \qquad \left|\sum_{k=N+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n}\alpha_k e^{2ik\theta}\right| \leqq 4\eta \frac{\alpha_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}{\alpha_n}.$$

Der Quotient $\frac{\alpha_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}{\alpha_n}$ bleibt laut Voraussetzung 3 unterhalb der Konstante C, so daß

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n}\alpha_k e^{2ik\theta}\right| < 4C\eta + \frac{C}{2}\alpha_{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Wir erhalten folglich

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n}\alpha_k e^{2ik\theta} - f(e^{2i\theta})\right| < \eta + 4C\eta = (1+4C)\eta,$$

d. h.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n}\alpha_k e^{2ik\theta} = f(e^{2i\theta})$$

u. zw. gleichmäßig für $\varepsilon \leqq \theta \leqq 2\pi - \varepsilon$. Damit ist der Satz V bewiesen[15]).

[15]) Vgl. zu diesem Beweis J. Todhunter, An elementary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions, and Bessel's functions (London: Macmillan 1875). S. 69—70; ferner Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik (7. Auflage, herausgegeben von Ph. Frank und R. v. Mises, Erster Teil, Braunschweig: Fr. Vieweg, 1925). S. 349—351.

(Eingegangen am 10. August 1925.)

Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Oberflächenspannung*).

Von

Ernst Hölder in Leipzig.

Einleitung.

Beim Studium der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeit mit Oberflächenspannung vernachlässigt man in der Regel die gegenseitigen Newtonschen Anziehungskräfte zwischen den Teilchen — mit gutem physikalischen Grund bei kleinen Tropfen, ist doch die Oberflächenenergie der Oberfläche proportional, die Gravitationsenergie aber von der Ordnung Oberfläche mal Volumen.

Dagegen hat im Hinblick auf astronomische Anwendungen in der Theorie der Gestalt der Planeten B. Globa-Mikhaïlenko[1]) zu den bei Himmelskörpern sonst allein betrachteten Newtonschen Gravitationskräften zwischen den Teilchen der Flüssigkeit eine Oberflächenspannung hinzutreten lassen.

Es war erwünscht, die von Globa-Mikhaïlenko im Anschluß an Poincaré nur in erster Näherung durchgeführte Untersuchung solcher Gleichgewichtsfiguren mit den neueren von A. Liapounoff und Herrn Lichtenstein entwickelten Methoden vorzunehmen. Für den vorliegenden Zweck kamen namentlich die Methoden in Betracht, die Herr Lichtenstein in seinen „Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen“[2]) entwickelt hat.

Mit diesen Mitteln gelingt es leider nicht ohne weiteres, unsere Aufgabe in naheliegender Weise so zu behandeln, daß man als Ausgangsfigur

*) Die vorliegende Abhandlung ist von der Leipziger philosophischen Fakultät als Doktor-Dissertation zugelassen worden.

[1]) Journ. de Math. (7 série) 2 (1916), S. 1–78, insbes. S. 37–57.

[2]) I. Abhandlung, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 229–284; 3 (1919), S. 172–174 II. Abhandlung, ebenda 7 (1920), S. 126–231.

eine der bekannten Gleichgewichtsfiguren gravitierender Flüssigkeit (ohne Oberflächenspannung) nimmt und nun zusieht, wie diese sich abändert, wenn man eine kleine Oberflächenspannung hinzutreten läßt. Dem Existenzbeweis durch sukzessive Approximationen stellt sich nämlich folgende Schwierigkeit entgegen: Man bekommt die sukzessiven Approximationen als Ausdrücke von der Art des Newtonschen Potentials einer einfachen Flächenbelegung, deren Dichte ein Ausdruck ist, in dem neben der vorhergehenden Approximation und deren ersten Ableitungen überdies, vom Kapillardruck herrührend, deren zweite Ableitungen auftreten. Da nun das Newtonsche Potential einer einfachen Flächenbelegung, kurz gesprochen, in gewisser Weise stetige Ableitungen von nur um eins höherer Ordnung als die Dichte besitzt, so geht für diese bei jeder Approximation eine Ableitung verloren.

Beim Existenzbeweis wäre also von vornherein vom analytischen Charakter der Approximationen Gebrauch zu machen, was aber potentialtheoretische Hilfsmittel voraussetzen würde, die man bis jetzt nicht hat.

Angesichts dieser Sachlage erweist es sich als notwendig, sich auf die Behandlung der folgenden Aufgabe zu beschränken: Man geht von einer als bekannt anzusehenden Gleichgewichtsfigur einer Flüssigkeit mit von Null verschiedener Oberflächenspannung aus, hält diese fest, während die Winkelgeschwindigkeit der Rotation einen Zuwachs bekommt. Gefragt wird: Gibt es für jeden hinreichend kleinen Wert dieses Zuwachses eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft der gegebenen Ausgangsfigur?

Wir begnügen uns in dieser Arbeit mit der Untersuchung der Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer ruhenden Kugel. Hier kann man die Gravitationskräfte beliebig stark annehmen. In dem allgemeineren Falle einer beliebigen, als bekannt anzusehenden Gleichgewichtsfigur mit Oberflächenspannung als Ausgangsfigur sind die ursprünglichen Gravitationskräfte gleich Null zu setzen (andere Ausgangsfiguren sind nicht bekannt), die neu hinzutretenden Gravitationskräfte hinreichend klein zu halten.

In dem besonderen Fall einer ruhenden Kugel als Ausgangsfigur — dem einzigen Fall, wo trotz der Oberflächenspannung die Begrenzung der Flüssigkeit eine Niveaufläche der Schwerkraft, die sich hier wegen des Verschwindens der Zentrifugalkraft auf die Anziehungskraft reduziert, ist — erweist es sich als zweckmäßig, die (konvexe) Begrenzungsfläche der zu untersuchenden benachbarten Gleichgewichtsfigur durch parallele Normalen auf die Ausgangskugel zu beziehen und als Unbekannte den Zuwachs der Stützfunktion einzuführen; so erzielt man eine gewisse Vereinfachung der Integrodifferentialgleichung des Problems.

Im ersten Teil, wo der besseren Übersicht halber von den Gravitationskräften ganz abgesehen wird, bekommt man eine sehr einfache (nicht-

lineare) partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich nach den allgemeinen Methoden behandeln läßt, die Herr Lichtenstein in Verallgemeinerung des von den Herren Korn und Müntz auf die Differentialgleichung der Minimalflächen angewandten Verfahrens entwickelt hat[3]).

Wie sich zeigt, liegt der Verzweigungsfall vor, der hier unter Benutzung der von Stekloff und Hilbert eingeführten und in unserem Falle explizit angebbaren „Greenschen Funktion im erweiterten Sinne" behandelt wird. Die sich so ergebende „Verzweigungsgleichung" wird mit dem Schwerpunktsatz in Verbindung gebracht, der schon von Herrn Lichtenstein zu ihrer Diskussion in einem analogen Fall herangezogen wurde.

Wir erhalten so die bekannten von Beer[4]) explizit angegebenen Gleichgewichtsfiguren mit Rotationssymmetrie, die sich durch unsere Betrachtungen als die einzigen in der Nachbarschaft der Kugel für hinreichend kleine Winkelgeschwindigkeiten vorhandenen erweisen.

Auf Grund dieser Ergebnisse und der Feststellungen des Herrn Lichtenstein in seinen Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren gravitierender Flüssigkeiten ergibt sich im zweiten Teil eine ähnliche Behandlung für den allgemeineren Fall, daß neben der Oberflächenspannung noch die Newtonschen Gravitationskräfte berücksichtigt werden.

Das Schlußergebnis ist die (diesmal nicht von vornherein bekannte) Existenz einer einzigen Reihe solcher Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der ruhenden Kugel.

I. Teil.

§ 1.

Aufstellung der Ausgangsgleichung.

Es sei T ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet im Raume der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z. Die Begrenzung S von T sei als doppelpunktlos und von der Klasse Bh vorausgesetzt. Dies besagt in der Bezeichnungsweise des Enzyklopädieartikels II C 3 (Lichtenstein), S. 187, daß sich (übrigens in unendlich mannigfaltiger Art und Weise) Parameter ξ, η bestimmen lassen, so daß in einer Umgebung eines jeden Punktes von S

$$(1) \qquad x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta), \quad z = Z(\xi, \eta)$$

[3]) Vgl. L. Lichtenstein, I. Monatsh. Math. Phys. 28 (1917), S. 5—51; II. Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 26—51. S. auch A. Korn, Abh. der Kgl. Preuß. Akademie der Wiss. 1909, Anhang S. 1—37; H. Müntz, Journ. f. Math. 139 (1910), S. 5—32.

[4]) Beer, Einleitung in die mathematische Theorie der Elastizität und Capillarität, Leipzig 1869, S. 177 ff.

gesetzt werden kann, unter X, Y, Z Funktionen verstanden, die stetig sind und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben, wobei die zweiten Ableitungen überdies einer H-Bedingung (in ihrem Definitionsbereich in einer ξ, η-Ebene)[5]) genügen; es ist ferner der Ausdruck

$$\left[\frac{\partial(YZ)}{\partial(\xi\eta)}\right]^2+\left[\frac{\partial(ZX)}{\partial(\xi\eta)}\right]^2+\left[\frac{\partial(XY)}{\partial(\xi\eta)}\right]^2 \tag{2}$$

nirgends Null. Unsere Fläche ist also insbesondere stetig gekrümmt.

Wir denken uns T mit einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte $f=$ konst. erfüllt; das Newtonsche Potential von T ist $\varkappa f V(x, y, z)$,

$$V=\int_T \frac{d\tau}{D}, \quad d\tau=d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z}, \quad D^2=(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2, \tag{3}$$

wo $\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante bezeichnet;

$$U=V(X, Y, Z) \tag{4}$$

sei der Wert des Potentials an der Oberfläche S.

Außerdem herrsche in S die (konstante) Oberflächenspannung α.

Sonst wirken keine Kräfte, insbesondere ist der Außendruck gleich Null.

Jetzt soll die Flüssigkeit wie ein starrer Körper um die z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Die Bedingung des relativen Gleichgewichts in bezug auf ein System mitrotierenden Achsen x, y, z lautet dann[6]):

$$2H+\frac{\varkappa f^2}{\alpha}U+\frac{f}{2\alpha}\omega^2R^2=C \text{ auf } S \ (C \text{ konstant}); \tag{5}$$

hier bedeutet H die mittlere Krümmung der Fläche S:

$$2H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},^{7}) \tag{6}$$

unter R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche verstanden, jedesmal positiv genommen, falls der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der positiven (d. h. Außen-) Normalen liegt; R ist die Entfernung eines Punktes auf S von der Rotationsachse,

$$R^2=X^2+Y^2. \tag{7}$$

---

[5]) Wir sagen: Eine Funktion f genügt — gleich allgemeiner auf einer Fläche Σ — einer H-Bedingung, wenn $|f(\underline{\sigma})-f(\sigma)|<\text{Konst.}\,d^{\mu}$, $0<\mu<1$ auf Σ gilt, unter $\underline{\sigma}, \sigma$ zwei Punkte auf Σ, unter d ihre geradlinige Entfernung verstanden (vgl. den oben zitierten Artikel II C 3, S. 191).

[6]) Vgl. loc. cit. [4]) S. 194.

[7]) Vgl. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Berlin 1921, S. 165.

Als Ausgangsgleichung benutzen wir nachher folgende Form von (5):

$$R_1 + R_2 + \left(\frac{\varkappa f^2}{\alpha} U + \frac{f}{2\alpha}\omega^2 R^2 - C\right) R_1 R_2 = 0. \tag{8}$$

§ 2.

Einführung der Stützfunktion.

Um die Erleichterungen voll auszunützen, die sich bei Beschränkung auf die ruhende Kugel als Ausgangsfigur ergeben, gehen wir zweckmäßigerweise etwas anders vor, als es sonst in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten geschieht.

Eine Gleichgewichtsfigur S_1 in hinreichender Nachbarschaft (zweiter Ordnung) der Kugel S wird nämlich konvex sein, und man kann S_1 durch parallele Normalen auf S beziehen.

Betrachten wir allgemein eine konvexe Fläche S der Klasse Bh, deren Gaußsche Krümmung $\frac{1}{R_1 R_2} > 0$ (nirgends $= 0$) ist. Die Fläche S denken wir uns, wie das besonders von Minkowski getan worden ist, durch ihre Stützfunktion dargestellt, d. h. die Entfernung p der Tangentialebene vom Ursprung sei als Funktion der Normalenrichtung (a, b, c) auf S, mit anderen Worten als Funktion des sphärischen Bildpunktes $\sigma(a, b, c)$ auf der Einheitskugel Σ $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$[8]) vorgeschrieben:

$$p = p(\sigma) = p(\alpha_1, \alpha_2), \tag{9}$$

wenn wir Σ auf Systeme regulärer Parameter α_1, α_2 beziehen. Diese können, wie aus den über S gemachten Voraussetzungen wegen der Gleichungen

$$p = \sum' X a, \qquad \frac{\partial p}{\partial \alpha_\nu} = \sum' X \frac{\partial a}{\partial \alpha_\nu},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha_\mu \partial \alpha_\nu} = \sum' \frac{\partial X}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial a}{\partial \alpha_\nu} + \sum' X \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha_\mu \partial \alpha_\nu}$$

leicht folgt, so gewählt werden, daß $p(\alpha_1, \alpha_2)$ stetige erste und zweite Ableitungen besitzt, die zweiten Ableitungen zudem einer H-Bedingung auf Σ genügen.

Durch die Stützfunktion ausgedrückt werden X, Y gewisse Linearformen in p und seinen ersten Ableitungen $p_\mu = \frac{\partial p}{\partial \alpha_\mu}$:

$$\begin{aligned} X &= X(p) = ap + a^1 p_1 + a^2 p_2 = ap + V(a, p), \\ Y &= Y(p) = bp + b^1 p_1 + b^2 p_2 = bp + V(b, p); \end{aligned} \tag{10}$$

[8]) Es sei daran erinnert, daß auch die Minimalflächen mit Vorteil auf ihr sphärisches Bild bezogen werden. Vgl. H. A. Schwarz, Ges. Math. Abh. I., S. 236 ff.

[9]) Vgl. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, (Leipzig 1899), S. 140 ff.

die dabei auftretenden Koeffizienten a^1, a^2, b^1, b^2 sind (analytische und reguläre) Funktionen auf Σ; da ∇ den (gemischten) ersten Beltramischen Differentialoperator auf Σ bedeuten soll, könnte man sie als die kontravarianten ersten Ableitungen von a bzw. b bezeichnen;

$$R^2 = X^2 + Y^2 = X^2(p) + Y^2(p) \tag{11}$$

ist somit eine gewisse quadratische Form $E(p)$ in p und seinen ersten Ableitungen p_μ.

Wenn wir noch den zweiten Beltramischen Differentialoperator Δ und den von Bianchi[10]) mit Δ_{22} bezeichneten Differentialausdruck, wieder beide bezüglich Σ, einführen, finden wir bekanntlich

$$R_1 R_2 = p^2 + p\,\Delta p + \Delta_{22} p, \tag{12}$$

also eine quadratische Form $F(p)$ in p und seinen kovarianten zweiten Ableitungen $p_{\mu\nu}$ auf Σ[11]).

Mit Hilfe der Polarform $F(p\,|\,q)$ ergibt sich[12])

$$-(R_1 + R_2) = 2F(1\,|\,p) = \Delta p + 2p \equiv \Lambda(p). \tag{13}$$

Unsere Ausgangsgleichung (8) schreibt sich jetzt wie folgt:

$$-2F(1\,|\,p) + \left(\frac{\varkappa f^2}{\alpha} U + \frac{f}{2\alpha}\omega^2 E(p) - C\right) F(p) = 0. \tag{14}$$

§ 3.

Die fundamentale Differentialgleichung für die Nachbarschaft der ruhenden Kugel bei Abwesenheit der Gravitationskräfte.

Gehen wir nun von T zu einer benachbarten ebenfalls konvexen Gleichgewichtsfigur T_1 über, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 rotiert; ihre Begrenzung S_1 sei von derselben Art wie bisher S, also von der Klasse Bh, die Stützfunktion sei

$$p_1 = p + w. \tag{15}$$

Es entsprechen sich immer auf S und S_1 Punkte (X, Y, Z) und (X_1, Y_1, Z_1), in denen die Normalen parallel sind.

Neben die Ausgangsgleichung (14) für T tritt jetzt eine analoge Gleichung für T_1:

$$-2F(1\,|\,p_1) + \left(\frac{\varkappa f^2}{\alpha} U_1 + \frac{f}{2\alpha}\omega_1^2 E(p_1) - C_1\right) F(p_1) = 0; \tag{16}$$

[10]) loc. cit. [9]), S. 48.

[11]) loc. cit. [9]); $p_{\mu\nu}$ genügen natürlich unter den über S gemachten Voraussetzungen ebenfalls einer H-Bedingung auf Σ.

[12]) loc. cit. [9]), da bei Bianchi (vgl. seine Anm. auf S. 99) r_1, r_2 das entgegengesetzte Vorzeichen wie R_1, R_2 besitzt.

hier ist U_1 das Newtonsche Potential von T_1 in (X_1, Y_1, Z_1), C_1 eine Konstante.

Wir subtrahieren die beiden Seiten dieser Gleichungen voneinander und erhalten wegen

$$F(p_1) = F(p+w) = F(p) + 2F(p|w) + F(w) \tag{17}$$

unter Berücksichtigung von (5)

$$\begin{aligned} &-2F(1|w) - 2H\cdot 2F(p\ w) - 2H\cdot F(w) \\ &+\left(\frac{\varkappa f^2}{\alpha}(U_1 - U) + \frac{f}{2\alpha}(\omega_1^2 E(p_1) - \omega^2 E(p)) - (C_1 - C)\right) F(p_1) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Gehen wir jetzt von der ruhenden Kugel mit dem Radius r_0 aus, so ist

$$\begin{cases} \omega = 0, & \frac{f}{2\alpha}\omega_1^2 \text{ ein kleiner Parameter,} \\ p = r_0, & -H = \frac{1}{r_0} = \text{konst.} \end{cases} \tag{19}$$

Es wird also

$$-2F(1|w) - 2H\cdot 2F(p|w) = 2F(1|w) = \Delta w + 2w. \tag{20}$$

Lassen wir zunächst einmal die Gravitationskräfte beiseite: $\varkappa = 0$; dann bekommen wir die fundamentale Differentialgleichung

$$\Delta w + 2w = \left(C_1 - C - \frac{f\omega_1^2}{2\alpha} E(p_1)\right) F(p_1) - \frac{2}{r_0} F(w). \tag{21}$$

Wir setzen noch

$$w = r_0 v, \tag{22}$$

also

$$p_1 = p + w = r_0(1+v); \tag{23}$$

ferner

$$r_0(C_1 - C) = s, \qquad \frac{f}{2\alpha} r_0^3 \omega_1^2 = \lambda. \tag{24}$$

Dann erhalten wir aus (21) nach Division durch r_0

$$\Delta(v) \equiv \Delta v + 2v = (s - \lambda E(1+v)) F(1+v) - 2F(v) = \Phi(s, \lambda; v). \tag{25}$$

Zu dieser Differentialgleichung möge noch folgendes bemerkt werden. Ist $\varkappa = 0$, so kann $s = 0$ gesetzt werden; wie aus (25), wo sich alles auf die Einheitskugel Σ bezieht, oder direkt aus

$$2H_1 + \frac{f}{2\alpha}\omega_1^2(X_1^2 + Y_1^2) = C_1 \qquad (H_1 = \text{mittlere Krümmung von } S_1) \tag{26}$$

erhellt, ist nämlich mit T_1 auch jeder aus ihm durch eine Ähnlichkeitstransformation im Verhältnis $1:t$ bezüglich des Koordinatenursprungs entstehende Körper eine Gleichgewichtsfigur, die aber zur Winkelgeschwin-

digkeit $\omega_1 t^{-\frac{3}{2}}$ gehört [13]). Der konstante Wert von C_1 geht dabei über in $C_1 t^{-1}$; t kann daher so bestimmt werden, daß dies $= C$ wird. Wir können also in der Tat $s = 0$ annehmen und auf die aus

$$\Delta v + 2v = -\lambda E(1+v)\,F(1+v) - 2F(v) \tag{27}$$

erhaltenen Gleichgewichtsfiguren nachträglich Ähnlichkeitsformationen, verbunden mit passenden Winkelgeschwindigkeitsänderungen, ausüben.

Im Hinblick auf die späteren allgemeineren Betrachtungen zum Fall $\varkappa \neq 0$ behalten wir jedoch im folgenden s bei.

§ 4.

Die Nullösungen.

Die homogene Differentialgleichung auf der Einheitskugel Σ

$$\Lambda(u) \equiv \Delta u + 2u = 0 \tag{28}$$

besitzt genau drei linear unabhängige Lösungen, die drei Raumkomponenten des Normalenvektors:

$$u_1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,a, \qquad u_2 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,b, \qquad u_3 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,c, \tag{29}$$

wenn wir sie gleich durch die Bedingung

$$\int_{\Sigma} u_j^2\, d\sigma = 1 \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{30}$$

normieren.

Zur allgemeinsten Nullösung u gehört ein Zuwachs $w = r_0 u$ der Stützfunktion $p = r_0$ von der Form

$$w = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

wo α, β, γ irgendwelche Konstanten bedeuten; er entspricht einer Verschiebung der Ausgangskugel um den Vektor (α, β, γ). Aus dieser Interpretation erhellt die auch aus $F(u) = 0$ folgende Tatsache, daß unsere Nullösung u auch der inhomogenen Gleichung (25) mit $s = 0$ und $\lambda = 0$ genügt.

Ist T_1 eine Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit, so auch jeder Körper $\bar{T}_1$, der aus T durch eine Parallelverschiebung in Richtung der Rotationsachse um eine beliebige Strecke d hervorgeht. Dabei geht w über in

$$\bar{w} = w + d \cdot c,$$

[13]) Dies bemerkt Beer loc. cit. [4]), S. 186 bei den von ihm untersuchten Gleichgewichtsfiguren.

das Integral $\int w c\, d\sigma$ wird

$$\int \bar{w} c\, d\sigma = \int w c\, d\sigma + d \cdot \int c^2\, d\sigma = \int w c\, d\sigma + \frac{4\pi}{3} d;$$

für $d = -\frac{3}{4\pi}\int w c\, d\sigma$ wird $\int \bar{w} c\, d\sigma = 0$.

Wir können und wollen daher die Lage von T_1 näher bestimmen durch die Bedingung

$$\int w c\, d\sigma = 0,$$

oder, was dasselbe bedeutet, durch

$$r_3 = \int v u_3\, d\sigma = 0. \quad (31)$$ [14])

Zweitens können wir immer

$$r_2 = \int v u_2\, d\sigma = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int v b\, d\sigma = 0 \quad (32)$$

machen durch eine geeignete Drehung der Gleichgewichtsfigur T_1 um die Rotationsachse [14a]).

Das Integral

$$r_1 = \int v u_1\, d\sigma = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int v a\, d\sigma \quad (33)$$

geht als Parameter in unsere Gleichungen ein.

§ 5.

Bestimmung der Greenschen Funktion.

Nun brauchen wir die von Hilbert und Stekloff zuerst benutzte sog. „Greensche Funktion im erweiterten Sinne" Γ des Differentialausdruckes $\Delta(v) \equiv \Delta v + 2v$ auf Σ. [14b])

Um $\Gamma(\sigma, \sigma')$ aus seiner Differentialgleichung

$$\Delta(\Gamma) \equiv \Delta\Gamma + 2\Gamma = u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3' \equiv \frac{3}{4\pi} \cos\Theta, \quad (34)$$

wo Θ den Bogen $\sigma\sigma'$ auf Σ, ϱ nachher die räumliche Entfernung $\sigma\sigma'$ bedeuten, zu ermitteln, wird man von Γ seinen singulären Teil zum Abzug bringen; wir bilden also

$$\gamma = \Gamma - \cos\Theta \cdot \Gamma_0. \quad (35)$$

---

[14]) Vgl. loc. cit. [2]) I, S. 251.

[14a]) Loc. cit. [3]) II, S. 170f.

[14b]) Vgl. D. Hilbert, Gött. Nachrichten 1904, S. 213–259, insb. S. 238; W. Stekloff, Ann. de l'Ec. Norm. (3) 19 (1902), S. 191–259; S. 455–490, insb. S. 247–248. An der zuletzt genannten Stelle handelt es sich speziell um den Laplaceschen Differentialausdruck und die zweite Randwertaufgabe im Raum.

Hier bedeutet

$$(36) \qquad \Gamma_0(\sigma,\sigma') = -\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{2\pi}\lg\sin\frac{\Theta}{2} = -\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi}\lg\frac{2}{\varrho}$$

die Greensche Funktion im erweiterten Sinne des Differentialausdrucks Δv [15]), sie genügt der Differentialgleichung

$$(37) \qquad \Delta\Gamma_0 = \frac{1}{4\pi}$$

und der Normierungsbedingung

$$(38) \qquad \int \Gamma_0 \, d\sigma = 0.$$

Für γ bekommt man

$$\Delta(\gamma) = \Delta(\Gamma) - \Delta(\cos\Theta)\cdot\Gamma_0 - 2V(\cos\Theta, \Gamma_0) - \cos\Theta\cdot\Delta\Gamma_0.$$

Die rechte Seite reduziert sich wegen (34), (28), (37) und

$$(39) \qquad V(\cos\Theta,\Gamma_0) = \frac{\partial\cos\Theta}{\partial\Theta}\frac{\partial\Gamma_0}{\partial\Theta} = \frac{1}{2\pi}\sin\Theta\cdot\frac{\cos\frac{\Theta}{2}}{2\sin\frac{\Theta}{2}} = \frac{1}{4\pi}(1+\cos\Theta),$$

wo wir den Ursprung des Polarkoordinatensystems auf Σ in den Punkt $\sigma'(a', b', c')$ gelegt haben, auf $-\frac{1}{2\pi}$; wir erhalten also

$$(40) \qquad \Delta\left(\gamma + \frac{1}{4\pi}\right) = 0, \qquad \gamma = -\frac{1}{4\pi} + \Sigma c_j u_j.$$

Jetzt sind nur noch die Konstanten c_j so zu bestimmen, daß die Integrale

$$(41) \qquad \int \Gamma u_j \, d\sigma = 0$$

werden, d h. es ist mit Rücksicht auf (35)

$$c_j = -\int\cos\Theta\,\Gamma_0\cdot u_j\,d\sigma = -u_j'\cdot 2\pi\int_{-1}^{+1} x^2\,\Gamma_0(x)\,dx$$ [16])

zu setzen mit $\Gamma_0(\cos\Theta) = \Gamma_0(\sigma,\sigma')$. Man findet

$$c_j = -u_j'\cdot\frac{1}{3}\int(3\cos^2\Theta - 1)\,\Gamma_0\,d\sigma = -\frac{1}{9}u_j';$$

---

[15]) Nach Zermelo, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 47 (1902), S. 222 und Hadamard, Propagation des ondes, Paris 1903, S. 52. Vgl. auch Kneser, Die Integralgleichungen, 2. Aufl., Braunschweig 1922, S. 173.

[16]) Nach bekannten Formeln aus der Theorie der Kugelfunktionen. Vgl. Hecke, Math. Ann. 78 (1917), S. 403, dessen Betrachtungen sich auf unsere („brauchbar") unstetigen Kerne übertragen lassen.

und es wird endgültig

$$(42)\qquad \Gamma(\sigma,\sigma') = -\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{12\pi}\cos\Theta + \cos\Theta\cdot\Gamma_0(\sigma,\sigma')$$
$$= -\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{3\pi}\cos\Theta - \frac{1}{2\pi}\cos\Theta\cdot\lg\sin\frac{\Theta}{2}.\ ^{17})$$

§ 6.

Die Integrodifferentialgleichung.

Die Greensche Funktion Γ leistet die Umformung der fundamentalen Differentialgleichung (25) in eine Integrodifferentialgleichung. Zu diesem Zwecke betrachten wir auf Σ das Integral

$$(43)\qquad V = -\int \Gamma\psi'\,d\sigma'$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\psi'\,d\sigma' + \frac{1}{12\pi}\,\Sigma a\int a'\psi'\,d\sigma' - \Sigma a\int\Gamma_0\cdot a'\psi'\,d\sigma',$$

unter $\psi = \psi(\sigma)$ eine Funktion verstanden, die auf Σ einer H-Bedingung genügt:

$$(44)\qquad |\psi(\underline{\sigma})| < N, \quad |\psi(\underline{\sigma}) - \psi(\sigma)| < Nd'' \qquad 0 < \mu < 1$$
$$(N = \text{konstant}, \quad d = \text{räumliche Entfernung } \sigma\,\underline{\sigma}).$$

Da a, b, c auf Σ regulär und analytisch sind, so verhält sich V im wesentlichen wie $V_0 = -\int\Gamma_0\psi'\,d\sigma'$ [18]), d. h. wie das logarithmische Potential einer ebenen Flächenbelegung: V besitzt erste und zweite Abeitungen, und es gelten für sie folgende Ungleichheiten, die wir gleich für die kovarianten zweiten Ableitungen hinschreiben wollen:

$$(45)\qquad \begin{aligned} &|V|, |V_\mu|, |V_{\mu\nu}| < \beta N \qquad (\beta \text{ konstant}),\\ &|V_{\mu\nu}(\underline{\sigma}) - V_{\mu\nu}(\sigma)| < \beta N d'' \quad \text{auf } \Sigma; \end{aligned}$$

die Konstante β ist hier nur von μ abhängig.

Weiter gibt (43) wegen (28),

$$\Delta V_0 = \psi - \frac{1}{4\pi}\int\psi\,d\sigma\ ^{18})$$

und wegen (39):

$$(46)\quad \Delta V = -\frac{1}{12\pi}2\Sigma a\int a'\psi'\,d\sigma' + 2\Sigma a\int\Gamma_0\cdot a'\psi'\,d\sigma'$$
$$-2\frac{1}{4\pi}\int(1+\Sigma a a')\psi'\,d\sigma' + \Sigma a\left(a\psi - \frac{1}{4\pi}\int a'\psi'\,d\sigma'\right).$$

---

[17]) Siehe auch den von Blaschke loc. cit. [7]) S. 160 angegebenen Ausdruck, der sich allerdings von unserem, abgesehen von der Normierung (41), durch ein Vorzeichen unterscheidet.

[18]) Vgl. L. Lichtenstein, Acta mathematica **40** (1915), S. 4ff.

Durch Addition bekommen wir aus (46) und (43)

$$\Lambda(V) = \Delta V + 2V = \psi' - \frac{8}{4\pi}\Sigma a \int a'\psi' d\sigma' \tag{47}$$

$$= \psi - \sum_{j=1}^{5} u_j \int u_j' \psi' d\sigma'.$$

Wir nehmen jetzt an, die fundamentale Differentialgleichung (25) besitze eine Lösung v, die in Σ regulär ist, und deren zweite Ableitungen dort überdies einer H-Bedingung genügen:

$$\begin{aligned} &|v|\,|v_\mu|\,|v_{\mu\nu}| < \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ konstant}). \\ &|v_{\mu\nu}(\underline{\sigma}) - v_{\mu\nu}(\sigma)| < \varepsilon d''. \end{aligned} \tag{48}$$

Sei etwa noch

$$|s|, |\lambda| < \delta, \tag{49}$$

dann gilt für $\Phi(s\lambda, v) = \Phi(v)$ die zu (44) analoge Ungleichung

$$|\Phi(s\lambda, v)| < N, \qquad |\Phi(s\lambda, v(\underline{\sigma})) - \Phi(s\lambda, v(\sigma))| < Nd'', \text{ [19]} \tag{50}$$

wobei die Unterstreichung des Funktionszeichens Φ andeutet, daß darin überall in den Koeffizienten von v und seinen Ableitungen σ durch $\underline{\sigma}$ zu ersetzen ist. Weiter gilt sicher

$$\int \Phi(v) u_j d\sigma = 0. \tag{51}$$

Bilden wir also das Integral

$$V = -\int \Gamma \Phi'(v') d\sigma', \tag{52}$$

so erhalten wir statt (47) einfacher $\Lambda(V) = \Phi(v)$. Es kann sich somit v von V nur um eine Nullösung $\Sigma c_j u_j$ unterscheiden; die Konstanten c_j bestimmen sich wegen der Normierung der u_j und ihrer Orthogonalität zueinander und zu Γ zu

$$c_j = \int v u_j d\sigma = r_j.$$

Wie wir oben (§ 4) gesehen haben, kann man immer $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ voraussetzen; für solche Lösungen v von (25) gilt also

$$v = r_1 u_1 - \int \Gamma \Phi'(v') d\sigma'. \tag{53}$$

Durch bekannte Betrachtungen[20] folgt, daß für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werte von s, λ und des zunächst als unbestimmter Parameter aufzufassenden r_1 die Integrodifferentialglei-

[19] Man sieht leicht, es kann

$$N = P(\delta + \varepsilon^2) \qquad (P \text{ konstant}) \tag{50a}$$

gesetzt werden.

[20] Loc. cit. [3]) I, Kap. II; II, § 2.

chung (53) eine und nur eine Lösung v hat, wenigstens in einer durch Ungleichheiten von der Form (48) bestimmten Nachbarschaft der Kugel; v läßt sich in eine Potenzreihe nach $\varepsilon, \lambda, r_1$ entwickeln.

Die Lösung bestimmt sich, ausgehend von der Funktion $v=0$, $v_{\mu}=0$, $v_{\mu\nu}=0$, durch sukzessive Approximationen:

$$\begin{aligned} v^{(0)} &= r_1 u_1 - \int \Gamma \Phi'(\varepsilon\lambda, 0)\, d\sigma', \\ v^{(1)} &= r_1 u_1 - \int \Gamma \Phi'(\varepsilon\lambda, v^{(0)}(\sigma'))\, d\sigma', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{54}$$

Hier bezeichnet z. B. $\Phi'(\varepsilon\lambda, v^{(0)}(\sigma'))$ den Ausdruck, den man erhält, wenn man in $\Phi(\varepsilon\lambda, v(\sigma))$ für σ durchweg σ' setzt. Diese $v^{(j)}$ konvergieren mit ihren ersten und zweiten Ableitungen auf Σ gleichmäßig gegen die oben genannte Lösung v. Auf Grund der potentialtheoretischen Feststellungen zu Beginn dieses Paragraphen ist für das Gelingen des Verfahrens wesentlich, daß für alle den Ungleichheiten (49) und (48) genügenden $\varepsilon, \lambda; v, \bar{v}$ neben den Beziehungen (50), (50a) noch folgende für

$$\tilde{\Phi} = \Phi(\varepsilon\lambda, \bar{v}) - \Phi(\varepsilon\lambda, v), \qquad \tilde{v} = \bar{v} - v \tag{55}$$

bestehen:

$$\begin{aligned} &|\tilde{\Phi}| < P_1(\delta+\varepsilon)\,\Omega \qquad (P_1 \text{ konstant}), \\ &|\tilde{\Phi}(\underline{\sigma}) - \tilde{\Phi}(\sigma)| < P_1(\delta+\varepsilon)\,\Omega d^{\mu}, \\ &\Omega = \mathrm{Max}\left(|\tilde{v}|, |\tilde{v}_{\mu}|, |v_{\mu\nu}|, \frac{|\tilde{v}_{\mu\nu}(\underline{\sigma}) - \tilde{v}_{\mu\nu}(\sigma)|}{d^{\mu}}\right) \quad \text{auf } \Sigma \end{aligned} \tag{56}$$

gesetzt.

Wegen der Normierung der u_j und ihrer Orthogonalität zueinander und zu Γ ist für diese Lösung v

$$\int v u_1\, d\sigma = r_1, \qquad \int v u_j\, d\sigma = 0 \qquad (j=2,3). \tag{57}$$

Wegen $\Lambda(u_j)=0$ genügt v nach (47) der Differentialgleichung

$$\Lambda(v) = \Phi(v) - \sum u_j \int u_j' \Phi'(v')\, d\sigma', \tag{58}$$

also der vorgelegten Differentialgleichung (25), falls

$$\int u_j \Phi(v)\, d\sigma = 0 \qquad (j=1,2,3) \tag{59}$$

ist. Nun überträgt sich die Symmetrie einer Approximation $v^{(j)}$ in bezug auf die Ebenen $z=0$, $y=0$ zunächst auf $\Phi(\varepsilon\lambda, v^{(j)})$, sodann auf die folgende Approximation $v^{(j+1)}$, da die Greensche Funktion Γ nur von der Entfernung ihrer beiden Argumentpunkte abhängt; schließlich in der Grenze auf v und $\Phi(\varepsilon\lambda, v)$. Somit ist die Gleichung (59) für $j=2,3$ von selbst erfüllt; $j=1$ gibt, wenn man für v seine oben erwähnte Potenzentwicklung nach den Parametern einsetzt, die „Verzweigungsgleichung“ zur Bestimmung von r_1.

Setzt man auch $r_1 = 0$ in der Integrodifferentialgleichung (53), so sieht man wie oben, daß die zugehörige Lösung zudem bzw. der Ebene $x = 0$ symmetrisch ist, somit auch der Verzweigungsgleichung genügt. Einer solchen Lösung v entspricht also wirklich eine Gleichgewichtsfigur, und zwar mit zwei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen durch die Rotationsachse, daher[21]) sogar mit Rotationssymmetrie; sie gehört somit zu den von Beer[22]) bestimmten Gleichgewichtsfiguren.

§ 7.

Diskussion der Verzweigungsgleichung.

Anders als durch $r_1 = 0$ ist aber die Verzweigungsgleichung gar nicht zu befriedigen. Man hat nur ihre mechanische Bedeutung zu beachten, die — auch für allgemeinere Fälle von Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der ruhenden Kugel feststellbar — sich in unserem Falle fast von selbst darbietet. Wegen

$$\int F(v)\, u_j\, d\sigma = 0 \tag{60}$$

für beliebige Funktionen v ist nämlich

$$\Phi_j \equiv \int \Phi\, u_j\, d\sigma = -\lambda \int_{\Sigma} E(1+v)\, u_j \cdot F(1+v)\, d\sigma, \tag{61}$$

also

$$\Phi_1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{r_0^4}\lambda \int_{S_1} (X_1^2 + Y_1^2)\, a\, do_1 \tag{62}$$

mit dem Oberflächenelement $do_1 = F(p_1)\, d\sigma$ auf S_1.

Nach dem Gaußschen Satze wird

$$\Phi_1 = -2\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{r_0^4}\lambda \int_{T_1} x\, d\tau. \tag{63}$$

$\Phi_j = 0$ $(j = 1, 2)$ drückt also den Schwerpunktsatz aus: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß T_1 wirklich eine Gleichgewichtsfigur ist, besteht darin, daß der Schwerpunkt von T_1 auf der Rotationsachse liegt.

Jetzt verläuft die Diskussion der Verzweigungsgleichung in bekannter Weise[23]); es ist

$$\int_{T_1} x\, d\tau = \int_{T_1 - T} x\, d\tau = \int_S X w\, do + (w)_2, \tag{64}$$

---

[21]) loc. cit. [2]) II, S. 175.

[22]) loc. cit. [4]).

[23]) Man vgl. die analogen Betrachtungen loc. cit. [2]) II, S. 220. — Das Flächenelement auf S soll mit do bezeichnet werden.

wo $(w)_2$ Glieder vom zweiten und höheren Grade in w und seinen Ableitungen, also auch in den Parametern s, λ, r_1 bedeuten. Unter Berücksichtigung von (57) wird

$$(65) \qquad \Phi_1 = -2\lambda\left[\int_\Sigma u_1 v\, d\sigma + (w)_2\right] = -2\lambda[r_1 + (w)_2].$$

Die Verzweigungsgleichung hat also nur eine Lösung, das muß $r_1 = 0$ sein.

Die Gleichgewichtsfiguren mit Rotationssymmetrie sind also die einzigen in der Nachbarschaft der ruhenden Kugel.

II. Teil.

§ 8.

Änderung des Potentials eines konvexen Körpers T in einem Punkt seiner Oberfläche S beim Übergang zu einem konvexen Körper T_1.

Wir wenden uns nun zur Behandlung des allgemeineren Falles von Gleichgewichtsfiguren, wo außer der bisher allein betrachteten Oberflächenspannung α noch die Newtonschen Gravitationskräfte zwischen den Teilchen der rotierenden Flüssigkeit wirken. Hier haben wir mit dem bisherigen die allgemeinen Feststellungen und Methoden zu verbinden, die Herr Lichtenstein in seinen Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen[24]), entwickelt hat. Es sei gestattet, das Wesentlichste aus dieser Theorie, soweit es für unser Problem in Betracht kommt, kurz anzugeben mit den Änderungen, die sich aus der hier benutzten Darstellung der Fläche durch ihre Stützfunktion ergeben.

Wir knüpfen an die Gleichung (18), § 3, an und haben vor allem einen Ausdruck für die dort auftretende Differenz $U_1 - U$ zu gewinnen.

Zunächst ist

$$(66) \qquad X_1 - X = X(w), \qquad Y_1 - Y = Y(w), \qquad Z_1 - Z = Z(w)$$

mit den auf in § 2 Gleichung (10) eingeführten Linearformen, die wir auch mit w_a, w_b, w_c abkürzen wollen; es gilt also

$$(67) \qquad a\,w_a + b\,w_b + c\,w_c = w.$$

Mit S und S_1 betrachten wir gleich die ganze 1-parametrige Schar der Flächen $S_t = S + t(S_1 - S)$ mit der Stützfunktion

$$(68) \qquad p_t = p + t(p_1 - p) = p + t\,w \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

[24]) loc. cit. [2]).

Dem Punkte (X, Y, Z) auf S entspricht auf S_t der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten

$$(69) \qquad (X_t, Y_t, Z_t) = (X + t w_a, Y + t w_b, Z + t w_c),$$

in dem die Normale an S_t dieselbe Richtung (a, b, c) hat wie die Normale an S in (X, Y, Z).

Das Potential $V_t(X_t, Y_t, Z_t)$ des von S_t begrenzten Körpers T_t in (X_t, Y_t, Z_t) bezeichnen wir mit $U_t(\sigma)$.

Man betrachtet den Ausdruck für $\frac{\partial U_t}{\partial t}$; es ist

$$(70) \quad \begin{aligned} \frac{1}{h}(U_{t+h} - U_t) &= \frac{1}{h}[V_{t+h}(X+(t+h)w_a, \ldots) - V_t(X + t w_a, \ldots)] \\ &= \frac{1}{h}[V_{t+h}(X+(t+h)w_a, \ldots) - V_{t+h}(X+tw_a, \ldots)] \\ &\quad + \frac{1}{h}[V_{t+h}(X+tw_a, \ldots) - V_t(X + t w_a, \ldots)]. \end{aligned}$$

Der (zweite) Ausdruck $V_{t+h}(X + t w_a, \ldots) - V_t(X + t w_a, \ldots)$ ist das Potential der Schale $T_{t+h} - T_t$ im Punkte (X_t, Y_t, Z_t) auf S_t. Die Dicke der Schale (= dem Abstand paralleler Tangentialebenen) ist $h w$, das Volumelement also $h w' do_t'$, wenn do_t' das Flächenelement von S_t in (X_t', Y_t', Z_t') bedeutet. Durch h dividiert, konvergiert also der Ausdruck für $h \to 0$ gegen

$$(71) \qquad \int_{S_t} \frac{w'\, do_t'}{\varrho_t},$$

wo ϱ_t die geradlinige Entfernung der Punkte (X_t, Y_t, Z_t) und (X_t', Y_t', Z_t') bedeuten.

Der erste Summand gibt für $h \to 0$ den Wert

$$(72) \quad \begin{aligned} \sum w_a \frac{\partial}{\partial x} V_t(X_t, \ldots) &= \sum w_a \frac{\partial}{\partial x} \int_{T_t} \frac{d\tau'}{D_t} = -\sum w_a \int_{T_t} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{D_t} \cdot d\tau' \\ &= -\sum w_a \int_{S_t} \frac{a'}{\varrho_t} do_t', \end{aligned}$$

wo das $\sum$-Zeichen sich auf x, y, z; a, b, c bezieht, D_t die Entfernung des Volumelements $d\tau'$ von (X_t, Y_t, Z_t) ist, a', b', c' die Richtungskosinus der Normale in (X_t', Y_t', Z_t') wie in (X', Y', Z') bezeichnen.

Es ist also insgesamt mit Rücksicht auf (67)

$$(73) \qquad \frac{\partial U_t}{\partial t} = \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \Sigma(w_a' - w_a) a' \, do_t',$$

woran sich ähnliche Schlüsse knüpfen ließen wie an die Gleichung (24) bei Herrn Lichtenstein[25]); $U_1(\sigma) - U(\sigma)$ läßt sich in eine nach Gliedern verschiedener Ordnung in bezug auf w, w_μ, $w_{\mu\nu}$ fortschreitende, gleichmäßig konvergente Reihe

$$U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + \dots \tag{74}$$

entwickeln. Hier bezeichnet $U^{(n)}$ den folgenden mit Hilfe von

$$F_t' = F'(p_t(\sigma')) = F'(p') + 2t F(p'|w') + t^2 F(w') \tag{75}$$

gebildeten Integralausdruck n-ten Grades in w, w_μ; w', w_μ', $w_{\mu\nu}'$,

$$U^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_S \sum a'(w_a' - w_a) \cdot \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{F_t'}{\varrho_t}\right)\right]_{t=0} d\sigma', \tag{76}$$

$$U^{(1)} = \sum w_a \frac{\partial V}{\partial x} + \int_S \frac{w'}{\varrho} do'; \tag{77}$$

ϱ ist hier der Abstand der Punkte (X, Y, Z), (X', Y', Z') auf S,

$$\varrho^2 = (X - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2 = \sum (X' - X)^2; \tag{78}$$

für das oben eingeführte ϱ_t gilt

$$\varrho_t^2 = \varrho^2 + 2t \sum (X' - X)(w_a' - w_a) + t^2 \sum (w_a' - w_a)^2. \tag{79}$$

Nebenbei wollen wir im Falle lediglich gravitierender Flüssigkeit ohne Oberflächenspannung (also $\alpha = 0$) die fundamentale Integrodifferentialgleichung für eine konvexe Gleichgewichtsfigur T_1 in der Nachbarschaft einer *beliebigen* konvexen Gleichgewichtsfigur T hinschreiben, obwohl wir in dieser Arbeit davon keinen Gebrauch machen werden.

Die (konstante) Winkelgeschwindigkeit von T sei ω, die von T_1: ω_1. Wir setzen vorübergehend $\frac{1}{2} f(\omega_1^2 - \omega^2) = \lambda_0$. Es wird dann

$$\frac{f}{2} \omega_1^2 R_1^2 - \frac{f}{2} \omega^2 R^2 \quad \lambda_0 R_1^2 + f\omega^2 (X w_a + Y w_b) + \frac{f}{2} \omega^2 (w_a^2 + w_b^2). \tag{80}$$

Bezeichnen wir mit

$$\varkappa f \psi a = \varkappa f \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 X, \quad \varkappa f \psi b = \varkappa f \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 Y, \quad \varkappa f \psi c = \varkappa f \frac{\partial V}{\partial z} \tag{81}$$

den Vektor der Schwerkraft auf S, der ja zu S normal ist, so bekommen wir wegen (77), (80) aus $\varkappa f^2 (U_1 - U) + \frac{1}{2} f(\omega_1^2 R_1^2 - \omega^2 R^2) = s_0$

$$\varkappa f^2 \left[\psi w + \int_S \frac{w'}{\varrho} do'\right] \tag{82}$$

$$= s_0 - \lambda_0 E(p + w) - \frac{f\omega^2}{2} E(w) - \varkappa f^2 (U^{(2)} + U^{(3)} + \dots).$$

[25]) loc. cit. [2]) I, S. 242.

§ 9.

Die fundamentale Integrodifferentialgleichung für Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der ruhenden Kugel.

Nach diesen Vorbereitungen gibt die Gleichung (18), falls wir wieder als Ausgangsfigur T die ruhende Kugel vom Radius r_0 um den Koordinatenursprung nehmen, bei der die Schwerkraft (die hier wegen $\omega = 0$ allein in der Newtonschen Anziehungskraft besteht) in die Flächennormale von S fällt und den Betrag

$$\psi = -\frac{4\pi}{3} r_0 \tag{83}$$

besitzt:

$$\Delta w + 2w + \frac{\varkappa f^2}{\alpha}\left[-\frac{4\pi}{3} r_0 w + \int_S \frac{w'}{\varrho}\, d\sigma'\right][r_0^2 + 2r_0 F(1\,|\,w) + F(w)]$$

$$+\left[\frac{\varkappa f^2}{\alpha}(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots) + \frac{f\omega_1^2}{2\alpha} E(p_1) - (C_1 - C)\right] F(p_1) + \frac{2}{r_0} F(w) = 0. \tag{84}$$

Dies ordnen wir so, daß nur die Glieder ersten Grades in w und seinen Ableitungen links stehen bleiben. Mit den in § 3 eingeführten Größen v, ε, λ und mit der Abkürzung $T = \frac{4\pi}{3} r_0^3$ für das Volumen von T ergibt sich folgende fundamentale Integrodifferentialgleichung für v:

$$\Delta v + 2v - \frac{\varkappa f^2}{\alpha} T\left[v - \frac{3}{4\pi}\int_\Sigma \frac{v'}{\varrho}\, d\sigma'\right] \tag{85}$$

$$= (\varepsilon - \lambda E(1+v))\, F(1+v) - 2F(v)$$

$$+ \frac{\varkappa f^2}{\alpha} T\left[v - \frac{3}{4\pi}\int_\Sigma \frac{v'}{\varrho}\, d\sigma'\right]\left[2F(1\,|\,v) + F(v)\right]$$

$$- \frac{\varkappa f^2}{\alpha} r_0^3 \left(\frac{U^{(2)}}{r_0^2} + \frac{U^{(3)}}{r_0^2} + \ldots\right) F(1+v) = \Phi(\varepsilon, \lambda, v) + \Psi(v),$$

wo $\Phi(\varepsilon, \lambda, v)$ dieselbe Bedeutung wie im ersten Teil hat und ausführlich geschrieben

$$\Psi(v) = \frac{\varkappa f^2}{\alpha} T\left[v - \frac{3}{4\pi}\int_\Sigma \frac{v'}{\varrho}\, d\sigma'\right]\left[2v + \Delta v + v^2 + v\Delta v + \Delta_{22} v\right] \tag{86}$$

$$- \frac{\varkappa f^2}{\alpha} r_0^3 \left[\frac{U^{(2)}}{r_0^2} + \frac{U^{(3)}}{r_0^2} + \ldots\right]\left[(1+v)^2 + (1+v)\Delta v + \Delta_{22} v\right]$$

ist; in dem Integral $\int_\Sigma \frac{v'}{\varrho}\, d\sigma'$ bedeutet ϱ die geradlinige Entfernung der Punkte $\sigma\sigma'$ auf der Einheitskugel Σ. Wir denken uns v wieder durch $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ normiert; v genügt nach den Feststellungen des ersten

Teils folgender Integrodifferentialgleichung, in die noch der Parameter $\int v u_1 \, d\sigma = r_1$ eingeht:

$$(87) \qquad v(\sigma) = r_1 u_1(\sigma) - \frac{\varkappa f^2}{\alpha} T \int \Gamma(\sigma\sigma') \left[v(\sigma') - \frac{3}{4\pi} \int \frac{v(\sigma'') \, d\sigma''}{\varrho(\sigma'\sigma'')} \right] d\sigma' - \int \Gamma(\sigma\sigma')(\Phi' + \Psi') \, d\sigma'$$

oder

$$(88) \qquad v(\sigma) + \int N(\sigma\sigma') v(\sigma') \, d\sigma' = r_1 u_1(\sigma) - \int \Gamma(\sigma\sigma')(\Phi' + \Psi') \, d\sigma'$$

mit dem Kern

$$(89) \qquad N(\sigma\sigma') = \frac{\varkappa f^2}{\alpha} T \left[\Gamma(\sigma\sigma') - \frac{3}{4\pi} \int \frac{\Gamma(\sigma\sigma'')}{\varrho(\sigma''\sigma')} \, d\sigma'' \right].$$

Der Kern N hat im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie Γ, N stimmt ja mit $\frac{\varkappa f^2}{\alpha} T \cdot \Gamma$ bis auf die stetige Funktion

$$- \frac{\varkappa f^2}{\alpha} T \cdot \frac{3}{4\pi} \int \frac{\Gamma(\sigma\sigma'')}{\varrho(\sigma''\sigma')} \, d\sigma''$$

überein. Dieser zusätzliche Kern hängt wie Γ und ϱ, aus denen er zusammengesetzt ist, nur vom Abstand der Punkte σ und σ' auf Σ ab, ist also insbesondere in σ, σ' symmetrisch, und dasselbe gilt dann auch von $N(\sigma\sigma')$. Auch die Eigenschaft, zu u_1, u_2, u_3 orthogonal zu sein, teilt N mit Γ.

Ein vollständiges System von Nullösungen der homogenen Integralgleichung

$$(90) \qquad v - \nu \int N v' \, d\sigma' = 0$$

auf der Einheitskugel Σ kann bekanntlich aus Kugelfunktionen zusammengesetzt werden. Sei Y_n eine allgemeine Kugelfunktion n-ter Ordnung, deren es $2n+1$ linear unabhängige gibt. Dann bestimmt sich nach bekannten Formeln [26]) der zugehörige Eigenwert ν_n aus

$$(91) \qquad \nu_n^{-1} = \int N \cdot P_n' \, d\sigma' = \frac{\varkappa f^2}{\alpha} T \int \Gamma \cdot \left[P_n' - \frac{3}{4\pi} \int \frac{P_n'' \, d\sigma''}{\varrho(\sigma''\sigma')} \right] d\sigma'$$

mit den Werten $P_n' = P_n(aa' + bb' + cc')$, $P_n'' = P_n(aa'' + bb'' + cc'')$ der einfachen Kugelfunktion n-ter Ordnung $P_n(x)$. Wegen

$$(92) \qquad \int \frac{1}{\varrho} Y_n' \, d\sigma' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n$$

ist

$$P_n' - \frac{3}{4\pi} \int \frac{P_n'' \, d\sigma''}{\varrho(\sigma''\sigma')} = \frac{2(n-1)}{2n+1} P_n'.$$

[26]) Vgl. loc. cit. [16]).

Folglich ist wegen [27])

$$(96) \qquad (n-1)(n+2)\int I' Y_n' \, d\sigma' = Y_n \qquad (n = 0, 2, 3, \ldots)$$

$$(97) \qquad \nu_n^{-1} = \frac{\varkappa f^3}{\alpha} T \frac{2}{(2n+1)(n+2)} \qquad (n = 0, 2, 3, \ldots), \qquad \nu_1^{-1} = 0.$$

Für $\nu = -1$ besitzt also (90) keine Nullösung.

Die inhomogene Integralgleichung

$$(98) \qquad v(\sigma) + \int N(\sigma\sigma')\, v(\sigma')\, d\sigma' = \chi(\sigma)$$

ist also stets (d. h. für jede auf Σ stetige Funktion $\chi(\sigma)$) eindeutig auflösbar. Es sei H der zu N gehörige lösende Kern; $H(\sigma\sigma')$ ist wie N nur von der Entfernung der beiden Punkte $\sigma\sigma'$ abhängig und zu u_1, u_2, u_3 orthogonal. Die Auflösung von (98) ist

$$(99) \qquad v(\sigma) = \chi(\sigma) - \int H(\sigma\sigma')\, \chi(\sigma')\, d\sigma'.$$

Ist $\chi(\sigma)$ von der Form

$$(100) \qquad \chi(\sigma) = r_1 u_1(\sigma) - \int I'(\sigma\sigma')\, \psi(\sigma')\, d\sigma',$$

so ergibt sich

$$(101) \qquad v(\sigma) = r_1 u_1(\sigma) - \int L(\sigma\sigma')\, \psi(\sigma')\, d\sigma'$$

mit

$$(102) \qquad L(\sigma\sigma') = \Gamma(\sigma\sigma') - \int H(\sigma\sigma_1)\, \Gamma(\sigma_1\sigma')\, d\sigma_1.$$

L verhält sich in jeder Beziehung wie Γ: L ist eine Orthogonalinvariante seiner beiden Argumentpunkte σ, σ' und ist orthogonal zu den Nullösungen u_1, u_2, u_3; für Funktionen ψ, die auf Σ einer H-Bedingung der Form (44) genügen, besitzt das mit L gebildete Integral $-\int L\psi' \, d\sigma'$ erste und zweite Ableitungen, die auf Σ einer H-Bedingung von der Form (45) genügen [28]).

Damit können wir aber an die zu (88) „reziproke" Integrodifferentialgleichung

$$(103) \qquad v(\sigma) = r_1 u_1(\sigma) - \int L(\sigma\sigma')\, [\Phi'(s\lambda, v(\sigma')) + \Psi'(v(\sigma'))]\, d\sigma'$$

---

[27]) Es gilt nämlich für eine Nullösung der Integralgleichung

$$(93) \qquad u - \mu \int I' u' \, d\sigma' = 0$$

$$(94) \qquad \int u u_j \, d\sigma = 0 \qquad (j = 1, 2, 3),$$

und deshalb

$$(95) \qquad \Delta(u) = -\mu u, \quad \text{d. h.} \quad \Delta u + \lambda u = 0, \quad \lambda = 2 + \mu.$$

Die Eigenwerte von (93) sind also $\mu_n = \lambda_n - 2 = n(n+1) - 2 = (n-1)(n+2)$, die zugehörigen Nullösungen die allgemeinen Kugelfunktionen: $u = Y_n^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n+1)$ $n = 0, 2, 3, \ldots$; für diese Kugelfunktionen $(n \neq 1)$ ist nämlich wegen (94) auch umgekehrt der Übergang von (95) zu (93) möglich.

[28]) loc. cit. [3]) I, S. 39 ff.

ganz dieselben Schlüsse knüpfen wie an die Integrodifferentialgleichung (53) des ersten Teils [29]).

Die so gewonnene Lösung von (103) genügt auch den Gleichungen (88) und (87). Aus letzterer Gleichung folgt aber nach den Ergebnissen des § 6, Gleichung (47):

$$(105)\qquad \Lambda(v) = \frac{\varkappa f^2}{\alpha} T\Big[v - \frac{3}{4\pi}\int \frac{v'\,d\sigma'}{\varrho}\Big] + \Psi + \Phi$$
$$- \Sigma u_j \int \Big\{\frac{\varkappa f^2}{\alpha} T\Big[v - \frac{3}{4\pi}\int \frac{v'\,d\sigma'}{\varrho}\Big] + \Psi\Big\} u_j\,d\sigma - \Sigma u_j \int \Phi u_j\,d\sigma .$$

Das einzelne Glied der ersten Summe ist Null, es ist nämlich bis auf den Faktor $-\frac{\varkappa f^2}{\alpha}\frac{1}{r_0}u_j$

$$(106)\qquad \int_\Sigma (U_1 - U)\,u_j \cdot F(p_1)\,d\sigma = \int_{S_1} U_1 u_j\,do_1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_{T_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_j}\,d\tau = 0 \quad (j=1,2,3;\ x_j = x,$$

als Resultante der gegenseitigen Anziehungskräfte von T_1.

Die Verzweigungsgleichungen besitzen also ganz dieselbe Form wie im ersten Teil:

$$(107)\qquad \Phi_j \equiv \int u_j \Phi(v)\,d\sigma = 0 \qquad (j = 1, 2, 3);$$

für $j = 3$ ist (107) identisch erfüllt, was auch v sein mag; die Gleichungen für $j = 1, 2$ fordern wieder, daß der Schwerpunkt von T_1 auf der Rotationsachse liegt; für $j = 2$ ist (107) von selbst erfüllt auf Grund der Normierung von T_1 durch $r_2 = 0$, die wieder wegen der Orthogonalinvarianz von L die Symmetrie von T_1 bezüglich der y-Ebene nach sich zieht. Die Entwicklung von Φ_1 nach Potenzen der Parameter $\varepsilon, \lambda, r_1$ beginnt wieder mit $-2\lambda\int u_1 v\,d\sigma$, was sich wegen der Integrodifferentialgleichung (103) unter Berücksichtigung der Normierung der u_j und ihrer Orthogonalität zu L auf $-2\lambda r_1$ reduziert. Daraus folgt, daß es bei gegebenen ε, λ nur ein einziges r_1 geben kann; das muß $r_1 = 0$ sein.

Wir haben also wieder eine einzige Reihe von Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der ruhenden Kugel. Sie besitzen neben einer Symmetrieebene senkrecht zur Achse um diese Rotationssymmetrie.

---

[29]) Wir müssen uns nur versichern, daß für Funktionen v, v, die mit ihren ersten und zweiten Ableitungen Bedingungen von der Form (48) genügen, auch $\Psi = \Psi(v)$ und $\tilde{\Psi} = \Psi(\bar{v}) - \Psi(v)$ Ungleichheiten von der Form

$$(104)\qquad \begin{aligned} &|\Psi| < P_2\,\varepsilon^2, \quad |\Psi(\varrho) - \Psi(\sigma)| < P_2\,\varepsilon^2\,d^\mu \qquad (P_2 \text{ konstant}) \\ &|\tilde{\Psi}| < P_2\,\varepsilon\,\Omega, \quad |\tilde{\Psi}(\varrho) - \tilde{\Psi}(\sigma)| < P_2\,\varepsilon\,\Omega\,d^\mu \quad \text{auf } \Sigma \end{aligned}$$

genügen; das geht aber daraus hervor, daß solche Ungleichheiten für den wesentlichen Bestandteil von Ψ: $U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots$ (in der Abhandlung von Herrn Lichtenstein mit Ψ bezeichnet) bestehen, loc. cit. [2]) I. S. 247, 282.

(Eingegangen am 23. November 1925.)

Thermoelastische Randwertaufgaben.

Von

Roman Krzenziessa in Breslau.

§ 1.

Die thermoelastischen Differentialgleichungen.

Ein elastischer isotroper Körper werde einer beliebigen Erwärmung und zugleich einer elastischen Deformation unterworfen. Die Differentialgleichungen für diese thermoelastischen Erscheinungen sind von Duhamel[1]) und Franz Neumann[2]) unabhängig voneinander gefunden worden und lauten in moderner Bezeichnungsweise:

$$(1)\qquad \begin{cases} m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - mX = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u - p\dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ m\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mY = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v - p\dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ m\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - mZ = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w - p\dfrac{\partial V}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} = a^2\Delta V - b^2\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Hier bedeuten u, v, w die Verrückungskomponenten, V die Temperatur, X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kraft, t die Zeit, m die Masse, θ die Volumdilatation $\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$; λ und μ sind elastische, a^2 und b^2 thermische, ihrer Natur nach positive Konstanten, Δ ist der Laplacesche Operator, pV der sogenannte thermische Druck.

---

[1]) Mém. prés. à l'Académie de Paris 5 (1838), S. 440; Journal de l'école polytechnique 15, Heft 25.

[2]) Vorlesungen über die Theorie der Elastizität, 1885, S. 107 ff.; Abhandl. der Berl. Akad. 1841, II.

Sind X_n, Y_n, Z_n die Komponenten der Oberflächenkräfte, und bedeutet n die nach außen gerichtete Normale, so gelten für die Punkte der Oberfläche die Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} X_n = \left\{\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - pV\right\}\cos(n,x) + \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right\}\cos(n,y) \\ \qquad\qquad + \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cos(n,z), \\ Y_n = \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right\}\cos(n,x) + \left\{\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - pV\right\}\cos(n,y) \\ \qquad\qquad + \mu\left\{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right\}\cos(n,z), \\ Z_n = \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cos(n,x) + \mu\left\{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right\}\cos(n,y) \\ \qquad\qquad + \left\{\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - pV\right\}\cos(n,z), \end{cases}$$

Die vier Unbekannten u, v, w und V sind durch Integration von (1), (2) unter gewissen vereinfachenden Annahmen zu bestimmen. Als Integrale erhält man je nach der Wahl der für die Oberfläche geltenden elastischen und thermischen Randbedingungen Funktionen, welche Orthogonal- bzw. Biorthogonalsysteme bilden und dadurch für die Entwicklung willkürlicher Funktionen in Fouriersche Reihen geeignet sein können. In der Literatur sind thermoelastische Randwertaufgaben dieser Art bereits behandelt bei

A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl., 1922, §§ 47 und 48;

L. Koschmieder, Anwendung der Integralgleichungen auf eine thermoelastische Aufgabe, Crelles Journal **143**, S. 285—293;

Duhamel, Journal de l'école polytechnique **15** (1837), Heft 25, S. 31 ff;

H. Laudien, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Funktionen spezieller orthogonaler und biorthogonaler Systeme, Diss. Breslau 1914, Kap. 4; Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem thermo-elastischen Problem, Crelles Journal **148**, S. 79—87;

W. Jaroschek, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Gliedern biorthogonaler Funktionssysteme bei einigen thermomechanischen Aufgaben, Diss. Breslau 1918.

Man vgl. weiter:

A. Rosenblatt, Über das allgemeine thermoelastische Problem, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **29** (1910), S. 321—328.

Im folgenden soll mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen und der funktionentheoretischen Methode der Partialbruchzerlegung von Cauchy in einigen weiteren Randwertaufgaben am Stabe, an der Kreisscheibe und einem verallgemeinerten Grundgebiet untersucht werden, ob sich willkür-

liche Funktionen nach den Integralen der thermoelastischen Differentialgleichungen als Eigenfunktionen entwickeln lassen.

§ 2.

Beide Enden des Stabes sind fest, das eine Ende ist adiatherman bedeckt, am anderen Ende findet Strahlung statt.

Für den geraden Stab, der die Endkoordinaten $x = 0$ und $x = 1$ haben soll, vereinfachen sich die Gleichungen des § 1 bedeutend. Transversalschwingungen sollen ausgeschlossen werden; von äußeren Kräften soll abgesehen werden, ferner sollen die elastischen Gleichungen § 1 (1) in der Gleichgewichtsform angesetzt werden, was sich nach Duhamel[3]) rechtfertigen läßt. Dann kann p als konstant angesehen werden, und man erhält die Gleichungen

$$(1) \qquad (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p\frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t},$$

$$X_n = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} - pV.$$

Die Integration von (1), (2) ist bei Jaroschek, Diss., Kap. 2 durchgeführt. Durch Anwendung der Bernoullischen Substitution

$$V(x,t) = X(x)\cdot T_1(t), \qquad u = \Xi(x)\cdot T_2(t)$$

findet man

$$T_1 = T_2 = e^{-\frac{\alpha_\nu^2}{k^2}t},$$

wo α_ν eine Konstante und

$$k^2 = \frac{\lambda + 2\mu + pb^2}{a^2(\lambda + 2\mu)}$$

ist. Es wird

$$X_\nu = A_1 \sin(\alpha_\nu x) + A_2 \cos(\alpha_\nu x) + A_3,$$

$$\Xi_\nu = \frac{pA_2}{\alpha_\nu(\lambda + 2\mu)}\sin(\alpha_\nu x) - \frac{pA_1}{\alpha_\nu(\lambda + 2\mu)}\cos(\alpha_\nu x) - \frac{A_3}{b^2}x + A_4.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (1), (2) ist dann

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu V_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\frac{\alpha_\nu^2}{k^2}t}\{A_1 \sin(\alpha_\nu x) + A_2 \cos(\alpha_\nu x) + A_3\},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu u_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-\frac{\alpha_\nu^2}{k^2}t}\left\{\frac{pA_2}{\alpha_\nu(\lambda + 2\mu)}\sin(\alpha_\nu x) - \frac{pA_1}{\alpha_\nu(\lambda + 2\mu)}\cos(\alpha_\nu x) - \frac{A_3}{b^2}x + A_4\right\}.$$

[3]) l. c. S. 31 u. 32.

Für jedes Stabende wird man eine elastische und eine thermische Randbedingung vorschreiben können, wodurch die Konstanten A_1, A_2, A_3, A_4 und α_ν bestimmt werden. Wir wollen nun untersuchen, ob sich ein beliebiger thermischer Anfangszustand

$$V|^{t=0} = \sum_\nu a_\nu X_\nu = F(x)$$

vorschreiben läßt, d. h. ob sich eine willkürliche Funktion nach den Funktionen X_ν entwickeln läßt.

Die Randbedingungen lauten:

$$\Xi(0) = \Xi(1) = 0,$$

(3); (4) $$X'(0) = 0; \quad X'(1) + hX(1) = 0.$$

Es wird dann, wenn unter C_ν eine Konstante verstanden wird:

$$X_\nu = C_\nu(\alpha_\nu q^2 \cos \alpha_\nu x + \sin \alpha_\nu),$$

$$\Xi_\nu = \frac{C_\nu}{b^3}(\sin \alpha_\nu x - x \sin \alpha_\nu).$$

Dabei ist

$$q^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho b^3}$$

gesetzt, und die Größen α_ν sind Wurzeln der transzendenten Gleichung

(5) $$\omega(\alpha) = \alpha q^2 (h \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) + h \sin \alpha = 0.$$

Diskussion der transzendenten Gleichung (5). — Die Gleichung $\omega(\alpha) = 0$ hat keine rein imaginären Wurzeln. Wäre nämlich $\alpha = i\beta$ eine Wurzel, so wäre

$$\omega(i\beta) = i\beta q^2 (h \operatorname{Cof} \beta + \beta \operatorname{Sin} \beta) + hi \operatorname{Sin} \beta = 0,$$

oder es müßte sein

$$h \frac{\operatorname{Sin} \beta}{\beta} = - q^2 (h \operatorname{Cof} \beta + \beta \operatorname{Sin} \beta).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist stets positiv, die rechte Seite negativ, womit der gewünschte Widerspruch hergeleitet ist.

Um zu beweisen, daß keine komplexen Wurzeln von (5) vorhanden sind, gehe ich aus von einer Funktion

$$U_\nu = \cos(\alpha_\nu x).$$

Denke ich mir die Differentialgleichung dieser Funktion

$$U_\nu'' + \alpha_\nu^2 U_\nu = 0$$

für zwei verschiedene Funktionen U_ν und U_ϱ gebildet und diese Gleichungen

durch die Greensche Operation und Integration von 0 bis 1 verbunden, so wird

$$(6) \qquad (U_\sigma U_\nu' - U_\nu U_\sigma')\Big|_0^1 + (\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)\int_0^1 U_\sigma U_\nu\, dx = 0.$$

Nun ist

$$(7) \qquad U_\nu'(0) = 0,\ U_\sigma'(0) = 0$$

$$U_\sigma(1)\,U_\nu'(1) - U_\nu(1)\,U_\sigma'(1) = -\alpha_\nu \sin\alpha_\nu \cos\alpha_\sigma + \alpha_\sigma \sin\alpha_\sigma \cos\alpha_\nu.$$

Nach der transzendenten Gleichung (5) ist

$$\alpha \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\frac{1}{h} - \frac{1}{q^2\alpha^2}},$$

also wird

$$(8) \qquad U_\sigma(1)\,U_\nu'(1) - U_\nu(1)\,U_\sigma'(1) = \frac{\cos\alpha_\sigma \cos\alpha_\nu \cdot h^2 q^2 (\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)}{(h - q^2\alpha_\nu^2)(h - q^2\alpha_\sigma^2)}.$$

Wegen (7) und (8) geht Gleichung (6) über in

$$(9) \qquad h^2 q^2 \cos\alpha_\nu \cos\alpha_\sigma + (h - q^2\alpha_\nu^2)(h - q^2\alpha_\sigma^2)\int_0^1 U_\nu U_\sigma\, dx = 0.$$

Mit einer komplexen Größe ist auch die konjugiert komplexe Größe Wurzel von (5). Wären nun α_ν und α_σ zwei konjugiert komplexe Wurzeln von (5),

$$\alpha_\nu = \beta + \gamma i, \qquad \alpha_\sigma = \beta - \gamma i,$$

so wären auch $U_\nu(x)$ und $U_\sigma(x)$, $\cos\alpha_\nu$ und $\cos\alpha_\sigma$ konjugiert komplex, also

$$U_\nu U_\sigma > 0, \qquad \cos\alpha_\nu \cos\alpha_\sigma > 0.$$

Ferner wäre

$$(h - q^2\alpha_\nu^2)(h - q^2\alpha_\sigma^2) = [h - q^2(\beta^2 - \gamma^2)]^2 + 4q^4\beta^2\gamma^2 > 0;$$

die ganze linke Seite von (9) wäre also > 0 und nicht $= 0$; folglich gibt es keine komplexen Wurzeln.

Die Gleichung $\omega(\alpha) = 0$ besitzt demnach nur reelle Wurzeln. Ist α_ν eine Wurzel von (5), so ist es auch $-\alpha_\nu$, die Wurzeln liegen symmetrisch zum Nullpunkt. Die Wurzel $\alpha_\nu = 0$ wird ausgeschlossen. Da Gleichung (5) in der Form

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\alpha}{h} - \frac{1}{q^2\alpha}$$

geschrieben werden kann, ergeben sich die positiven Wurzeln α_ν als Schnittpunktsabszissen der beiden Kurven

$$y = \operatorname{ctg}\alpha, \qquad \eta = \frac{\alpha}{h} - \frac{1}{q^2\alpha}.$$

h ist eine ihrer physikalischen Natur nach positive Größe. Graphische Darstellung für y und η ergibt folgende Darstellung der Wurzeln:

$$\alpha_n = n\pi + \varepsilon_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Aufstellung des Biorthogonalsystems und Normierung. Man findet mit Benutzung des obigen Wertes von X_ν

$$\int_0^1 X_\nu\, dx = C_\nu (q^2 \sin\alpha_\nu + \sin\alpha_\nu) = C_\nu (q^2+1)\sin\alpha_\nu .$$

Die Differentialgleichung der X_ν lautet demnach:

$$X_\nu'' + \alpha_\nu^2 X_\nu = C_\nu \alpha_\nu^2 \sin\alpha_\nu = \frac{\alpha_\nu^2}{1+q^2}\int_0^1 X_\nu\, dx. \tag{10}$$

Kombinieren wir damit die Differentialgleichung für eine andere Eigenfunktion X_σ

$$X_\sigma'' + \alpha_\sigma^2 X_\sigma = \frac{\alpha_\sigma^2}{1+q^2}\int_0^1 X_\sigma\, dx,$$

so erhalten wir durch die Greensche Operation, Integration von 0 bis 1 und Beachtung der Randbedingungen (3), (4)

$$\int_0^1 X_\sigma \left[X_\nu - \frac{1}{1+q^2}\int_0^1 X_\nu\, dx\right] dx = 0.$$

Nun ist

$$X_\nu - \frac{1}{1+q^2}\int_0^1 X_\nu\, dx = A_\nu \alpha_\nu q^2 \cos(\alpha_\nu x).$$

Eine zu X_ν adjungierte Biorthogonalfunktion ist also, wenn wir von einem konstanten Faktor absehen,

$$U_\nu = \cos\alpha_\nu x .$$

Es ist dabei

$$U_\nu'' + \alpha_\nu^2 U_\nu = 0, \tag{11}$$

$$U_\nu'(0) = 0; \qquad U_\nu(1) + \frac{U_\nu'(1)}{h} = -\frac{1}{q^2}\int_0^1 U_\nu\, dx. \tag{12); (13)}$$

Die Normierung des Biorthogonalsystems nehmen wir nach der Methode des Grenzüberganges von d'Alembert vor. Wir kombinieren die Differentialgleichung

$$U'' + \beta^2 U = 0,$$

wo β noch nicht eine Wurzel der transzendenten Gleichung (5) sei, mit

der Differentialgleichung (10) der X_ν und erhalten mit Benutzung von (3), (4) und (12)

$$U(1)X_\nu'(1) - X_\nu(1)U'(1) + (\alpha_\nu^2 - \beta^2)\int_0^1 X_\nu U\,dx = C_\nu \alpha_\nu^2 \sin\alpha_\nu \int_0^1 U\,dx,$$

$$\int_0^1 X_\nu U\,dx = \frac{C_\nu \alpha_\nu^2 \sin\alpha_\nu\, \omega(\beta)}{h\beta(\alpha_\nu^2 - \beta^2)}.$$

Wenn wir nun β gegen α_ν konvergieren lassen und normieren, wird

$$\int_0^1 X_\nu U_\nu\,dx = \frac{C_\nu \alpha_\nu \sin\alpha_\nu \cdot \omega'(\alpha_\nu)}{h \cdot 2\alpha_\nu \cdot (-1)} = 1,$$

d. h.

$$C_\nu = \frac{-2h}{\sin\alpha_\nu \cdot \omega'(\alpha_\nu)}. \tag{14}$$

Aufstellung der Integralgleichungen und des Kernes $G(x,\xi)$. Wir definieren einen Kern $G(x,\xi)$ durch

$$G''(x,\xi) + \varkappa^2 G(x,\xi) = \varkappa^2 M, \text{ [4]} \tag{15}$$

$$G'(x,\xi)\Big|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} = 1, \tag{16}$$

wo $\varkappa$ ein willkürlicher, von sämtlichen α_ν verschiedener Parameter und M eine zunächst noch unbestimmte Konstante ist. Kombinieren wir (11) und (16) und berücksichtigen die Gleichungen (7), (16) und

$$U_\nu(0) = 1,$$

so erhalten wir

$$G(1,\xi)U_\nu'(1) - U_\nu(1)G'(1,\xi) + G'(0,\xi) + (\alpha_\nu^2 - \varkappa^2)\int_0^1 U_\nu G\,dx + \varkappa^2 M\int_0^1 U_\nu\,dx = U_\nu(\xi).$$

Wir legen zunächst der Größe $G(x,\xi)$ die den Randbedingungen (3), (4) der Funktion X_ν entsprechenden Bedingungen

$$G'(0,\xi) = 0; \quad G'(1,\xi) + hG(1,\xi) = 0 \tag{17); (18)}$$

auf. Dann geht die letzte Gleichung über in

$$-\alpha_\nu \sin\alpha_\nu G(1,\xi) + h\cos\alpha_\nu G(1,\xi) + \lambda_\nu \int_0^1 GU_\nu\,dx + \frac{\varkappa^2 M \sin\alpha_\nu}{\alpha_\nu} = U_\nu(\xi),$$

wo

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu^2 - \varkappa^2$$

---

[4]) Der Strich bezeichne stets die Differentiation nach dem ersten Argument in G.

gesetzt ist. Aus (5) folgt

$$h\cos\alpha_\nu - \alpha_\nu \sin\alpha_\nu = \frac{-h\sin\alpha_\nu}{\alpha_\nu q^2},$$

womit wir erhalten

$$-\frac{hG(1,\xi)\sin\alpha_\nu}{\alpha_\nu q^2} + \lambda_\nu \int_0^1 G U_\nu\, dx + \frac{\varkappa^2 M \sin\alpha_\nu}{\alpha_\nu} = U_\nu(\xi).$$

Fordern wir noch

$$\varkappa^2 M - \frac{h}{q^2} G(1,\xi) = 0, \tag{19}$$

so bekommen wir die Integralgleichung

$$U_\nu(\xi) = \lambda_\nu \int_0^1 G(x,\xi)\, U_\nu(x)\, dx.$$

Der Kern $G(x,\xi)$ hat die Gestalt

$$G(x,\xi)_{x<\xi} = c_1 \cos\varkappa x + c_2 \sin\varkappa x + M,$$
$$G(x,\xi)_{x>\xi} = c_3 \cos\varkappa x + c_4 \sin\varkappa x + M.$$

Die Gleichungen (16), (17), (18), (19) und die Stetigkeit von $G(x,\xi)$ für $x=\xi$ dienen zur Bestimmung der fünf Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 und M. Man findet

$$c_1 = \frac{(\varkappa^2 q^2 - h)\cos\varkappa(1-\xi) + \varkappa q^2 h \sin\varkappa(1-\xi)}{\varkappa\,\omega(\varkappa)},$$
$$c_2 = 0,$$
$$c_3 = \frac{(\varkappa^2 q^2 - h)\cos\varkappa + \varkappa q^2 h \sin\varkappa}{\varkappa\,\omega(\varkappa)} \cdot \cos\varkappa\xi,$$
$$c_4 = -\frac{\cos\varkappa\xi}{\varkappa}, \qquad M = \frac{h\cos\varkappa\xi}{\varkappa\,\omega(\varkappa)}.$$

Für den Kern bekommt man dann die Ausdrücke:

$$G(x,\xi)_{x<\xi} = \frac{h\cos\varkappa\xi + \cos\varkappa x\{(\varkappa^2 q^2 - h)\cos\varkappa(1-\xi) + \varkappa q^2 h \sin\varkappa(1-\xi)\}}{\varkappa\,\omega(\varkappa)},$$
$$G(x,\xi)_{x>\xi} = \frac{h\cos\varkappa\xi + \cos\varkappa\xi\{(\varkappa^2 q^2 - h)\cos\varkappa(1-x) + \varkappa q^2 h \sin\varkappa(1-x)\}}{\varkappa\,\omega(\varkappa)}.$$

Wegen des Summanden M ist der Kern $G(x,\xi)$ unsymmetrisch.

Als Funktion von ξ erfüllt der Kern die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial\xi^2} + \varkappa^2 G(x,\xi) = 0; \qquad \frac{\partial G}{\partial\xi}\Big|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} = 1. \tag{20); (21)}$$

Ferner genügt er Randbedingungen, die den Gleichungen (12), (13) bei der Funktion U_ν entsprechen:

$$\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big|^{\xi=0} = 0; \qquad G(x,1) + \frac{1}{h}\frac{dG}{d\xi}\Big|^{\xi=1} = -\frac{1}{q^2}\int_0^1 G(x,\xi)\, d\xi. \tag{22); (23)}$$

Verbindet man die Gleichungen (10) und (20) durch die Greensche Operation, so gelangt man mit Hilfe der Gleichungen (3), (4), (21), (22) und (23) zur Integralgleichung

$$X_\nu(x) = \lambda_\nu \int_0^1 G(x,\xi)\, X_\nu(\xi)\, d\xi .$$

Vertauschen wir hier noch x und ξ, so nehmen die Integralgleichungen für X_ν und U_ν folgende Gestalt an:

$$X_\nu(\xi) = \lambda_\nu \int_0^1 G(\xi,x)\, X_\nu(x)\, dx ,$$

$$U_\nu(\xi) = \lambda_\nu \int_0^1 G(x,\xi)\, U_\nu(x)\, dx .$$

Funktionentheoretischer Beweis der bilinearen Formel. Wir zerlegen $G(x,\xi)$ in Partialbrüche. Für $x < \xi$ setzen wir

$$\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} = \frac{h\cos z\xi + \cos zx\,\{(z^2q^2-h)\cos z(1-\xi) + zq^2h\sin z(1-\xi)\}}{z\cdot\omega(z)\cdot(z-\varkappa)} .$$

Setzen wir $z = u + iv$, so ist $\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}$ eine meromorphe Funktion von z. Die Nullstellen des Nenners sind $z=0$, $z=\varkappa$, $z=\pm\alpha_\nu$. Wir betrachten nun das Konturintegral $\int_{R_n} \frac{f_1(z)\,dz}{z(z-\varkappa)}$. Die Kontur R_n sei ein Rechteck, das die ersten $2n$ Pole von $\frac{1}{\omega(z)}$ und den Pol $z=\varkappa$ umfaßt. Die vertikalen Seiten mögen zwischen zwei Polen α_ν und $\alpha_{\nu+1}$ die u-Achse schneiden, so daß auf der Kontur kein Pol liegt. Nach dem Residuensatze von Cauchy ist dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_n} \frac{f_1(z)\,dz}{z(z-\varkappa)} = \sum \operatorname{Res} \frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} .$$

Die Stelle $z=0$ ist kein Pol von $\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}$, also

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} = 0 .$$

Ferner ist

$$\operatorname*{Res}_{z=\varkappa} \frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} = \underset{x<\xi}{G(x,\xi;\varkappa)} .$$

Für das Residuum an der Stelle $z=\alpha_\nu$ erhalte ich

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} = \frac{h\cos\alpha_\nu\xi + \cos\alpha_\nu x\,\{(\alpha_\nu^2q^2-h)\cos\alpha_\nu(1-\xi) + \alpha_\nu q^2h\sin\alpha_\nu(1-\xi)\}}{\alpha_\nu\,\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu-\varkappa)} .$$

Lösen wir $\cos\alpha_\nu(1-\xi)$ und $\sin\alpha_\nu(1-\xi)$ nach dem Additionstheorem auf, so fallen wegen $\omega(\alpha_\nu)=0$ drei Glieder der geschweiften Klammer weg, und es bleibt

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu}=\frac{h\cos\alpha_\nu\xi+\cos\alpha_\nu\xi\cos\alpha_\nu x\{-h\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu^2q^2\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu q^2h\sin\alpha_\nu\}}{\alpha_\nu\cdot\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu-\varkappa)}.$$

Nun ist mit Benutzung von (5)

$$-h\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu^2q^2\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu q^2h\sin\alpha_\nu$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha_\nu}[(\alpha_\nu^2q^2-h)\sin\alpha_\nu\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu q^2h\sin^2\alpha_\nu]$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha_\nu}[\cos\alpha_\nu\cdot\alpha_\nu q^2h\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu q^2h\sin^2\alpha_\nu]=\frac{\alpha_\nu q^2h}{\sin\alpha_\nu}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes wird

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu}=\frac{\cos\alpha_\nu\xi\left\{h+\frac{\alpha_\nu q^2h}{\sin\alpha_\nu}\cdot\cos\alpha_\nu x\right\}}{\alpha_\nu\omega'(\alpha_\nu)(\alpha_\nu-\varkappa)}=\frac{h\cos\alpha_\nu\xi\{\alpha_\nu q^2\cos\alpha_\nu x+\sin\alpha_\nu\}}{\alpha_\nu\omega'(\alpha_\nu)(\alpha_\nu-\varkappa)\sin\alpha_\nu}.$$

Mit Beachtung von (14) wird also

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu}\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}=-\frac{U_\nu(\xi)X_\nu(x)}{2\alpha_\nu(\alpha_\nu-\varkappa)}.$$

Ersetze ich hier α_ν durch $-\alpha_\nu$, so erhalte ich

$$\operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu}\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}=-\frac{U_\nu(\xi)X_\nu(x)}{2\alpha_\nu(\alpha_\nu+\varkappa)}.$$

Durch Zusammenfassung je zweier Residuen für $z=+\alpha_\nu$ und $z=-\alpha_\nu$ ergibt sich

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu}\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}+\operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu}\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}=-\frac{U_\nu(\xi)X_\nu(x)}{\alpha_\nu^2-\varkappa^2}.$$

Man erhält demnach

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_n}\frac{f_1(z)\,dz}{z(z-\varkappa)}=G(x,\xi;\varkappa)-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{U_\nu(\xi)X_\nu(x)}{\alpha_\nu^2-\varkappa^2}.$$

Im Falle $x>\xi$ sei

$$\frac{f_2(z)}{z(z-\varkappa)}=\frac{h\cos z\xi+\cos z\xi\{(z^2q^2-h)\cos z(1-x)+zq^2h\sin z(1-x)\}}{z\cdot\omega(z)\cdot(z-\varkappa)}.$$

Es ist

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{f_2(z)}{z(z-\varkappa)}=0,\qquad\operatorname*{Res}_{z=\varkappa}\frac{f_2(z)}{z(z-\varkappa)}=G(x,\xi;\varkappa).$$

Da, abgesehen vom ersten Summanden, $f_2(z)$ aus $f_1(z)$ durch Ver-

tauschung von x und ξ hervorgeht, findet man im Falle $x > \xi$ für $z = \alpha_\nu$ dasselbe Residuum wie im Falle $x < \xi$. Es wird also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_n}\frac{f_2(z)\,dz}{z(z-\varkappa)} = \underset{x>\xi}{G(x,\xi;\varkappa)} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{U_\nu(\xi)\,X_\nu(x)}{\alpha_\nu^2-\varkappa^2}.$$

Wir lassen nun die Integrationskontur immer weiter anwachsen und erhalten in der Grenze

$$\underset{x<\xi}{G(x,\xi)} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{U_\nu(\xi)\,X_\nu(x)}{\lambda_\nu} + \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_{R_n}\frac{f_1(z)\,dz}{z(z-\varkappa)}. \tag{24}$$

Eine entsprechende Formel gilt für den Fall $x > \xi$.

Die bilineare Entwicklung des Kernes ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß $|f_1(z)|$ und $|f_2(z)|$ auf großen Konturen beschränkt sind; denn dann ist

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_n}\frac{f_1(z)\,dz}{z(z-\varkappa)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{R_n}\frac{f_2(z)\,dz}{z(z-\varkappa)} = 0. \tag{25}$$

Wir schätzen zunächst $f_1(z)$ ab. Es war

$$f_1(z) = \frac{h\cos z\xi + \cos zx\,\{(z^2q^2-h)\cos z(1-\xi) + zq^2h\sin z(1-\xi)\}}{\omega(z)}.$$

Bezeichnen wir den Zähler von $f_1(z)$ mit $Z_1(z)$, so ist

$$|Z_1(z)| < h|\cos z\xi|$$
$$+|\cos zx|\cdot\{h|\cos z(1-\xi)|+|z^2|q^2|\cos z(1-\xi)|+|z|q^2h|\sin z(1-\xi)|\}.$$

Nun ist

$$|\sin(u+iv)| = \sqrt{\sin^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v} \leqq \sqrt{1+\mathfrak{Sin}^2 v},$$
$$|\cos(u+iv)| = \sqrt{\cos^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v} \leqq \sqrt{1+\mathfrak{Sin}^2 v},$$

d. h.

$$|\sin z| < \mathfrak{Cof}\,v, \quad |\cos z| < \mathfrak{Cof}\,v, \quad |\sin z| \geqq |\mathfrak{Sin}\,v|. \tag{26), (27), (28)}$$

Mit Benutzung von (26) und (27) erhält man die Ungleichung

$$|Z_1(z)| \leqq h\,\mathfrak{Cof}\,v\xi + \mathfrak{Cof}\,vx\,\mathfrak{Cof}\,v(1-\xi)(h+|z^2|q^2+|z|q^2h).$$

Wenn $|z| > 1$ gewählt wird, ist

$$h < h|z^2|, \qquad |z|q^2h < |z^2|q^2h;$$

also

$$|Z_1(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\,v\xi + \mathfrak{Cof}\,vx\,\mathfrak{Cof}\,v(1-\xi)\cdot|z^2|(h+q^2+hq^2).$$

Wegen $\xi \leqq 1$ ist

$$\mathfrak{Cof}\,v\xi \leqq \mathfrak{Cof}\,v.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{Cof}\,vx\,\mathfrak{Cof}\,v(1-\xi) = \frac{1}{2}[\mathfrak{Cof}\,v(x+1-\xi) + \mathfrak{Cof}\,v(x-1+\xi)].$$

Wegen $x \leqq \xi$ ist $x+1-\xi \leqq 1$, $x-1+\xi \leqq 2\xi-1 \leqq 1$. Es ist demnach

$$\mathfrak{Cof}\, v x\, \mathfrak{Cof}\, v(1-\xi) \leqq \left[\frac{1}{2}(\mathfrak{Cof}\, v + \mathfrak{Cof}\, v) = \mathfrak{Cof}\, v\right].$$

Setzen wir diese Abschätzungen ein, so wird

$$|Z_1(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\, v + |z^2|(h+q^2+hq^2)\,\mathfrak{Cof}\, v. \tag{29}$$

Wir schätzen nun den Nenner $\omega(z)$ von $f_1(z)$ ab, zunächst auf den Vertikalseiten des Rechtecks R_n; wir nehmen an, daß diese durch die Punkte $\pm(n+\frac{1}{2})\pi$ der u-Achse hindurchgehen, dann ist

$$\begin{aligned}|\omega(z)| &= |(h-z^2q^2)\sin z + zq^2h\cos z| \\ &> \big||\sin z|\,|q^2z^2-h| - |z|\,q^2h\,|\sqrt{\cos^2 u+\mathfrak{Sin}^2 v}|\big|.\end{aligned}$$

Wegen $u=\pm(n+\frac{1}{2})\pi$ ist $\cos u=0$, $|\sin z|=\mathfrak{Cof}\, v$, $|\cos z|=|\mathfrak{Sin}\, v|$,

$$\begin{aligned}|\omega(z)| &> \big|\mathfrak{Cof}\, v\cdot|q^2z^2-h| - |z|\,q^2h\,|\mathfrak{Sin}\, v|\big| \\ &> |z^2|\cdot\mathfrak{Cof}\, v\left|\left|q^2-\frac{h}{z^2}\right| - \frac{q^2h\,|\mathfrak{Tg}\, v|}{|z|}\right|.\end{aligned}$$

Für hinreichend große Werte von u ist der Minuendus größer als der Subtrahendus, so daß wir die Absolutstriche der Differenz weglassen dürfen. Wir verkleinern die Differenz, indem wir den Minuendus verkleinern und den Subtrahendus vergrößern, dabei aber darauf achten, daß die Differenz stets positiv bleibt, was durch hinreichend große Wahl von u und damit von $|z|$ zu ermöglichen ist. Es wird dann also

$$|\omega(z)| > |z^2|\,\mathfrak{Cof}\, v\left\{q^2-\frac{h}{|z^2|}-\frac{q^2h}{|z|}\right\}. \tag{30}$$

Die Gleichungen (29) und (30) ergeben jetzt für die Vertikalseiten

$$|f_1(z)| < \frac{\frac{h}{|z^2|}+(h+q^2+hq^2)}{q^2-\frac{h}{|z^2|}-\frac{q^2h}{|z|}}.$$

Hieraus folgt, daß bei hinreichend großer Wahl von u $f_1(z)$ auf den Vertikalseiten beschränkt ist.

Auf den beiden Horizontalseiten ist

$$|\omega(z)| > |z^2|\cdot\left||\sin z|\left|q^2-\frac{h}{z^2}\right| - \frac{q^2h\,|\sqrt{\cos^2 u+\mathfrak{Sin}^2 v}|}{|z|}\right|.$$

Wir verkleinern wieder den Minuendus und vergrößern den Subtrahendus, lassen dabei aber die Differenz stets positiv bleiben.

Mit Benutzung von (27) und (28) erhalten wir

$$|\omega(z)| > |z^2|\,\mathfrak{Cof}\, v\left\{\left|q^2-\frac{h}{z^2}\right||\mathfrak{Tg}\, v| - \frac{q^2h}{|z|}\right\}. \tag{31}$$

Nach (29) und (31) ist also auf den Horizontalseiten von R_n

$$|f_1(z)| < \frac{\frac{h}{|z^2|}+(h+q^2+hq^2)}{\left|q^2-\frac{h}{z^2}\right|\,|\mathfrak{Tg}\,v|-\frac{q^2h}{|z|}} < \frac{\frac{h}{|z^2|}+(h+q^2+hq^2)}{q^2\,|\mathfrak{Tg}\,v|-\frac{h}{|z^2|}-\frac{q^2h}{|z|}}.$$

Wenn $|v|$, also auch $|z|$ hinreichend groß ist, folgt hieraus, daß $|f_1(z)|$ auch auf den Horizontalseiten von R_n beschränkt ist.

Wir wollen dasselbe für

$$f_2(z)=\frac{h\cos z\xi+\cos z\xi\,\{(z^2q^2-h)\cos z(1-x)+zq^2h\sin z(1-x)\}}{\omega(z)}$$

beweisen. Der Nenner $\omega(z)$ ist bereits abgeschätzt. Wenn $Z_2(z)$ den Zähler von $f_2(z)$ bedeutet, erhalten wir wie bei $f_1(z)$

$$|Z_2(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\,v\xi+\mathfrak{Cof}\,v\xi\,\mathfrak{Cof}\,v(1-x)\{h+|z^2|q^2+|z|q^2h\}.$$

Für $|z|>1$ ist wieder $h<h|z^2|$, $|z|q^2h<|z^2|q^2h$, also

$$|Z_2(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\,v\xi+|z^2|\,\mathfrak{Cof}\,v\xi\,\mathfrak{Cof}\,v(1-x)\cdot(h+q^2+hq^2).$$

Wegen $\xi\leqq 1$ ist $\mathfrak{Cof}\,v\xi\leqq\mathfrak{Cof}\,v$; ferner ist

$$\mathfrak{Cof}\,v\xi\,\mathfrak{Cof}\,v(1-x)=\frac{1}{2}\{\mathfrak{Cof}\,v(\xi+1-x)+\mathfrak{Cof}\,v(\xi-1+x)\}.$$

Da jetzt $x\geqq\xi$ ist, ist $\xi+1-x\leqq 1$, $\xi-1+x\leqq 1$, also

$$\mathfrak{Cof}\,v(\xi+1-x)\leqq\mathfrak{Cof}\,v,\qquad \mathfrak{Cof}\,v(\xi-1+x)\leqq\mathfrak{Cof}\,v,$$
$$\mathfrak{Cof}\,v\xi\,\mathfrak{Cof}\,v(1-x)<\mathfrak{Cof}\,v.$$

Durch Einsetzen dieser Abschätzungen folgt die Ungleichung

$$|Z_2(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\,v+|z^2|\cdot(h+q^2+hq^2)\,\mathfrak{Cof}\,v.$$

Wir sind also zu derselben Schranke gelangt wie bei $|Z_1(z)|$; es ist also sowohl auf den Horizontalseiten als auch auf den Vertikalseiten von R_n $f_2(z)$ auf großen Konturen beschränkt. Es gelten demnach die Gleichungen (25), womit (24) übergeht in

$$G(x,\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{U_\nu(\xi)\,X_\nu(x)}{\lambda_\nu}. \tag{32}$$

Damit ist die bilineare Formel bewiesen. Wir wollen zeigen, daß die Reihe auf der rechten Seite von (32) gleichmäßig konvergiert. Für große Werte $\alpha_n=n\pi+\varepsilon_n$ ist

$$\sin(n\pi+\varepsilon_n)=(-1)^n\sin\varepsilon_n,\qquad \cos(n\pi+\varepsilon_n)=(-1)^n\cos\varepsilon_n,$$

also

$$\sin\alpha_n\,\omega'(\alpha_n)=-\alpha_n^3q^2\sin\varepsilon_n\cos\varepsilon_n-\alpha_nq^2(h+2)\sin^2\varepsilon_n$$
$$+(q^2+1)h\sin\varepsilon_n\cos\varepsilon_n.$$

Diese Gleichung können wir mit Benutzung der aus Gleichung (5) folgenden Relation

$$\alpha_n^2 q^2 \sin \alpha_n = \alpha_n q^2 h \cos \alpha_n + h \sin \alpha_n$$

umformen in

$$\sin \alpha_n \cdot \omega'(\alpha_n) = -\alpha_n q^2 (h + 2 \sin^2 \varepsilon_n) + q^2 h \sin \varepsilon_n \cos \varepsilon_n .$$

Für große α_n, d. h. kleine ε_n ist nun das erste Glied der rechten Seite groß, das zweite Glied ist klein. Es ist also dann $\frac{1}{\sin \alpha_n \omega'(\alpha_n)}$ und wegen (14) auch C_n klein. Alle C_n sind beschränkt, unterhalb einer endlichen Schranke gelegen. Wenn wir das Liouvillesche Zeichen Ψ für eine beschränkte Größe einführen, ist also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{U_\nu(\xi) X_\nu(x)}{\lambda_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Psi}{\alpha_\nu^2 - \varkappa^2} .$$

Da die Wurzeln α_ν im wesentlichen wie die natürlichen Zahlen fortschreiten, konvergiert diese Reihe absolut und gleichmäßig.

Entwicklung quellenmäßiger Funktionen. — Da der Kern $G(x, \xi)$ unsymmetrisch ist, können wir quellenmäßige Funktionen erster und zweiter Art[5]) definieren.

a) Wir setzen an

$$F(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi .$$

Wegen (17) und (18) ist auch

$$F'(0) = 0 ; \qquad F'(1) + h F(1) = 0 ,$$

$$F''(x) = \int_0^1 G''(x, \xi) f(\xi) \, d\xi - f(x) .$$

Nun ist

$$G''(x, \xi) + \varkappa^2 G(x, \xi) = \varkappa^2 M = \frac{h}{q^2} G(1, \xi) ,$$

also ist

$$F''(x) = -\varkappa^2 \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi + \frac{h}{q^2} \int_0^1 G(1, \xi) f(\xi) \, d\xi - f(x)$$

$$= -\varkappa^2 F(x) + \frac{h}{q^2} F(1) - f(x) .$$

Die Differentialgleichung der quellenmäßigen Funktionen erster Art ist also

$$F''(x) + \varkappa^2 F(x) - \frac{h}{q^2} F(1) = -f(x) .$$

---

[5]) Vgl. Kneser, a. a. O. § 47.

Es sei nun Φ eine Funktion, welche die Randbedingungen

(33), (34) $$\Phi'(0)=0, \quad \Phi'(1)+h\Phi(1)=0$$

erfüllt und selbst mit der ersten Ableitung stetig ist, während die zweite Ableitung nur stückweise stetig zu sein braucht. Wir definieren dann die Funktion $f(\xi)$ durch die Gleichung

$$\Phi''(\xi)+\varkappa^2\Phi(\xi)-\frac{h}{q^2}\Phi(1)=-f(\xi).$$

In Punkten, wo Φ'' unstetig ist, ist $f(\xi)$ nicht definiert. Mit dieser Gleichung kombinieren wir die Differentialgleichung (20) des Kernes und gelangen unter Verwendung von (21), (22), (23), (33) und (34) zur quellenmäßigen Darstellung

$$\Phi(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

b) Die quellenmäßigen Funktionen zweiter Art definieren wir durch die Gleichung

$$F(\xi)=\int_0^1 G(x,\xi)f(x)\,dx.$$

Wegen (22) und (23) bestehen die Gleichungen

$$F'(0)=0, \quad F(1)+\frac{1}{h}F'(1)=-\frac{1}{q^2}\int_0^1 F(\xi)\,d\xi.$$

Auf demselben Wege wie oben finden wir die Differentialgleichung

$$F''(\xi)+\varkappa^2 F(\xi)=-f(\xi).$$

Es sei umgekehrt $\Phi(x)$ eine mit der ersten Ableitung stetige Funktion und erfülle die Randbedingungen

(35), (36) $$\Phi'(0)=0, \quad \Phi(1)+\frac{1}{h}\Phi'(1)=-\frac{1}{q^2}\int_0^1 \Phi(x)\,dx.$$

Definiert man $f(x)$ durch

$$\Phi''(x)+\varkappa^2\Phi(x)=-f(x),$$

und kombiniert man diese Gleichung mit der Gleichung

$$G''(x,\xi)+\varkappa^2 G(x,\xi)=\frac{h}{q^2}G(1,\xi),$$

so gelangt man durch das bekannte Verfahren unter Benutzung von (16), (17), (18), (35) und (36) zur quellenmäßigen Darstellung

$$\Phi(\xi)=\int_0^1 G(x,\xi)f(x)\,dx.$$

In die unter a) und b) erhaltenen quellenmäßigen Darstellungen von Φ können wir nun für $G(x,\xi)$ die bilineare Entwicklung (32) einsetzen, können wegen der gleichmäßigen Konvergenz der bilinearen Reihe gliedweise integrieren und erhalten so die Fouriersche Entwicklung einer quellenmäßigen Funktion Φ nach den X_ν bzw. U_ν. Die hierbei auftretenden konstanten Koeffizienten sind vermöge der quellenmäßigen Darstellung von Φ und der Integralgleichungen für U_ν bzw. X_ν leicht mit denjenigen Ausdrücken zu identifizieren, die man durch die Fouriersche Art der Koeffizientenbestimmung erhält.

Entwicklung nicht quellenmäßiger Funktionen. Zu diesem Zwecke untersuchen wir die an der Stelle $x=\xi$ unstetige Ableitung des Kernes

$$\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)U_n'(\xi)}{\lambda_n}.$$

Wo die rechts stehende Summe sich als gleichmäßig konvergent erweisen wird, ist die gliedweise Differentiation erlaubt.

$$\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\sin\alpha_n\xi\cdot 2h\{\alpha_n q^2\cos\alpha_n x+\sin\alpha_n\}}{\sin\alpha_n\,\omega'(\alpha_n)\cdot(\alpha_n^2-\varkappa^2)}.$$

Es bestehen nun, wenn wir uns des Liouvilleschen Zeichens Ψ für eine beschränkte Größe bedienen, folgende asymptotischen Darstellungen:

$$\alpha_n=n\pi+\frac{\Psi}{n},\quad \sin\alpha_n x=\sin n\pi x+\frac{\Psi}{n},\quad \cos\alpha_n x=\cos n\pi x+\frac{\Psi}{n},$$

$$\sin\alpha_n=\frac{\Psi}{n},\quad \cos\alpha_n=(-1)^n+\frac{\Psi}{n},\quad \alpha_n^2=n^2\pi^2+\Psi+\frac{\Psi}{n},$$

$$\sin\alpha_n\omega'(\alpha_n)=n\left(\Psi+\frac{\Psi}{n}\right).$$

$$\alpha_n=n\pi+\frac{\Psi}{n}=n\left(\Psi+\frac{\Psi}{n^2}\right),\quad\text{also}\quad\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{n}\left(\Psi+\frac{\Psi}{n^2}\right),\quad\text{also}$$

$$\frac{\sin\alpha_n\omega'(\alpha_n)}{\alpha_n}=\text{konst.}\left(1+\frac{\Psi}{n}\right).$$

$$\frac{\sin\alpha_n\cdot\omega'(\alpha_n)\cdot(\alpha_n^2-\varkappa^2)}{\alpha_n}=\text{konst.}\left(1+\frac{\Psi}{n}\right)\left(n^2\pi^2-\varkappa^2+\Psi+\frac{\Psi}{n}\right)$$

$$=\text{konst.}\,(n^2\pi^2-\varkappa^2)\left(1+\frac{\Psi}{n}\right).$$

$$\frac{\alpha_n h}{\sin\alpha_n\cdot\omega'(\alpha_n)\cdot(\alpha_n^2-\varkappa^2)}=\frac{A\left(1+\frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2-\varkappa^2},$$

wo A eine Konstante ist. Es wird also zunächst

$$\frac{\partial G}{\partial\xi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\alpha_n\xi\cdot\{\alpha_n q^2\cos\alpha_n x+\sin\alpha_n\}\,A\left(1+\frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2-\varkappa^2}.$$

Ferner ist

$$\sin \alpha_n \xi = \sin n\pi\xi + \frac{\Psi}{n},$$

$$\alpha_n q^2 \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n = q^2 \left(n\pi + \frac{\Psi}{n}\right)\left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) + \frac{\Psi}{n}$$

$$= (q^2 n\pi \cos n\pi x + \Psi)\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right).$$

Es wird also

$$\sin \alpha_n \xi \cdot (\alpha_n q^2 \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n)$$

$$= q^2 n\pi \left(\sin n\pi\xi + \frac{\Psi}{n}\right)\left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right)\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right).$$

Damit erhalten wir die asymptotische Darstellung

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi \left(\sin n\pi\xi + \frac{\Psi}{n}\right)\left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi \sin n\pi\xi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi\Psi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2}.$$

Die zweite Summe konvergiert überall absolut und gleichmäßig; wir können uns also auf die Untersuchung der ersten Summe beschränken.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi \sin n\pi\xi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi\xi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varkappa^2 \sin n\pi\xi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n\pi(n^2\pi^2 - \varkappa^2)}$$

Die zweite Summe konvergiert wieder gleichmäßig. Die erste Summe kann durch Auflösung der beiden Klammern in vier Summen zerlegt werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi\xi \cos n\pi x \cdot A'}{n\pi} + \text{drei weiteren Summen.}$$

Die drei letzten Summen konvergieren wieder gleichmäßig; es bleibt also nur zu untersuchen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi\xi \cos n\pi x}{n\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(x+\xi)}{n\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(x-\xi)}{n\pi}.$$

Nun ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}$ gleichmäßig konvergent für $0 < t < 2\pi$.

Daher konvergieren die beiden letzten Summen gleichmäßig im Intervall 0 bis 2 mit Ausnahme der Endpunkte 0 und 2; es sind also auszuschließen die Fälle

1. $x+\xi=0$; 2. $x-\xi=0$; 3. $x+\xi=2$; 4. $x-\xi=2$.

Der Fall 4 kommt wegen $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq\xi\leqq 1$ nicht in Frage. Die drei anderen Fälle ergeben, daß folgende Systeme auszuschließen sind:

$$x=\xi=0, \qquad x=\xi, \qquad x=\xi=1.$$

In diesen Punkten ist der Reihenwert wegen der bekannten Gibbsschen Erscheinung das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial G}{\partial\xi}(\xi-0,\xi)+\frac{\partial G}{\partial\xi}(\xi+0,\xi)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n'(\xi)X_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Mit Hilfe dieser unstetigen, nach den X_ν entwickelten Funktion $\frac{dG}{d\xi}$ zeigt man nach der Kneserschen[6]) Methode, daß sich auch unstetige, die Randbedingungen verletzende Funktionen nach den X_ν in eine Fouriersche Reihe entwickeln lassen.

Damit ist das Entwicklungsproblem für den Stab, der den thermischen Randbedingungen (3), (4) unterworfen ist, und dessen Enden fest sind, vollkommen gelöst.

§ 3.

Integration der verallgemeinerten thermoelastischen Differentialgleichungen.

Verallgemeinert man die Gleichungen (1), (2), (3) des § 1 auf k Dimensionen, so geht zwar für $k>3$ ihre physikalische Bedeutung verloren, wir wollen aber auch dann die physikalische Ausdrucksweise beibehalten.

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die unabhängigen Variablen, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ die zugehörigen Verschiebungen. Ferner setzen wir

$$\theta=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \qquad \Delta V=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}, \qquad \Delta u_j=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}.$$

Wenn wir wie beim Stabe von äußeren Kräften absehen und die Differentialgleichungen in der Gleichgewichtsform ansetzen, lauten die zu integrierenden verallgemeinerten Gleichungen (1), (2) des § 1 folgendermaßen:

---

[6]) Vgl. Kneser, a. a. O. § 5.

$$(1) \qquad p\frac{\partial V}{\partial x_i} = (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta V - b^2 \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

Ist

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}, \qquad \cos(n, x_i) = \frac{x_i}{r},$$

so setzen wir als sinngemäße Verallgemeinerung der Gleichungen § 1 (3) folgende Ausdrücke für die Spannungskomponenten an der Oberfläche an:

$$(3) \qquad X_j^n = \left\{\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - pV\right\}\cos(n, x_j) + \mu \sum_{i=1}^{k}{}' \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\cos(n, x_i)$$
$$+ \mu \sum_{i=1}^{k}{}' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cos(n, x_i), \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Der Strich an den Summenzeichen in (3) soll bedeuten, daß bei der Summation der Wert $i = j$ auszulassen ist.

Die Integration des Systems (1), (2) geschieht in Anlehnung an die von Jaroschek für die Kreisscheibe ($k = 2$) durchgeführte Integration der thermoelastischen Differentialgleichungen. Wir nehmen an, daß die Temperatur V nur eine Funktion von t und $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ sei. Ferner sollen die elastischen Verschiebungen nur in Richtung des Radiusvektors r erfolgen. Unter diesen Voraussetzungen können wir die k Gleichungen (1) zu einer einzigen zusammenfassen, in der als unabhängige Variable nur r und t vorkommen; ebenso können wir Gleichung (2) auf die neuen Koordinaten transformieren.

Wenn wir (1) mit x_i multiplizieren und dann über i von 1 bis k summieren, entsteht aus den k Gleichungen (1) unter Beachtung von

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

die Gleichung

$$(4) \qquad pr\frac{\partial V}{\partial r} = (\lambda+\mu) r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mu \sum_{i=1}^{k} x_i \Delta u_i.$$

Wir setzen nun an

$$u_i = R \cdot \cos\varphi_i = R \cdot \frac{x_i}{r} = S \cdot x_i,$$

wo R und S nur von r und t abhängige Funktionen sind. Dann wird

$$\theta = kS + r\frac{\partial S}{\partial r}.$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \Delta u_j = r^2 \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + (k+1) r \frac{\partial S}{\partial r} = r\frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

Gleichung (4) geht dann über in

$$p\frac{\partial V}{\partial r}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(kS+r\frac{\partial S}{\partial r}\right). \tag{5}$$

Gleichung (2) nimmt nach der Transformation folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r}+\frac{k-1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right)-b^2\left(k\frac{\partial S}{\partial t}+r\frac{\partial^2 S}{\partial r\,\partial t}\right). \tag{6}$$

Die Spannungskomponenten (3) transformieren sich in

$$X^n=\sqrt{\sum_j (X_j^n)^2}=(k\lambda+2\mu)S+(\lambda+2\mu)r\frac{\partial S}{\partial r}-pV. \tag{7}$$

In (5), (6), (7) bedeutet k zunächst eine positive Zahl. Nachdem wir aber die Transformation von (1), (2), (3) in (5), (6), (7) vollzogen haben, können wir in den letzten drei Gleichungen und ebenso in allen folgenden Gleichungen k auch jeden beliebigen positiven Wert erteilen.

Aus (5) und (6) wollen wir nun zwei Differentialgleichungen herstellen, in denen nur V bzw. S allein als abhängige Veränderliche auftreten. Aus (5) folgt durch Integration

$$pV=(\lambda+2\mu)\left(kS+r\frac{\partial S}{\partial r}+T(t)\cdot\gamma\right), \tag{8}$$

wo $T(t)\cdot\gamma$ die Integrationskonstante ist. T sei eine Funktion von t, γ eine absolute Konstante. Setzen wir

$$U=kS+r\frac{\partial S}{\partial r},$$

so folgt aus (8)

$$U=\frac{pV}{\lambda+2\mu}-T\cdot\gamma,$$

womit (6) in folgende Differentialgleichung für V allein übergeht:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial r^2}+\frac{k-1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right)-\frac{b^2 p}{\lambda+2\mu}\frac{\partial V}{\partial t}+b^2\gamma\frac{dT}{dt}.$$

Durch die Bernoullische Substitution

$$V(r,t)=L(r)\cdot T(t)$$

gelingt die Separierung dieser Differentialgleichung; man bekommt, wenn man

$$\lambda+2\mu+pb^2=q^2 \tag{9}$$

setzt,

$$\frac{T'}{a^2(\lambda+2\mu)T}=\frac{L''+\frac{k-1}{r}L'}{q^2L-b^2(\lambda+2\mu)\gamma}=-\alpha^2.$$

Hieraus folgt, wenn man von einer Konstanten absieht:

$$T(t)=e^{-\alpha^2 a^2(\lambda+2\mu)t}.$$

Ferner erhält man für L die Differentialgleichung

$$(10) \qquad r L'' + (k-1) L' + \alpha^2 r \{q^2 L - b^2 (\lambda + 2\mu) \gamma\} = 0 .$$

Eine analoge Differentialgleichung wollen wir für die elastischen Eigenfunktionen herstellen. Gleichung (8) kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$V = \frac{\lambda + 2\mu}{p} (U + T \cdot \gamma).$$

Diesen Wert setze ich in (6) ein:

$$(11) \qquad \frac{\lambda + 2\mu}{p} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + T' \cdot \gamma \right) = \frac{a^2 (\lambda + 2\mu)}{p} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{k-1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - b^2 \frac{\partial U}{\partial t} .$$

Wir setzen nun an

$$S(r, t) = N(r) \cdot T(t).$$

Dann ist

$$U = kS + r \frac{\partial S}{\partial r} = T \left(kN + r \frac{dN}{dr} \right) = M(r) \cdot T,$$

wo

$$M(r) = kN + r \frac{dN}{dr}$$

gesetzt ist. Es ist

$$r^{k-1} M = k r^{k-1} N + r^k \frac{dN}{dr} = \frac{d}{dr} \left(r^k N \right),$$

$$(12) \qquad N(r) = \frac{1}{r^k} \int_0^r r^{k-1} M(r) \, dr .$$

Setze ich $U = M \cdot T$ in (11) ein, so kann ich wieder separieren:

$$\frac{T'}{a^2 (\lambda + 2\mu) T} = \frac{M'' + \frac{k-1}{r} M'}{q^2 M + (\lambda + 2\mu) \gamma} = -\alpha^2 .$$

Für T erhält man hieraus denselben Wert wie oben, für M ergibt sich die Differentialgleichung

$$(13) \qquad r M'' + (k-1) M' + \alpha^2 r \{q^2 M + (\lambda + 2\mu) \gamma\} = 0 .$$

Die Integration des Systems (1), (2) ist damit auf die Integration der beiden Gleichungen (10) und (13) zurückgeführt, die denselben Bau haben.

Setze ich in (10)

$$q^2 L - b^2 (\lambda + 2\mu) \gamma = L_0 , \qquad \alpha q r = r_1 ,$$

so geht (10) über in

$$\frac{d^2 L_0}{d r_1^2} + \frac{k-1}{r_1} \frac{d L_0}{d r_1} + L_0 = 0 .$$

Diese Gleichung ordnet sich der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x} y' + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

unter, deren allgemeine Lösung [7])

$$y = x^\alpha [c_1 J_\nu(\beta x) + c_2 Y_\nu(\beta x)]$$

ist, wo J und Y die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art sind [8]). Es wird demnach

$$L_0(r_1) = r_1^{1-\frac{k}{2}} \left\{ c_1 J_{\frac{k}{2}-1}(r_1) + c_2 Y_{\frac{k}{2}-1}(r_1) \right\}.$$

Genau so kann man mit (13) verfahren. Die allgemeinen Lösungen von (10) und (13) sind also

$$(14) \quad L(\alpha q r) = (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} \left\{ c_1 J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + c_2 Y_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) \right\} + \frac{\lambda + 2\mu}{q^2} b^2 \gamma,$$

$$(15) \quad M(\alpha q r) = (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} \left\{ c_3 J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + c_4 Y_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) \right\} - \frac{\lambda + 2\mu}{q^2} \gamma.$$

Die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3, c_4 und γ lassen sich vermöge der aus (8) folgenden Gleichung

$$(16) \qquad pL = (\lambda + 2\mu)(M + \gamma)$$

auf vier Konstanten zurückführen. Setze ich den Wert (15) für M in (12) ein, so kann ich mit Hilfe der Gleichung

$$\int_0^x u^{\nu+1} J_\nu(u)\, du = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \qquad (\nu > -1)$$

das Integral in (12) ausrechnen. Es wird

$$(17) \quad N(\alpha q r) = c_3 (\alpha q r)^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q r) + c_4 (\alpha q r)^{-\frac{k}{2}} Y_{\frac{k}{2}}(\alpha q r) - \frac{\lambda + 2\mu}{k q^2} \gamma.$$

Die Konstanten sind durch die Randbedingungen zu bestimmen. Wir wollen stets voraussetzen, daß V und S für $r = 0$ endlich sind, also

$$(18), (19) \qquad L(0) = \text{fin.}, \qquad N(0) = \text{fin.}$$

Dann muß, wenn

$$k \geq 2$$

angenommen wird,

$$(20) \qquad c_2 = c_4 = 0$$

---

[7]) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln (1923), S. 166.

[8]) Wir benutzen P. Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen (1908).

sein. Wegen (20) gehen (14), (15) und (17) über in

$$L(\alpha q r) = c_1 (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + \frac{\lambda+2\mu}{q^2} b^2 \gamma, \tag{21}$$

$$M(\alpha q r) = c_3 (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) - \frac{\lambda+2\mu}{q^2} \gamma, \tag{22}$$

$$N(\alpha q r) = c_3 (\alpha q r)^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q r) - \frac{\lambda+2\mu}{k q^2} \gamma. \tag{23}$$

Durch Einsetzen von (21) und (22) in (16) findet man unter Beachtung von (9)

$$c_3 = \frac{p c_1}{\lambda+2\mu},$$

also wird aus (21), (22), (23)

$$L = c_1 (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + \frac{\lambda+2\mu}{q^2} b^2 \gamma, \tag{24}$$

$$M = \frac{p c_1}{\lambda+2\mu} (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) - \frac{\lambda+2\mu}{q^2} \gamma, \tag{25}$$

$$N = \frac{p c_1}{\lambda+2\mu} (\alpha q r)^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q r) - \frac{\lambda+2\mu}{k q^2} \gamma. \tag{26}$$

§ 4.

Kreisscheibe mit festem Rand, welcher auf der Temperatur Null gehalten wird.

Wie schon bemerkt, entsprechen die Formeln des vorigen Paragraphen für $k = 2$ dem Fall einer Kreisscheibe, welchen wir jetzt näher betrachten wollen.

Die Kreisscheibe habe den Radius $r = 1$. Die Randbedingungen sind

$$L(0) = \text{fin.}, \quad N(0) = \text{fin.}, \tag{1), (2)}$$

$$L(1) = 0, \quad N(1) = 0. \tag{3), (4)}$$

Nach § 3 (9), (12), (16) haben wir

$$q^2 = \lambda + 2\mu + p b^2, \tag{5}$$

$$N(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r M(r) dr, \tag{6}$$

$$pL = (\lambda + 2\mu)(M + \gamma). \tag{7}$$

Die Differentialgleichungen von L und M lauten nach § 3 (10) und (13):

$$rL'' + L' + \alpha^2 q^2 r L = \alpha^2 r b^2 (\lambda + 2\mu)\gamma, \tag{8}$$

$$rM'' + M' + \alpha^2 q^2 r M = -\alpha^2 r(\lambda + 2\mu)\gamma. \tag{9}$$

Wegen (1) und (2) erhält man nach § 3 (24), (25), (26):

$$L(\alpha q r) = c_1 J_0(\alpha q r) + \frac{\lambda + 2\mu}{q^2} b^2 \gamma, \tag{10}$$

$$M(\alpha q r) = \frac{p c_1}{\lambda + 2\mu} J_0(\alpha q r) - \frac{\lambda + 2\mu}{q^2}\gamma, \tag{11}$$

$$N(\alpha q r) = \frac{p c_1}{\lambda + 2\mu} \frac{J_1(\alpha q r)}{\alpha q r} - \frac{\lambda + 2\mu}{2q^2}\gamma. \tag{12}$$

Aus (7) folgt wegen der Randbedingung (3)

$$\gamma = -M(\alpha q). \tag{13}$$

Setzen wir in (11) $r = 1$, so wird nach (13) und (5)

$$\gamma = -\frac{c_1 q^2}{b^2(\lambda + 2\mu)} J_0(\alpha q), \tag{14}$$

d. h.

$$M(\alpha q) = \frac{c_1 q^2}{b^2(\lambda + 2\mu)} J_0(\alpha q). \tag{15}$$

Wegen (14) gehen die Gleichungen (10), (11), (12), wenn wir c_1 durch C ersetzen, über in

$$L = C\{J_0(\alpha q r) - J_0(\alpha q)\}, \tag{16}$$

$$M = C\left\{\frac{p}{\lambda + 2\mu} J_0(\alpha q r) + \frac{1}{b^2} J_0(\alpha q)\right\}, \tag{17}$$

$$N = C\left\{\frac{p}{\lambda + 2\mu} \frac{J_1(\alpha q r)}{\alpha q r} + \frac{1}{2b^2} J_0(\alpha q)\right\}. \tag{18}$$

Die Randbedingung (4) liefert, wenn in (18) $r = 1$ gesetzt wird, für die Größen α die transzendente Gleichung

$$\omega(\alpha) = \frac{p}{\lambda + 2\mu} \frac{J_1(\alpha q)}{\alpha q} + \frac{1}{2b^2} J_0(\alpha q) = 0. \tag{19}$$

Durch Multiplikation von L und N mit T erhalten wir nach § 3 V und S als Partikularlösungen der thermoelastischen Gleichungen für die Kreisscheibe.

Die Funktion M werden wir bei der Diskussion der transzendenten Gleichung (19) verwenden. Im folgenden soll untersucht werden, ob sich eine willkürliche Funktion nach den Eigenfunktionen L entwickeln läßt.

Ehe wir (19) diskutieren, wollen wir einige Hilfsformeln ableiten.

Wegen (13) können wir statt (8) und (9) schreiben:

$$r L'' + L' + \alpha^2 q^2 r L = -\alpha^2 r b^2 (\lambda + 2\mu) M(1), \tag{20}$$

$$r M'' + M' + \alpha^2 q^2 r M = \alpha^2 r (\lambda + 2\mu) M(1). \tag{21}$$

Gleichung (21) denken wir uns für zwei verschiedene Funktionen M_ν und M_σ gebildet und darauf die Greensche Operation angewandt. Integrieren wir dann nach r von 0 bis 1 und beachten, daß nach (4) und (6)

$$N(1) = \int_0^1 r M dr = 0$$

ist, so wird

$$r(M_\sigma M_\nu' - M_\nu M_\sigma')\Big|_0^1 + q^2(\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)\int_0^1 r M_\sigma M_\nu dr = 0. \tag{22}$$

Mit Benutzung von (19) und (15) und der Formel

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad \text{d. h. } J_0'(\alpha q r)\Big|^{r=1} = -\alpha q J_1(\alpha q)$$

wird

$$r(M_\sigma M_\nu' - M_\nu M_\sigma')\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)(\lambda + 2\mu) M_\sigma(1) M_\nu(1),$$

womit Gleichung (22) übergeht in

$$\int_0^1 r M_\nu M_\sigma dr = -\frac{\lambda + 2\mu}{2q^2} M_\nu(1) M_\sigma(1). \tag{23}$$

Integriert man (20) von 0 bis 1, so erhält man

$$(r L')\Big|_0^1 + \alpha^2 q^2 \int_0^1 r L dr = -b^2(\lambda + 2\mu)\frac{\alpha^2}{2} M(1).$$

Da nach (19) und (15)

$$L'(1) = \frac{(\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 M(1)}{2p}$$

ist, wird

$$\frac{(\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2}{2p} M(1) + \alpha^2 q^2 \int_0^1 r L dr = -b^2(\lambda + 2\mu)\frac{\alpha^2}{2} M(1),$$

oder mit Benutzung von (5):

$$\int_0^1 r L dr = -\frac{\lambda + 2\mu}{2p} M(1). \tag{24}$$

Verfährt man nun mit der Differentialgleichung (20) genau so wie mit (21), so gelangt man wegen (1), (3) und (24) zur Gleichung

$$(25) \qquad \int_0^1 r L_\nu L_\sigma dr = \frac{b^2(\lambda+2\mu)^2 M_\nu(1) M_\sigma(1)}{2 p q^2}.$$

Diskussion der transzendenten Gleichung. Gleichung (19) besitzt keine rein imaginären Wurzeln; wäre nämlich $\alpha = i\beta$ eine Wurzel, so würden die bekannten Reihenentwicklungen für $J_0(iq\beta)$ und $\frac{J_1(iq\beta)}{iq\beta}$ nur positive Glieder enthalten, die linke Seite von (19) würde dann nur positive Summanden enthalten, es kann daher nicht $\omega(i\beta) = 0$ werden.

Die Gleichung $\omega(\alpha) = 0$ besitzt auch keine komplexen Wurzeln, wie aus (23) folgt. Wären nämlich α_ν und α_σ zwei konjugiert komplexe Wurzeln, so wären M_ν und M_σ auch konjugiert komplex, also $M_\nu \cdot M_\sigma > 0$, die linke Seite von (23) wäre also positiv, die rechte Seite negativ, es gibt also keine komplexen Wurzeln von (19).

Die Gleichung $\omega(\alpha) = 0$ hat also nur reelle Wurzeln; $\alpha = 0$ ist keine Wurzel. Mit α ist auch $-\alpha$ eine Wurzel. Die Wurzeln sind die Schnittpunktsabszissen der beiden Kurven

$$(25a) \qquad y = \frac{p}{(\lambda+2\mu)\alpha q} J_1(\alpha q) \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{1}{2b^2} J_0(\alpha q).$$

Diese Kurven schneiden nun unendlich oft die reelle Achse, und zwischen zwei Nullstellen von J_0 liegt immer eine und nur eine Nullstelle von J_1. Wegen der Stetigkeit von y und η existieren unendlich viele Schnittpunkte, $\omega(\alpha) = 0$ besitzt also unendlich viele reelle Wurzeln. Für große Argumentwerte gelten für die Besselschen Funktionen J_0 und J_1 die asymptotischen Darstellungen

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \qquad J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad (x = \infty);$$

die Nullsteller von y sind also im wesentlichen die Größen $n\pi + \frac{\pi}{4}$, ebenso sind die Nullstellen von η die Größen $n\pi - \frac{\pi}{4}$. Da nun für große α y verschwindend klein gegen η ist, werden die Schnittpunkte der Kurven (25a) im wesentlichen mit den Nullstellen von η identisch sein, d. h. die Wurzeln von (19) werden dargestellt durch

$$(26) \qquad \alpha_n q = n\pi - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Aufstellung des Biorthogonalsystems und Normierung. Gleichung (25) zeigt, daß die L_ν kein Orthogonalsystem bilden; wohl aber

läßt sich zu den L_ν ein Biorthogonalsystem aufstellen. Mit Benutzung von (24) können wir der Gleichung (25) folgende Form geben:

$$\int_0^1 r L_\nu \left[L_\sigma + \frac{b^2(\lambda+2\mu)}{q^2} M_\sigma(1) \right] dr = 0.$$

Das System der Biorthogonalfunktionen ist also

$$X_\sigma = L_\sigma + \frac{b^2(\lambda+2\mu)}{q^2} M_\sigma(1)$$

oder nach (15) und (16)

$$X_\nu = C_\nu J_0(\alpha_\nu q r).$$

Die Differentialgleichung der X_ν lautet

$$r X_\nu'' + X_\nu' + \alpha_\nu^2 q^2 r X_\nu = 0. \tag{27}$$

Durch Integration von 0 bis 1 folgt hieraus

$$\int_0^1 r X_\nu \, dr = -\frac{X_\nu'(1)}{\alpha_\nu^2 q^2}. \tag{28}$$

Um zu normieren, setzen wir

$$X = C J_0(\beta q r),$$

wo β noch nicht die Gleichung (19) erfüllen soll. Verbinden wir die Differentialgleichungen

$$r L_\nu'' + L_\nu' + \alpha_\nu^2 q^2 r L_\nu + b^2(\lambda+2\mu)\alpha_\nu^2 r M_\nu(1) = 0,$$
$$r X'' + X' + \beta^2 q^2 r X = 0$$

durch die Greensche Operation und beachten (1), (3), (28), (15) und (19), so gelangen wir zur Gleichung

$$\int_0^1 r L_\nu(\alpha_\nu q r) X(\beta q r) dr = \frac{-J_0(\alpha_\nu q)\alpha_\nu^2 C C_\nu (\lambda+2\mu)\omega(\beta)}{p(\alpha_\nu^2 - \beta^2)}.$$

Hieraus finden wir durch den Grenzübergang $\beta = \alpha_\nu$ und durch Normierung

$$C_\nu^2 = \frac{2p}{\alpha_\nu(\lambda+2\mu)\omega'(\alpha_\nu) J_0(\alpha_\nu q)} = -\frac{q}{b^2 \omega'(\alpha_\nu) J_1(\alpha_\nu q)}. \tag{29}$$

Aufstellung der Integralgleichungen und des Kernes $G(r, \varrho)$. Wir definieren einen Kern $G(r, \varrho)$ durch die Differentialgleichung

$$r G''(r, \varrho) + G'(r, \varrho) + z^2 q^2 r G(r, \varrho) = 0. \tag{30}$$

Hierbei ist $\varkappa$ ein willkürlicher, von sämtlichen α_ν verschiedener Parameter. Ferner erfülle der Kern die drei Bedingungen

(31), (32) $$G(0,\varrho) = \text{fin.}, \quad (rG')\Big|_{r=\varrho+0}^{r=\varrho-0} = 1,$$

(33) $$\frac{(\lambda+2\mu)\,G(1,\varrho)}{2p} + b^2\int_0^1 rG(r,\varrho)\,dr = 0.$$

Durch Kombination der Differentialgleichungen (20) und (30) gelangt man dann unter Beachtung von (1), (3), (31), (32) und (33) zur Integralgleichung

$$L_\nu(\varrho) = \Lambda_\nu \int_0^1 rG(r,\varrho)\,L_\nu(r)\,dr,$$

wo

$$\Lambda_\nu = q^2(\alpha_\nu^2 - \varkappa^2)$$

gesetzt ist.

Mit Hilfe von (19) und (28) verifiziert man leicht, daß die Funktionen X_ν eine der Gleichung (33) analoge Randbedingung erfüllen:

(34) $$\frac{(\lambda+2\mu)\,X_\nu(1)}{2p} + b^2\int_0^1 rX_\nu\,dr = 0.$$

Ferner ist

(35) $$X_\nu(0) = \text{fin.}$$

Integriert man (30) von 0 bis 1, so wird wegen (31) und (32)

$$\int_0^1 rG(r,\varrho)\,dr = -\frac{1+G'(1,\varrho)}{\varkappa^2 q^2},$$

so daß (33) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

(36) $$\varkappa^2 q^2(\lambda+2\mu)\,G(1,\varrho) - 2pb^2(1+G'(1,\varrho)) = 0.$$

Für den Kern erhalten wir mit Beachtung von (31)

$$\underset{r<\varrho}{G(r,\varrho)} = C_1 J_0(\varkappa q r):$$

$$\underset{r>\varrho}{G(r,\varrho)} = C_2 J_0(\varkappa q r) + C_3 Y_0(\varkappa q r).$$

Die Stetigkeit von $G(r,\varrho)$ für $r=\varrho$ und die Gleichungen (32) und (36) liefern uns drei Bestimmungsgleichungen für C_1, C_2 und C_3:

(37) 1. $C_1 J_0(\varkappa q\varrho) - C_2 J_0(\varkappa q\varrho) - C_3 Y_0(\varkappa q\varrho) = 0,$

(38) 2. $\varrho\{C_1 J_0'(\varkappa q\varrho) - C_2 J_0'(\varkappa q\varrho) - C_3 Y_0'(\varkappa q\varrho)\} = 1,$

3. $C_2\{\varkappa q^2(\lambda+2\mu)J_0(\varkappa q) - 2pb^2 J_0'(\varkappa q r)\Big|^{r=1}\}$
$+ C_3\{\varkappa^2 q^2(\lambda+2\mu)Y_0(\varkappa q) - 2pb^2 Y_0'(\varkappa q r)\Big|^{r=1}\} = 2pb^2.$

Nun ist

$$J_0'(\varkappa q r)\big|^{r=1} = -\varkappa q J_1(\varkappa q), \qquad Y_0'(\varkappa q r)\big|^{r=1} = -\varkappa q Y_1(\varkappa q);$$

führen wir ein

$$\omega_1(\varkappa) = \frac{p}{\lambda+2\mu}\,\frac{Y_1(\varkappa q)}{\varkappa q} + \frac{1}{2b^2}\,Y_0(\varkappa q),$$

so kann die letzte Bestimmungsgleichung in folgender Form geschrieben werden:

$$(39)\quad C_2\cdot 2b^2\varkappa^2 q^2(\lambda+2\mu)\cdot\omega(\varkappa) + C_3\cdot 2b^2\varkappa^2 q^2(\lambda+2\mu)\cdot\omega_1(\varkappa) = 2pb^2.$$

Aus (37), (38), (39) sind mit Benutzung der Gleichung

$$Y_\nu(x)J_\nu'(x) - J_\nu(x)Y_\nu'(x) = \frac{2}{\pi x}$$

die Konstanten C_1, C_2 und C_3 zu berechnen. Führen wir noch ein

$$A(\varkappa) = \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\varkappa^2 q^2},$$

so erhalten wir für den Kern die Ausdrücke:

$$G\underset{r<\varrho}{(r,\varrho)} = \frac{-\{J_0(\varkappa q\varrho)\cdot\omega_1(\varkappa) - Y_0(\varkappa q\varrho)\,\omega(\varkappa)\} + A(\varkappa)}{\frac{2}{\pi}\,\omega(\varkappa)}\cdot J_0(\varkappa q r),$$

$$G\underset{r>\varrho}{(r,\varrho)} = \frac{\{-J_0(\varkappa q\varrho)\cdot\omega_1(\varkappa) + A(\varkappa)\}J_0(\varkappa q r) + J_0(\varkappa q\varrho)\,\omega(\varkappa)\,Y_0(\varkappa q r)}{\frac{2}{\pi}\,\omega(\varkappa)}.$$

Der Kern ist wegen des Auftretens von $A(\varkappa)$ unsymmetrisch. Als Funktion von ϱ erfüllt er die Differentialgleichung

$$\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial G}{\partial\varrho} + \varkappa^2 q^2\varrho G = \frac{A(\varkappa)\cdot\varkappa^2 q^2\varrho J_0(\varkappa q r)}{\frac{2}{\pi}\,\omega(\varkappa)} = \frac{p\varrho J_0(\varkappa q r)}{(\lambda+2\mu)\,\omega(\varkappa)}.$$

Durch Differentiation nach ϱ findet man

$$\frac{\partial G}{\partial\varrho}\bigg|^{\varrho=1} = -\frac{J_0(\varkappa q r)}{2b^2\omega(\varkappa)},$$

so daß wir schreiben können:

$$(40)\qquad \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial G}{\partial\varrho} + \varkappa^2 q^2\varrho G = -\frac{2pb^2\varrho}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial G}{\partial\varrho}(r,1).$$

Mit Benutzung der allgemeinen Relation

$$Y_\nu(x)J_{\nu-1}(x) - J_\nu(x)Y_{\nu-1}(x) = \frac{2}{\pi x}$$

findet man

$$(41)\qquad J_0(\varkappa q)\,\omega_1(\varkappa) - Y_0(\varkappa q)\cdot\omega(\varkappa) = \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\varkappa^2 q^2} = A(\varkappa).$$

Daher wird

$$G(r, 1) = 0. \tag{42}$$

Ferner ist

$$G(r, 0) = \text{fin.}, \quad \left(\varrho \frac{\partial G}{\partial \varrho}\right)\Big|_{\varrho=r+0}^{\varrho=r-0} = 1. \tag{43), (44}$$

Kombinieren wir nun die Differentialgleichungen (27) und (40), so gelangen wir mit Benutzung von (34), (35), (42), (43), (44) zur Integralgleichung

$$X_\nu(r) = \Lambda_\nu \int_0^1 \varrho\, G(r, \varrho)\, X_\nu(\varrho)\, d\varrho.$$

Die beiden Integralgleichungen für L_ν und X_ν stellen wir zusammen:

$$L_\nu(\varrho) = \Lambda_\nu \int_0^1 r\, G(r, \varrho)\, L_\nu(r)\, dr,$$

$$X_\nu(\varrho) = \Lambda_\nu \int_0^1 r\, G(\varrho, r)\, X_\nu(r)\, dr.$$

Beweis der bilinearen Formel. Wir wollen den Kern in Partialbrüche zerlegen. Für $r < \varrho$ definieren wir dann eine Funktion $f_1(z)$ durch

$$\frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{-J_0(zq\varrho)\,\omega_1(z) + Y_0(zq\varrho)\,\omega(z) + A(z)}{\frac{2}{\pi}\,\omega(z)\cdot(z-\varkappa)} \cdot J_0(zqr).$$

Die Stelle $z = 0$ ist kein Pol von $f_1(z)$. Fassen wir z als komplexe Veränderliche auf, so sind $z = \pm\alpha_\nu$ und $z = \varkappa$ die Pole der meromorphen Funktion $\frac{f_1(z)}{z-\varkappa}$.

$$\operatorname*{Res}_{z=\varkappa} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = G\underset{r<\varrho}{(r, \varrho; \varkappa)}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{\{-J_0(\alpha_\nu q\varrho)\,\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)\}\, J_0(\alpha_\nu qr)}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu-\varkappa)}.$$

Mit Benutzung von

$$Y_0(-x) = Y_0(x) - 2i\,J_0(x) \tag{44a}$$

und der transzendenten Gleichung (19) findet man $\omega_1(\alpha_\nu) = \omega_1(-\alpha_\nu)$, also

$$\operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{\{-J_0(\alpha_\nu q\varrho)\,\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)\}\, J_0(\alpha_\nu qr)}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu+\varkappa)},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} + \operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu} = \frac{2\alpha_\nu J_0(\alpha_\nu qr)\{-J_0(\alpha_\nu q\varrho)\,\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)\}}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu^2-\varkappa^2)}. \tag{45}$$

Setzen wir in (41) $\varkappa = \alpha_\nu$, so wird

$$\omega_1(\alpha_\nu) = \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\alpha_\nu^2 q^2 J_0(\alpha_\nu q)}.$$

Führen wir diesen Wert in (45) ein und beachten (29), so erhalten wir schließlich

$$\operatorname*{Res}_{z=a_\nu} + \operatorname*{Res}_{z=-a_\nu} = -\frac{X_\nu(r)\,L_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu}.$$

Im Falle $r > \varrho$ setzen wir

$$\frac{f_2(z)}{z-\varkappa} = \frac{\{-J_0(zq\varrho)\,\omega_1(z) + A(z)\}\,J_0(zqr) + J_0(zq\varrho)\cdot\omega(z)\,Y_0(zqr)}{\frac{2}{\pi}\,\omega(z)\cdot(z-\varkappa)}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\varkappa}\frac{f_2(z)}{z-\varkappa} = G(r,\varrho;\varkappa),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=a_\nu}\frac{f_2(z)}{z-\varkappa} = \frac{\{-J_0(\alpha_\nu q\varrho)\cdot\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)\}\,J_0(\alpha_\nu qr)}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu-\varkappa)}.$$

Es ergibt sich also derselbe Wert wie im Falle $r < \varrho$; die weitere Rechnung ist demnach dieselbe, und wir erhalten allgemein nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$(46)\qquad G(r,\varrho;\varkappa) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{X_\nu(\alpha_\nu qr)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{\Lambda_\nu} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{K}_n}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa}.$$

Zur Abschätzung des Konturintegrals gebrauchen wir folgende von Freund[9]) bewiesenen Gleichungen:

$$(47)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{K}_n}\frac{e^{\alpha z}R(z)}{e^z - S(z)}\cdot\frac{dz}{z-\varkappa} = 0,\quad \text{für}\quad 0 \leqq \alpha < 1,$$

$$(48)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{K}_n}\frac{e^{\beta z}R(z)}{e^z - S(z)}\,\frac{dz}{z^k(z-\varkappa)} = 0,\quad \text{für}\quad 0 \leqq \beta \leqq 1,\ k \geqq 1.$$

Hierbei sind $R(z)$ und $S(z)$ zwei beliebige Funktionen, die auf einer unbegrenzten Folge von Konturen $\mathfrak{K}_n$ endlich bleiben und mit unbegrenzt wachsendem z gleichmäßig gegen Konstante konvergieren. Als Konturen $\mathfrak{K}_n$ wähle ich bei der Abschätzung des in (46) auftretenden Integrals eine unendliche Folge von Kreisen mit wachsendem Radius, die die Achse der reellen Zahlen in der Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Polen α_ν und $\alpha_{\nu+1}$ schneiden mögen. Beachten wir, daß wegen (44a) und (19) $G(r,\varrho;z)$ eine gerade Funktion von z ist, und verstehen

[9]) E. Freund, Entwicklungen willkürlicher Funktionen vermittelst meromorpher. Diss. Breslau 1909.

wir unter $\mathfrak{K}_n'$ die in der rechten Halbebene gelegene Hälfte des Kreises $\mathfrak{K}_n$, so ist

$$\int_{\mathfrak{K}_n} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa} = \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa} + \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z+\varkappa}.$$

Es genügt also, das Verschwinden der rechts stehenden Integrale nachzuweisen, wobei z auf den unendlich wachsenden Konturen $\mathfrak{K}_n'$ einen positiven reellen Bestandteil hat. Zur Abschätzung führen wir gemäß den Formeln

(49), (50) $J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$, $Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$

die asymptotischen Ausdrücke der Besselschen Funktionen bei großen Argumentwerten ein, die sowohl für positive reelle als auch komplexe Argumentwerte mit positivem reellen Bestandteil gelten. Die durch Einführung der asymptotischen Ausdrücke (49), (50) begangene Vernachlässigung soll später als erlaubt nachgewiesen werden.

Wir setzen für $r < \varrho$ etwa $zq = \zeta$; die folgenden Gleichungen betrachten wir unter der Voraussetzung, daß ζ sehr groß ist; in diesem Sinne sind die Gleichheitszeichen im folgenden zu verstehen.

(51) $$f_1(z) = \underset{r<\varrho}{G(r,\varrho;z)} = \frac{J_0(\zeta r)}{\frac{2}{\pi}\omega(\zeta)}\left\{-J_0(\zeta\varrho)\omega_1(\zeta) + Y_0(\zeta\varrho)\omega(\zeta) + \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\zeta^2}\right\}.$$

Durch Anwendung von (49), (50) für $\nu = 0$ und $\nu = 1$ findet man

$$-J_0(\zeta\varrho)\omega_1(\zeta) + Y_0(\zeta\varrho)\cdot\omega(\zeta)$$
$$= -\frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta}\cdot\frac{2}{\pi\zeta\sqrt{\varrho}}\cos\zeta(1-\varrho) + \frac{1}{2b^2}\frac{2}{\pi\zeta\sqrt{\varrho}}\sin\zeta(1-\varrho),$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in (51) erhalten wir

$$\underset{r<\varrho}{G(r,\varrho;z)} = \frac{J_0(\zeta r)}{\sqrt{\varrho}\,\zeta\omega(\zeta)}\left\{\frac{1}{2b^2}\sin\zeta(1-\varrho) - \frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta}\cos\zeta(1-\varrho) + \frac{p\sqrt{\varrho}}{(\lambda+2\mu)\zeta}\right\}.$$

Hier führen wir

$$J_0(\zeta r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\zeta r}}\sin\left(\zeta r + \frac{\pi}{4}\right)$$

ein und zerlegen die dann in $\underset{r<\varrho}{G(r,\varrho;z)}$ auftretenden Produkte von trigonometrischen Funktionen:

$$\underset{r<\varrho}{G(r,\varrho;z)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{r\varrho}\sqrt{2\pi\zeta}\cdot\zeta\omega(\zeta)}\cdot\frac{1}{2b^2}\left\{\cos\left(\zeta r + \frac{\pi}{4} - \zeta + \zeta\varrho\right) - \cos\left(\zeta r + \frac{\pi}{4} + \zeta - \zeta\varrho\right)\right\}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{r\varrho}\sqrt{2\pi\zeta}\cdot\zeta\omega(\zeta)}\cdot\frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta}\left\{\sin\left(\zeta r + \frac{\pi}{4} + \zeta - \zeta\varrho\right) + \sin\left(\zeta r + \frac{\pi}{4} - \zeta + \zeta\varrho\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{r\varrho}\sqrt{2\pi\zeta}\cdot\zeta\omega(\zeta)}\cdot\frac{2p\sqrt{\varrho}\sin\left(\zeta r + \frac{\pi}{4}\right)}{(\lambda+2\mu)\zeta}.$$

Gemäß den Relationen

$$\cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$$

ersetze ich die trigonometrischen Funktionen durch Exponentialgrößen; ferner führe ich für die Faktoren der auftretenden Exponentialgrößen folgende Abkürzungen ein:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2}\frac{1}{2b^2} - \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2i}\frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta},$$

$$\varphi_2(\zeta) = \frac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{2}\frac{1}{2b^2} + \frac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{2i}\frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta},$$

$$\varphi_3(\zeta) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2}\frac{2p\sqrt{\varrho}}{(\lambda+2\mu)\zeta}.$$

Es ist

$$\lim_{\zeta\to\infty}\varphi_1(\zeta) = \text{konst.}, \quad \lim_{\zeta\to\infty}\varphi_2(\zeta) = \text{konst.}, \quad \lim_{\zeta\to\infty}\varphi_3(\zeta) = 0.$$

Ferner wird

$$\omega(\zeta) = \frac{2e^{i\zeta}}{\sqrt{2\pi\zeta}}\cdot\varphi_2(\zeta) + \frac{2e^{-i\zeta}}{\sqrt{2\pi\zeta}}\cdot\varphi_1(\zeta).$$

Auf diese Weise ergibt sich

$$\underset{r<\varrho}{(r,\varrho;z)} = \frac{1}{2\sqrt{r\varrho}\zeta\{e^{i\zeta}\varphi_2(\zeta)+e^{-i\zeta}\varphi_1(\zeta)\}}\{e^{i(\zeta r+\zeta\varrho-\zeta)}\cdot\varphi_1(\zeta)+e^{-i(\zeta r+\zeta\varrho-\zeta)}\varphi_2(\zeta)$$
$$- e^{i(\zeta r-\zeta\varrho+\zeta)}i\varphi_2(\zeta)+e^{-i(\zeta r-\zeta\varrho+\zeta)}i\varphi_1(\zeta)+e^{i\zeta r}\varphi_3(\zeta)+e^{-i\zeta r}i\varphi_3(\zeta)\}.$$

Ich erweitere nun rechts mit $e^{i\zeta}$ und kürze durch $\varphi_2(\zeta)$; außerdem setze ich

$$2i\zeta = u; \qquad z - x = \frac{u-2iqx}{2iq}, \qquad dz = \frac{du}{2iq},$$

$$\frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)} = -S(u), \qquad \frac{\varphi_3(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)} = R(u).$$

Das abzuschätzende Konturintegral nimmt dann folgende endgültige Form an:

$$(52)\qquad \int_{\mathfrak{L}_x'} \underset{r<\varrho}{\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp x}}$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{L}_x'}\frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)} + \frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{L}_x'}\frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(1-\frac{\varrho-r}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}+\frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{\varrho-r}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$

$$+\frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}-\frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}.$$

Wegen

$$0\leqq r\leqq 1,\quad 0\leqq\varrho\leqq 1,\quad r\leqq\varrho$$

ist

$$0\leqq\frac{\varrho+r}{2}\leqq 1,\quad 0\leqq 1-\frac{\varrho+r}{2}\leqq 1,\quad 0\leqq 1-\frac{\varrho-r}{2}\leqq 1,\quad 0\leqq\frac{\varrho-r}{2}\leqq 1,$$

$$0\leqq\frac{1+r}{2}\leqq 1,\quad 0\leqq\frac{1-r}{2}\leqq 1.$$

Ferner ist

$$\lim_{u\to\infty}S(u)=\text{konst.},\qquad \lim_{u\to\infty}R(u)=0.$$

Alle Voraussetzungen für die Freundsche Gleichung (48) sind somit erfüllt, jedes der in (52) auftretenden Konturintegrale verschwindet für unendlich große Konturen $\mathfrak{R}_n'$, es ist also $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp\varkappa}=0$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{R}_n}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa}=0. \tag{53}$$

Gleichung (53) gilt für alle Werte von r und ϱ mit Ausnahme von $r=0$ und $\varrho=0$. Diese Fälle sind auszuschließen, da in (52) $\sqrt{r\varrho}$ im Nenner auftritt. Der Ausschluß der Fälle $r=0$, $\varrho>0$ und ebenso $\varrho=0$, $r>0$ ist belanglos, da weiter unten gezeigt werden wird, daß auch für diese Wertsysteme die bilineare Reihe gleichmäßig konvergiert und somit als stetige Funktion auch an diesen Stellen den entsprechenden Wert des Kernes $G(r,\varrho)$ darstellt. Für $r=\varrho=0$ ist der Kern logarithmisch unendlich, er gehört aber zu den brauchbar unstetigen Kernen[10]).

Im Falle $r>\varrho$ erhalten wir auf ganz analoge Weise die der Gleichung (52) entsprechende Formel. Da der Kern bis auf den Summanden $\frac{A(\varkappa)J_0(\varkappa qr)}{\frac{2}{\pi}\omega(\varkappa)}$ in r und ϱ symmetrisch ist, sind nur in den vier ersten Summanden von (52) r und ϱ zu vertauschen. Man bekommt also

[10]) Vgl. Kneser § 19 und 31.

$$(54)\qquad \int\limits_{\mathfrak{L}_n'}^{r>\varrho} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp x}$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{r\varrho}} \int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)} S(u)\,du}{u\{e^u - S(u)\}(u\mp 2iqx)} + \frac{i}{\sqrt{r\varrho}} \int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)} du}{u\{e^u - S(u)\}(u\mp 2iqx)}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{r\varrho}} \int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{r-\varrho}{2}\right)} du}{u\{e^u - S(u)\}(u\mp 2iqx)} + \frac{1}{\sqrt{r\varrho}} \int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{r-\varrho}{2}\right)} S(u)\,du}{u\{e^u - S(u)\}(u\mp 2iqx)}$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{r\varrho}} \int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)} R(u)\,du}{u\{e^u - S(u)\}(u\mp 2iqx)} - \frac{1}{\sqrt{r\varrho}} \int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)} R(u)\,du}{u\{e^u - S(u)\}(u\mp 2iqx)}.$$

Wegen $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \varrho \leqq 1$, $r \geqq \varrho$ sind die Koeffizienten von u in den Exponentiellen wieder echte Brüche, und es wird nach (48)

$$(55)\qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{L}_n'}^{r>\varrho} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp x} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{L}_n}^{r>\varrho} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-x} = 0.$$

Wegen (53) und (55) geht (46) über in die bilineare Entwicklung des Kernes

$$G(r,\varrho;x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{X_\nu(\alpha_\nu q r)\, L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{\Lambda_\nu}.$$

Es soll noch gezeigt werden, daß die mit der Einführung der asymptotischen Ausdrücke der Besselschen Funktionen begangene Vernachlässigung erlaubt ist. Wenn z einen positiven reellen Bestandteil hat, gelten für die Besselschen Funktionen J_ν und Y_ν die Ausdrücke[11])

$$(\mathrm{I})\qquad i\sqrt{2\pi z}\, J_\nu(z) = S_\nu(-2iz)\cdot e^{i\left(z-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)} - S_\nu(2iz)\cdot e^{-i\left(z-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)},$$

$$(\mathrm{II})\qquad \sqrt{2\pi z}\, Y_\nu(z) = S_\nu(-2iz)\cdot e^{i\left(z-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)} + S_\nu(2iz)\cdot e^{-i\left(z-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)}.$$

Hierbei sind die Funktionen $S_\nu(z)$ auf unseren Integrationskonturen endlich, werden dargestellt durch die halbkonvergente Reihe

$$S_\nu(z) = 1 + \frac{4\nu^2-1}{1!\cdot 4z} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!\,(4z)^2} + \ldots,$$

[11]) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln (1923), S. 98; die dort angegebenen Ausdrücke sind allerdings etwas abzuändern, da wir als Besselsche Funktionen 2 Art die Funktionen Y_ν von Schafheitlin benutzen.

und es ist für große z

(III) $$\lim_{z\to\infty} S_\nu(z) = 1.$$

Die Ausdrücke (I) und (II) gehen wegen (III) bei großem z in (49) und (50) über. Die strenge Abschätzung des in (46) auftretenden Konturintegrals würde dann folgendermaßen vor sich gehen: Die aus (I) und (II) sich ergebenden genau, nicht mehr asymptotisch geltenden Werte für J_0, J_1, Y_0, Y_1 kann ich in $G(r, \varrho; z)$ einsetzen, kann ausmultiplizieren und nach den auftretenden Exponentiellen ordnen. Auf demselben Wege wie im vorhergehenden gelange ich zu Ausdrücken für $\int \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z \mp \varkappa}$, die mit den Ausdrücken (52) und (54) fast identisch sind. Bezeichne ich z. B. mit $\bar{S}(u) = -\frac{\bar{\varphi}_1(\zeta)}{\bar{\varphi}_2(\zeta)}$ die der Größe $S(u) = -\frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)}$ entsprechende Größe, so unterscheidet sich $\bar{S}(u)$ bei großem ζ beliebig wenig von $S(u)$, und es ist wegen (III) $\lim_{u\to\infty} \bar{S}(u) = \lim_{u\to\infty} S(u)$. Entsprechendes gilt von den anderen Größen, womit die unter Benutzung von (49), (50) durchgeführte Abschätzung des in (46) auftretenden Konturintegrals gerechtfertigt ist.

Wir zeigen nun, daß die bilineare Reihe gleichmäßig konvergiert. Für große α_ν ist

$$X_\nu = C_\nu \frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}}, \qquad L_\nu = C_\nu \cdot \frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}}.$$

Bildet man aus (19) $\omega'(\alpha_\nu)$, so wird

$$\omega'(\alpha_\nu) = \frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}}\left(1 + \frac{\Psi}{\alpha_\nu}\right).$$

Nach (29) ist also

(56) $$C_\nu^2 = \frac{-q}{b^2\,\omega'(\alpha_\nu)\,J_1(\alpha_\nu q)} = \alpha_\nu\,\Psi\left(1 + \frac{\Psi}{\alpha_\nu}\right).$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{X_\nu(r)\,L_\nu^1(\varrho)}{J_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Psi}{q^2(\alpha_\nu^2 - \varkappa^2)}$$

Wegen (26) ergibt sich hieraus leicht die gleichmäßige Konvergenz der bilinearen Reihe. Die gleichmäßige Konvergenz gilt auch für die Randwerte $r = 0$, $\varrho > 0$ und $\varrho = 0$, $r > 0$, da in diesen Fällen mit Benutzung von (56) die bilineare Reihe die Darstellung $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Psi}{q^2\,\alpha_\nu^2\left(1 - \frac{\varkappa^2}{\alpha_\nu^2}\right)}$ annimmt

Entwicklung quellenmäßiger Funktionen.

a) Wir definieren eine quellenmäßige Funktion durch die Gleichung

$$F(\varrho) = \int_0^1 r\,G(r, \varrho)\,f(r)\,dr.$$

Wegen (42) ist

$$F(1) = 0.$$

Als Differentialgleichung von F findet man mit Beachtung von (40) und (44)

$$\varrho F''(\varrho) + F'(\varrho) + \varkappa^2 q^2 \varrho F(\varrho) + \frac{2 p b^2 \varrho}{\lambda + 2\mu} F'(1) = -\varrho f(\varrho).$$

Umgekehrt sei nun $\Phi(r)$ eine mit ihrer ersten Ableitung stetige Funktion, während die zweite Ableitung nur stückweise stetig zu sein braucht. Es sei ferner

(57), (58) $\qquad \Phi(0) = \text{fin.}, \qquad \Phi(1) = 0.$

Dann definiere ich $f(r)$ durch die Gleichung

$$r \Phi''(r) + \Phi'(r) + \varkappa^2 q^2 r \Phi(r) + \frac{2 p b^2 r}{\lambda + 2\mu} \Phi'(1) = -r f(r).$$

Verbinde ich diese Gleichung mit der Differentialgleichung (30) des Kernes und beachte (31), (32), (33), (57) und (58), so gelange ich auf dem üblichen Wege zur quellenmäßigen Darstellung

$$\Phi(\varrho) = \int_0^1 r G(r, \varrho) f(r) dr.$$

b) Wir können eine quellenmäßige Funktion auch durch

$$F(r) = \int_0^1 \varrho G(r, \varrho) f(\varrho) d\varrho$$

definieren. Dann bekommt man mit Hilfe von (30) und (32)

$$r F''(r) + F'(r) + \varkappa^2 q^2 r F(r) = -r f(r).$$

Außerdem ist auf Grund der Gleichung (33)

$$(\lambda + 2\mu) F(1) + 2 p b^2 \int_0^1 r F(r) dr = 0.$$

Umgekehrt sei $\Phi(\varrho)$ eine mit der ersten Ableitung stetige Funktion; $\Phi(\varrho)$ erfülle die Randbedingungen

(59), (60) $\qquad (\lambda + 2\mu) \Phi(1) + 2 p b^2 \int_0^1 \varrho \Phi(\varrho) d\varrho = 0, \qquad \Phi(0) = \text{fin.}$

Eine Funktion $f(\varrho)$ werde dann definiert durch

$$\varrho \Phi''(\varrho) + \Phi'(\varrho) + \varkappa^2 q^2 \varrho \Phi(\varrho) = -\varrho f(\varrho).$$

Hieraus finden wir durch Kombination mit (40) unter Verwendung von (42), (43), (44), (59) und (60) die quellenmäßige Darstellung

$$\Phi(r) = \int_0^1 \varrho G(r, \varrho) f(\varrho) d\varrho.$$

Diese beiden quellenmäßigen Funktionen $\Phi(\varrho)$ und $\Phi(r)$ lassen sich nun wegen der gleichmäßig konvergenten bilinearen Entwicklung des Kernes nach den $L_\nu(\varrho)$ bzw. $X_\nu(r)$ in Fouriersche Reihen entwickeln.

Entwicklung nicht quellenmäßiger Funktionen. Differenzieren wir die Gleichung

$$G(r,\varrho;\varkappa)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{X_\nu(\alpha_\nu q r)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{\Lambda_\nu}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}_n}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa},$$

in der die Summe nur endlich viele Glieder enthält, gliedweise nach r und führen dann den Grenzübergang $n=\infty$ aus, so erhalten wir

$$G'(r,\varrho;\varkappa)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{X'_\nu(r)\,L_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}_n}\frac{G'(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa}.$$

Um zu zeigen, daß das Konturintegral verschwindet, differenzieren wir im Falle $r<\varrho$ Gleichung (52) nach r. Jeder der sechs Summanden in (52) enthält r zweimal; die bei der Differentiation des Faktors $\frac{1}{\sqrt{r}}$ entstehenden Integrale lassen sich zu $-\frac{1}{2r}\int\limits_{r<\varrho}\frac{G\,dz}{z\mp\varkappa}$ zusammenziehen. Also wird

$$(61)\qquad \int\limits_{\mathfrak{L}'_n}\frac{G'(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp\varkappa}=-\frac{1}{2r}\int\limits_{\mathfrak{L}'_n}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp\varkappa}$$
$$-\frac{i}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}'_n}\frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}-\frac{i}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}'_n}\frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)}du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}'_n}\frac{e^{u\left(1-\frac{\varrho-r}{2}\right)}du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}-\frac{1}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}'_n}\frac{e^{u\left(\frac{\varrho-r}{2}\right)}S(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$
$$+\frac{i}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}'_n}\frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}+\frac{1}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}'_n}\frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}.$$

Nach (53) und (47) verschwinden alle in (61) auftretenden Konturintegrale bei unendlich wachsenden Konturen. Da in (47) $\alpha<1$ sein muß, sind die Fälle $r=\varrho=0$, $r=\varrho$, $r=\varrho=1$ hierbei auszuschließen.

Im Falle $r>\varrho$ folgt aus (54)

$$(62)\qquad \int\limits_{\mathfrak{L}_n'}^{r>\varrho} \frac{G'(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp x} = -\frac{1}{2r}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'}^{r>\varrho} \frac{G(r,\varrho;z)}{z\mp x}\,dz$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)} - \frac{i}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)}du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{r-\varrho}{2}\right)}du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)} + \frac{1}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{r-\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}$$

$$+\frac{i}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)} + \frac{1}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}.$$

Wie im Falle $r<\varrho$ verschwinden auch hier sämtliche Integrale bei ins Unendliche wachsenden Konturen. Für $|r-\varrho|\neq 0$ ist also

$$G'(r,\varrho;x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{X_\nu'(\alpha_\nu q r)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{\Lambda_\nu}.$$

Im Falle $r=\varrho$ ist

$$(63)\qquad \frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho)+G'(\varrho+0,\varrho)]$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n} \frac{X_\nu'(\alpha_\nu q\varrho)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{\Lambda_\nu} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{L}_n} \frac{\frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho;z)+G'(\varrho+0,\varrho;z)]}{z-x}\,dz.$$

Aus (61) und (62) findet man

$$\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{\frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho;z)+G'(\varrho+0,\varrho;z)]}{z\mp x}\,dz = -\frac{1}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{G(\varrho,\varrho;z)\,dz}{z\mp x}$$

$$-\frac{i}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\varrho}S(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)} - \frac{i}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u(1-\varrho)}\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}$$

$$+\frac{i}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)} + \frac{1}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{L}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1-\varrho}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}.$$

Nach (47) ist wiederum

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{L}_n} \frac{\frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho;z)+G'(\varrho+0,\varrho;z)]}{z-x}\,dz = 0,$$

womit Gleichung (63) übergeht in

$$\frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho)+G'(\varrho+0,\varrho)]=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{X_\nu'(\alpha_\nu q\varrho)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{\Lambda_\nu}.$$

Es lassen sich jetzt nach der Kneserschen[12]) Methode auch unstetige, nicht quellenmäßige Funktionen nach den L_ν entwickeln; der Wert der Reihe in einem Unstetigkeitspunkte ist gleich dem arithmetischen Mittel der dort auftretenden Funktionswerte.

Hiermit ist die thermoelastische Aufgabe für die Kreisscheibe, deren fester Rand die Temperatur Null hat, vollständig erledigt.

§ 5.

Verallgemeinerung der Randwertaufgabe des § 4 und Zusammenfassung.

Nach der Kreisscheibe würde sich die Kugel als das zunächstliegende Grundgebiet ergeben. Wir wollen aber der Allgemeinheit wegen unsere Betrachtungen sofort in der Weise erweitern, daß wir untersuchen, ob sich willkürliche Funktionen bei derselben Wahl der Randbedingungen wie in § 4 nach den in § 3 gefundenen allgemeinen Eigenfunktionen entwickeln lassen, wenn k eine beliebige Zahl >2 ist.

Die Randbedingungen sind

(1), (2) $\qquad L(0)=\text{fin.},\quad L(1)=0,$

(3), (4) $\qquad N(0)=\text{fin.},\quad N(1)=0.$

Nach § 3 erhält man durch Benutzung von (1), (2), (3):

$$L=C\left\{(\alpha qr)^{1-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha qr)-(\alpha q)^{1-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\},$$

$$M=C\left\{\frac{p}{\lambda+2\mu}(\alpha qr)^{1-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha qr)+\frac{(\alpha q)^{1-\frac{k}{2}}}{b^2}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\}$$

$$N=C\left\{\frac{p}{\lambda+2\mu}(\alpha qr)^{-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}}(\alpha qr)+\frac{(\alpha q)^{1-\frac{k}{2}}}{k\cdot b^2}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\}.$$

Die Bedingung (4) liefert für α die transzendente Gleichung

(5) $$\omega(\alpha)=\frac{p}{\lambda+2\mu}\,\frac{J_{\frac{k}{2}}(\alpha q)}{\alpha q}+\frac{1}{kb^2}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)=0.$$

---

[12]) Vgl. Kneser, a. a. O. § 32.

Man findet, daß die Funktionen

$$X_\nu = C_\nu (\alpha_\nu q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r)$$

zu den L_ν orthogonal sind. Es zeigt sich aber, daß der zum Biorthogonalsystem L_ν, X_ν gehörige Kern für $r = \varrho = 0$ einen Pol von der Ordnung $\frac{k}{2} - 1$ hat und so kein brauchbar unstetiger Kern ist; daß ferner die bilineare Reihe für $r = 0$, $\varrho > 0$ und $\varrho = 0$, $r > 0$ bei beliebigem k nicht gleichmäßig konvergiert. Daher sind die obigen Funktionen L_ν für eine Fouriersche Entwicklung willkürlicher Funktionen nicht geeignet. Wir können sie aber dafür geeignet machen, indem wir sie mit dem Faktor $(\alpha q r)^{\frac{k}{2}-1}$ multiplizieren. Die in dieser Weise abgeänderten Funktionen L und M wollen wir mit $\bar{L}$ und $\bar{M}$ bezeichnen. Dann läßt sich zeigen, daß sich nach diesen abgeänderten Eigenfunktionen $\bar{L}_\nu$ willkürliche Funktionen entwickeln lassen.

$$L = C\left\{J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) - r^{\frac{k}{2}-1} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\},$$

$$\bar{M} = C\left\{\frac{p}{\lambda+2\mu} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + \frac{r^{\frac{k}{2}-1}}{b^2} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\}.$$

Es ist

(6), (7) $$\bar{L}(0) = 0, \quad \bar{L}(1) = 0.$$

Diskussion der transzendenten Gleichung. Gleichung (5) hat keine rein imaginären Wurzeln, da für $\alpha = i\beta$ die Reihenentwicklungen von $J_{\frac{k}{2}-1}$ und $J_{\frac{k}{2}}$ nur positive Glieder enthalten, so daß die linke Seite von (5) positiv ist und nicht zum Verschwinden gebracht werden kann.

Um zu beweisen, daß keine komplexen Wurzeln α vorhanden sind, gehen wir aus von der Differentialgleichung der Funktion $\bar{M}$:

$$r^2 \bar{M}'' + r\bar{M}' + \left\{\alpha^2 q^2 r^2 - \left(\frac{k}{2} - 1\right)^2\right\} \bar{M} = \frac{C\alpha^2 q^2 r^{\frac{k}{2}+1}}{2} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q).$$

Dividiere ich durch r und benutze

$$\bar{M}(1) = \frac{Cq^2}{b^2(\lambda+2\mu)} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q),$$

so erhalte ich

(8) $$r\bar{M}'' + \bar{M}' + \left[\alpha^2 q^2 r - \frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{r}\right] \bar{M} = \alpha^2(\lambda+2\mu) r^{\frac{k}{2}} \bar{M}(1).$$

Wegen

$$\int_a^b x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = [x^\nu J_\nu]_a^b$$

findet man

$$\overline{N}(r) = (\alpha q r)^{\frac{k}{2}-1} N(r) = \frac{1}{r^{\frac{k}{2}+1}} \int_0^r r^{\frac{k}{2}} \overline{M}(r)\,dr.$$

Wegen (4) ist

$$\int_0^1 r^{\frac{k}{2}} \overline{M}(r)\,dr = 0. \tag{9}$$

Bilden wir nun Gleichung (8) für zwei Funktionen $\overline{M}_\nu$ und $\overline{M}_\sigma$, so findet man auf dem üblichen Wege mit Benutzung von (9):

$$\overline{M}_\sigma(1)\overline{M}'_\nu(1) - \overline{M}_\nu(1)\overline{M}'_\sigma(1) + q^2(\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)\int_0^1 r\,\overline{M}_\sigma\,\overline{M}_\nu\,dr = 0. \tag{10}$$

Benutzt man die Gleichung (5) und die Beziehung

$$J_{\nu+1} = \frac{\nu}{x} J_\nu - J'_\nu,$$

so gelangt man zur Gleichung

$$\overline{M}_\sigma(1)\overline{M}'_\nu(1) - \overline{M}_\nu(1)\overline{M}'_\sigma(1) = \frac{1}{k}(\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)(\lambda + 2\mu)\overline{M}_\sigma(1)\overline{M}_\nu(1),$$

so daß (10) übergeht in

$$\int_0^1 r\,\overline{M}_\nu\,\overline{M}_\sigma\,dr = -\frac{\lambda+2\mu}{kq^2}\,\overline{M}_\nu(1)\overline{M}_\sigma(1).$$

Hieraus folgt wie in § 4, daß keine komplexen Wurzeln von (5) vorhanden sind.

Die transzendente Gleichung hat unendlich viele reelle Wurzeln, welche im wesentlichen mit den Nullstellen von $J_{\frac{k}{2}-1}$ übereinstimmen; da für große α nach § 4 (49)

$$J_{\frac{k}{2}-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{k-3}{4}\pi\right)$$

ist, erhalten wir folgende Darstellung der Wurzeln:

$$\alpha_n q = n\pi + \frac{k-3}{4}\pi + \varepsilon_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{11}$$

Aufstellung des Biorthogonalsystems und Normierung. Die Differentialgleichung der Funktion $\overline{L}$ lautet

$$r\overline{L}'' + \overline{L}' + \left[\alpha^2 q^2 r - \frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{r}\right]\overline{L} = -\alpha^2 b^2 (\lambda+2\mu)\, r^{\frac{k}{2}}\,\overline{M}(1). \tag{12}$$

Hieraus findet man auf dieselbe Weise wie bei der Funktion $\overline{M}$ mit Benutzung von (1), (2) und

$$(13)\quad \int_0^1 r^{\frac{k}{2}}\,\overline{L}(\alpha q r)\,dr = C\left\{\frac{1}{(\alpha q)^{\frac{k}{2}+1}}\left[(\alpha q r)^{\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q r)\right]_0^1 - \frac{J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)}{k}\right\}$$

$$= -\frac{\lambda+2\mu}{kp}\,\overline{M}(1)$$

die Gleichung

$$\int_0^1 r\,\overline{L}_\nu\,\overline{L}_\sigma\,dr = \frac{(\lambda+2\mu)^2 b^2\,\overline{M}_\nu(1)\,\overline{M}_\sigma(1)}{kpq^2},$$

die ich nach (13) folgendermaßen schreiben kann:

$$\int_0^1 r\,\overline{L}_\sigma\left[\overline{L}_\nu + \frac{b^2(\lambda+2\mu)\,\overline{M}_\nu(1)}{q^2}\,r^{\frac{k}{2}-1}\right]dr = 0.$$

Als Biorthogonalsystem erhalte ich also

$$\overline{X}_\nu = C_\nu J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r).$$

Es ist

$$(14)\qquad \overline{X}(0) = 0,$$

$$(15)\qquad r\,\overline{X}'' + \overline{X}' + \left[\alpha^2 q^2 r - \frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{r}\right]\overline{X} = 0,$$

$$(16)\qquad \int_0^1 r^{\frac{k}{2}}\,\overline{X}\,dr = \frac{C}{\alpha q} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q).$$

Hier braucht α noch keine Wurzel von (5) zu sein. Ist dies aber der Fall, so geht (16) wegen (5) über in

$$(17)\quad \int_0^1 r^{\frac{k}{2}}\,\overline{X}_\nu\,dr = -\frac{C_\nu(\lambda+2\mu)}{kpb^2} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q) = -\frac{\overline{X}_\nu(1)\cdot(\lambda+2\mu)}{kpb^2}.$$

Um die Funktionen $\overline{X}$ und $\overline{L}$ zu normieren, verfahren wir wie in § 2 und 4 nach der Methode des Grenzüberganges von d'Alembert und erhalten zunächst mit Benutzung von (5), (6), (7), (14) und (16):

$$\int_0^1 r\,\overline{L}_\nu(\alpha_\nu q r)\,\overline{X}(\beta q r)\,dr = -\frac{CC_\nu \alpha_\nu^2 J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q)\cdot(\lambda+2\mu)}{p(\alpha_\nu^2-\beta^2)}\cdot\omega(\beta).$$

Wenn ich nun den Grenzübergang $\beta = \alpha_\nu$ vollziehe und normiere, wird

$$(18)\qquad C_\nu^2 = \frac{2p}{(\lambda+2\mu)\,\alpha_\nu\,\omega'(\alpha_\nu)\,J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q)} = \frac{-2q}{kb^2\,\omega'(\alpha_\nu)\,J_{\frac{k}{2}}(\alpha_\nu q)}.$$

Aufstellung des Kerns und der Integralgleichungen. Wir definieren einen Kern $G(r, \varrho)$ durch die Differentialgleichung

$$(19) \qquad rG''(r,\varrho)+G'(r,\varrho)+\left[\varkappa^2 q^2 r-\frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{r}\right]G(r,\varrho)=0$$

und die Bedingungen

$$(20),\ (21) \qquad G(0,\varrho)=0, \qquad (rG')\Big|_{r=\varrho+0}^{r=\varrho-0}=1,$$

$$(22) \qquad \frac{(\lambda+2\mu)\,G(1,\varrho)}{kp}+b^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=0.$$

Dann ergibt sich durch Kombination von (12) und (19) unter Benutzung von (6), (7), (20), (21), (22) die Integralgleichung

$$\bar{L}_\nu(\varrho)=\Lambda_\nu\int_0^1 rG(r,\varrho)\,\bar{L}_\nu(r)\,dr.$$

Mit Hilfe von (17) und (5) verifiziert man, daß $\bar{X}_\nu(\alpha_\nu qr)$ folgende der Gleichung (22) analoge Randbedingung erfüllt:

$$(23) \qquad \frac{(\lambda+2\mu)\,\bar{X}_\nu(1)}{kp}+b^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}\bar{X}_\nu\,dr=0.$$

Wir wollen der Gleichung (22) eine andere Form geben. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die Differentialgleichung (19) mit $r^{\frac{k}{2}-1}$. Dann kann sie in folgender Form geschrieben werden:

$$\{r^{k-1}[r^{1-\frac{k}{2}}G]'\}'+\varkappa^2 q^2 r^{\frac{k}{2}}G=0.$$

Integrieren wir nun von 0 bis 1 und benutzen (20) und (21), so wird

$$\{r^{k-1}[r^{1-\frac{k}{2}}G]'\}\Big|_0^1+\{r^{k-1}[r^{1-\frac{k}{2}}G]'\}\Big|_{r=\varrho+0}^{r=\varrho-0}+\varkappa^2 q^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=0.$$

$$\left[r^{\frac{k}{2}}G'-\left(\frac{k}{2}-1\right)r^{\frac{k}{2}-1}G\right]_0^1+(r^{\frac{k}{2}-1}\cdot rG')\Big|_{\varrho+0}^{\varrho-0}+\varkappa^2 q^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=0.$$

$$G'(1,\varrho)-\left(\frac{k}{2}-1\right)G(1,\varrho)+\varrho^{\frac{k}{2}-1}+\varkappa^2 q^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=0.$$

$$\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=-\frac{\varrho^{\frac{k}{2}-1}+G'(1,\varrho)-\left(\frac{k}{2}-1\right)G(1,\varrho)}{\varkappa^2 q^2}.$$

Damit geht (22) über in

$$\frac{\lambda+2\mu}{kp}G(1,\varrho)-\frac{b^2}{\varkappa^2q^2}\left\{\varrho^{\frac{k}{2}-1}+G'(1,\varrho)-\left(\frac{k}{2}-1\right)G(1,\varrho)\right\}=0$$

oder

$$\varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)G(1,\varrho)-kpb^2\left\{\varrho^{\frac{k}{2}-1}+G'(1,\varrho)-\left(\frac{k}{2}-1\right)G(1,\varrho)\right\}=0. \tag{24}$$

Für den Kern setze ich an:

$$G(r,\varrho)_{r<\varrho}=C_1J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr),$$

$$G(r,\varrho)_{r>\varrho}=C_2J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)+C_3Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr).$$

Setze ich diese Ausdrücke in (24) ein, und benutze ich

$$J'_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)\Big|^{r=1}=\left(\frac{k}{2}-1\right)J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)-\varkappa qJ_{\frac{k}{2}}(\varkappa q),$$

$$Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)\Big|^{r=1}=\left(\frac{k}{2}-1\right)Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)-\varkappa qY_{\frac{k}{2}}(\varkappa q),$$

so bekomme ich für Gleichung (24)

$$\{\varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)C_2J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)+kpb^2C_3\varkappa qJ_{\frac{k}{2}}(\varkappa q)\}$$

$$-\{\varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)C_3Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)+kpb^2C_3\varkappa qY_{\frac{k}{2}}(\varkappa q)\}=\varrho^{\frac{k}{2}-1}\cdot kpb^2.$$

Zur Abkürzung setze ich noch

$$\omega_1(\varkappa)=\frac{p}{\lambda+2\mu}\frac{Y_{\frac{k}{2}}(\varkappa q)}{\varkappa q}+\frac{1}{kb^2}Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q);$$

dann nimmt die letzte Gleichung folgende einfache Gestalt an:

$$C_2\varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)kb^2\omega(\varkappa)$$

$$+C_3\varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)kb^2\omega_1(\varkappa)=\varrho^{\frac{k}{2}-1}\cdot kpb^2. \tag{25}$$

Zur Bestimmung von C_1, C_2, C_3 dienen die Gleichungen (21), (25) und die Stetigkeit von $G(r,\varrho)$ für $r=\varrho$. Führen wir

$$A(\varkappa)=\frac{2}{\pi}\frac{p\varrho^{\frac{k}{2}-1}}{(\lambda+2\mu)\varkappa^2q^2}$$

ein, so erhalten wir für den Kern die Ausdrücke:

$$G(r,\varrho)_{r<\varrho}=-\frac{-\{J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q\varrho)\cdot\omega_1(\varkappa)-Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q\varrho)\cdot\omega(\varkappa)\}+A(\varkappa)}{\frac{2}{\pi}\omega(\varkappa)}\cdot J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr).$$

$$G(r,\varrho)_{r>\varrho} = \frac{\{-J_{\frac{k}{2}-1}(x q \varrho)\cdot\omega_1(x) + A(x)\}\, J_{\frac{k}{2}-1}(x q r) + J_{\frac{k}{2}-1}(x q \varrho)\,\omega(x)\, Y_{\frac{k}{2}-1}(x q r)}{\frac{2}{\pi}\omega(x)}$$

Der Kern ist unsymmetrisch. Es ist

$$G(0,\varrho) = 0, \qquad G(r,0) = 0. \tag{26}$$

Für $r = \varrho = 0$ wird der Kern zwar nicht unendlich, aber in gewisser Weise unbestimmt, wie man erkennt, wenn man die Besselschen Funktionen zweiter Art $Y_{\frac{k}{2}-1}(x q \varrho)$ und $Y_{\frac{k}{2}-1}(x q r)$ durch die Funktionen erster Art ausdrückt[13]).

Die Differentialgleichung des Kernes als Funktion von ϱ lautet:

$$\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial G}{\partial \varrho} + \left[x^2 q^2 \varrho - \frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{\varrho}\right] G = \frac{\varrho^{\frac{k}{2}} p J_{\frac{k}{2}-1}(x q r)}{(\lambda+2\mu)\,\omega(x)}.$$

Durch Ausrechnung ergibt sich

$$\frac{-\partial J_{\frac{k}{2}-1}(x q \varrho)}{\partial \varrho}\Bigg|^{\varrho=1} \omega_1(x) + \frac{\partial Y_{\frac{k}{2}-1}(x q \varrho)}{\partial \varrho}\Bigg|^{\varrho=1} \cdot \omega(x)$$

$$= -\frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)p}{(\lambda+2\mu)x^2 q^2}\cdot\frac{2}{\pi} - \frac{1}{k b^2}\cdot\frac{2}{\pi}.$$

Damit findet man leicht

$$\frac{\partial G}{\partial \varrho}\Bigg|^{\varrho=1} = -\frac{J_{\frac{k}{2}-1}(x q r)}{k b^2\,\omega(x)},$$

so daß die Differentialgleichung des Kernes nun folgende Gestalt annimmt:

$$\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial G}{\partial \varrho} + \left[x^2 q^2 \varrho - \frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{\varrho}\right] G = -\frac{k p b^2}{\lambda+2\mu}\varrho^{\frac{k}{2}}\frac{\partial G}{\partial \varrho}(r,1). \tag{27}$$

Außerdem ist

$$J_{\frac{k}{2}-1}(x q)\,\omega_1(x) - Y_{\frac{k}{2}-1}(x q)\cdot\omega(x) = \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)x^2 q^2}, \tag{28}$$

also ist

$$G(r,1) = 0. \tag{29}$$

Ferner ist

$$\left(\varrho\frac{\partial G}{\partial \varrho}\right)\Big|_{\varrho=r+0}^{\varrho=r-0} = 1. \tag{30}$$

Durch Kombination der Differentialgleichungen (15) und (27) findet

[13]) Vgl. P. Schafheitlin 12 (4) und (6).

man unter Beachtung der geltenden Randbedingungen (14), (23), (26), (29) und (30) die Integralgleichung

$$\overline{X}_\nu(r) = \Lambda_\nu \int_0^1 \varrho\, G(r,\varrho)\, \overline{X}_\nu(\varrho)\, d\varrho.$$

Beweis der bilinearen Formel. Für $r < \varrho$ definieren wir $f_1(z)$ durch

$$\frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{-J_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\,\omega_1(z) + Y_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\,\omega(z) + A(z)}{\frac{2}{\pi}\,\omega(z)\cdot(z-\varkappa)} \cdot J_{\frac{k}{2}-1}(zqr).$$

Die nähere Untersuchung zeigt, daß $z=0$ kein Pol von $f_1(z)$ ist. Der Beweis gestaltet sich z. B. für den Fall, daß k keine gerade ganze Zahl ist, folgendermaßen: Es scheint zunächst die Stelle $z=0$ ein Pol von $f_1(z)$ zu sein; denn es ist $A(z)$ für $z=0$ unendlich groß. Ersetzen wir aber vermöge der Formel

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} J_{-\nu}(x) - \operatorname{ctg} \nu\pi\, J_\nu(x)$$

die Besselschen Funktionen zweiter Art durch die Funktionen erster Art, so tritt unter den vielen Summanden, in die

$$-J_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\,\omega_1(z) + Y_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\,\omega(z)$$

dann zerfällt, auch ein Glied

$$\frac{p}{(\lambda+2\mu)zq}\left\{-J_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\frac{J_{-\frac{k}{2}}(zq)}{\sin\frac{k\pi}{2}}\right\}$$

auf, und dafür kann ich (vgl. Schafheitlin **2** (7) und **1** (15)) auch schreiben

$$\frac{p}{(\lambda+2\mu)zq\sin\frac{k\pi}{2}}\left\{-\frac{(zq\varrho)^{\frac{k}{2}-1}(zq)^{-\frac{k}{2}}[1+z^2\mathfrak{P}(z^2)]}{2^{\frac{k}{2}-1}\prod\left(\frac{k}{2}-1\right)2^{-\frac{k}{2}}\prod\left(-\frac{k}{2}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{p}{(\lambda+2\mu)zq\sin\frac{k\pi}{2}}\left\{-\frac{2}{\pi}\frac{\varrho^{\frac{k}{2}-1}}{zq}\sin\frac{k\pi}{2} + z\mathfrak{P}(z^2)\right\} = -A(z) + \text{const.}\cdot\mathfrak{P}(z^2).$$

Es hebt sich also das in $f_1(z)$ auftretende $A(z)$ gegen das hier auftretende $-A(z)$; so findet man, daß $z=0$ kein Pol von $\frac{f_1(z)}{z-\varkappa}$ ist. Pole sind dann also nur $z=\varkappa$ und $z=\pm\alpha_\nu$.

$$\operatorname*{Res}_{z=\varkappa} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = G(r, \varrho; \varkappa).$$
$$r<\varrho$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{-J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q\varrho)\,\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)(\alpha_\nu-\varkappa)} \cdot J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r).$$

Nun ist nach (28) und (5)

$$J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q)\,\omega_1(\alpha_\nu) = \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\,\alpha_\nu^2 q^2},$$

also ergibt sich leicht mit Benutzung von (18)

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = -\frac{\bar{X}_\nu(r)\,\bar{L}_\nu(\varrho)}{2\alpha_\nu q^2(\alpha_\nu-\varkappa)}.$$

Ersetze ich hier α_ν durch $-\alpha_\nu$, so wird:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = -\frac{\bar{X}_\nu(r)\,\bar{L}_\nu(\varrho)}{2\alpha_\nu q^2(\alpha_\nu+\varkappa)},$$

also

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} + \operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu} = -\frac{\bar{X}_\nu(r)\,\bar{L}_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man für $r > \varrho$, so daß nach dem Cauchyschen Residuensatze folgt:

$$(31) \qquad G(r, \varrho; \varkappa) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\bar{X}_\nu(r)\,\bar{L}_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}_n} \frac{G(r, \varrho; z)\,dz}{z-\varkappa}.$$

Die Abschätzung des Konturintegrals geschieht wie in § 4. Wir setzen $zq = \zeta$ und führen die asymptotischen Ausdrücke § 4 (49) und (50) ein[14]). Wenn übrigens k eine ungerade ganze Zahl ist, lassen sich bekanntlich $J_{\frac{k}{2}-1}$ und $Y_{\frac{k}{2}-1}$ für beliebige Argumentwerte, nicht nur für große, streng durch trigonometrische Funktionen ausdrücken.

Für $r < \varrho$ geschieht die Abschätzung des in (31) auftretenden Konturintegrals ganz genau so wie in § 4. Wir setzen

$$\frac{e^{-\frac{k-3}{4}\pi i}}{2} \cdot \frac{1}{kb^2} - \frac{e^{-\frac{k-3}{4}\pi i}}{2i} \cdot \frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta} = \varphi_1(\zeta),$$

$$\frac{e^{\frac{k-3}{4}\pi i}}{2} \cdot \frac{1}{kb^2} + \frac{e^{\frac{k-3}{4}\pi i}}{2i} \cdot \frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta} = \varphi_2(\zeta),$$

[14]) Ihre Einführung ist erlaubt, vgl. § 4 (I), (II) und (III).

$$\frac{e^{-\frac{k-3}{4}\pi i}}{2i}\,\frac{2p\varrho^{\frac{k-1}{2}}}{(\lambda+2\mu)\zeta}=\varphi_3(\zeta);$$

$$2i\zeta=u;\qquad e^{(k-2)\pi i}\frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)}=e^{k\pi i}\frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)}=-S(u),$$

$$e^{\frac{k-2}{2}\pi i}\frac{\varphi_3(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)}=R(u).$$

Dann ergibt sich folgende definitive Gestalt des abzuschätzenden Konturintegrales:

(32)
$$\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{\substack{z\mp x\\ r<\varrho}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{k-1}{2}\pi i}}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}+\frac{e^{\frac{k-1}{2}\pi i}}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}$$

$$+\frac{e^{-k\pi i}}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(1-\frac{\varrho-r}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}+\frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{\varrho-r}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}$$

$$+\frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}+\frac{e^{\frac{k\pi i}{2}}}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iqx)}.$$

Nach der Freundschen Formel § 4 (48), für die alle Voraussetzungen erfüllt sind, folgt hieraus $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{\substack{z\mp x\\ r<\varrho}}=0$, also auch

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{R}_n}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{\substack{z-x\\ r<\varrho}}=0.$$

Diese Formel gilt wegen des im Nenner der einzelnen Summanden von (32) auftretenden Faktors $\sqrt{r\varrho}$ nicht für $r=0$ und $\varrho=0$.

Im Falle $r>\varrho$ erhält man, da der Kern bis auf das Glied $\frac{A(x)J_{\frac{k}{2}-1}(xqr)}{\frac{2}{\pi}\omega(x)}$ in r und ϱ symmetrisch ist, auf demselben Wege die der Gleichung (32) entsprechende Gleichung. In den vier ersten Summanden von (32) sind nur r und ϱ zu vertauschen. So wird

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{R}_n}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{\substack{z-x\\ r>\varrho}}=0.$$

Die Partialbruchzerlegung (31) geht damit über in die bilineare Formel

$$G(r,\varrho;\varkappa)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{X}_\nu(r)\,\bar{L}_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu}.$$

Die hier auftretende unendliche Reihe läßt sich als gleichmäßig konvergent nachweisen. Differenziert man (5) nach α_ν, so wird

$$\omega'(\alpha_\nu)=\frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}}\left(1+\frac{\Psi}{\alpha_\nu}\right),$$

$$C_\nu^2=\frac{-2q}{kb^2\omega'(\alpha_\nu)\,J_{\frac{k}{2}}(\alpha_\nu q)}=\alpha_\nu\Psi\left(1+\frac{\Psi}{\alpha_\nu}\right),$$

$$\bar{X}_\nu=C_\nu\frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}},\qquad \bar{L}_\nu=C_\nu\frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}},$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{X}_\nu(r)\,\bar{L}_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\Psi}{q^2(\alpha_\nu^2-\varkappa^2)},$$

woraus wegen (11) die gleichmäßige Konvergenz folgt. Für $r=0$, $\varrho=0$ ergibt die Reihe den Wert Null, sie ist also auch für diese Randwerte dem Kern G gleich.

Entwicklung quellenmäßiger und nicht quellenmäßiger Funktionen.

a) Definiert man eine quellenmäßige Funktion durch

$$F(\varrho)=\int_0^1 r\,G(r,\varrho)\,f(r)\,dr,$$

so ist wegen (26) und (29): $F(0)=F(1)=0$.

Als Differentialgleichung von F findet man

$$\varrho F''(\varrho)+F'(\varrho)+\left[\varkappa^2q^2\varrho-\frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{\varrho}\right]F(\varrho)+\frac{kpb^2}{\lambda+2\mu}\varrho^{\frac{k}{2}}F'(1)=-\varrho f(\varrho).$$

Umgekehrt sei $\Phi(r)$ eine mit der ersten Ableitung stetige Funktion, während die zweite Ableitung nur stückweise stetig zu sein braucht; $\Phi(r)$ erfülle die Randbedingungen

$$\Phi(0)=\Phi(1)=0.$$

Dann definieren wir $f(r)$ durch

$$(33)\quad r\Phi''(r)+\Phi'(r)+\left[\varkappa^2q^2r-\frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{r}\right]\Phi(r)+\frac{kpb^2}{\lambda+2\mu}r^{\frac{k}{2}}\Phi'(1)=-rf(r).$$

Damit $f(r)$ auch für $r = 0$ definiert sei, setzen wir fest, daß

$$\lim_{r \to 0} \frac{\Phi(r)}{r} = \text{fin.}$$

sei. Diese Bedingung für $\Phi(r)$ umfaßt die Bedingung $\Phi(0) = 0$.

Durch Kombination mit (19) steigt man von (39) auf dem gewöhnlichen Wege zur quellenmäßigen Darstellung

$$\Phi(\varrho) = \int_0^1 r\, G(r, \varrho)\, f(r)\, dr$$

empor.

b) Es sei

$$F(r) = \int_0^1 \varrho\, G(r, \varrho)\, f(\varrho)\, d\varrho .$$

Nach (20) und (22) hat man

$$F(0) = 0, \qquad (\lambda + 2\mu) F(1) + k p b^2 \int_0^1 r^{\frac{k}{2}} F(r)\, dr = 0 .$$

Als Differentialgleichung von F ergibt sich

$$r F''(r) + F'(r) + \left[\varkappa^2 q^2 r - \frac{\left(\frac{k}{2} - 1\right)^2}{r} \right] F(r) = - r f(r).$$

Wenn umgekehrt $\Phi(\varrho)$ eine mit der ersten Ableitung stetige Funktion ist und die Randbedingungen

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\Phi(\varrho)}{\varrho} = 0, \qquad (\lambda + 2\mu) \Phi(1) + k p b^2 \int_0^1 \varrho^{\frac{k}{2}} \Phi(\varrho)\, d\varrho = 0$$

erfüllt, werde $f(\varrho)$ durch

$$\varrho \Phi''(\varrho) + \Phi'(\varrho) + \left[\varkappa^2 q^2 \varrho - \frac{\left(\frac{k}{2} - 1\right)^2}{\varrho} \right] \Phi(\varrho) = - \varrho f(\varrho)$$

definiert. Durch Kombination dieser Gleichung mit (27) erhält man

$$\Phi(r) = \int_0^1 \varrho\, G(r, \varrho)\, f(\varrho)\, d\varrho .$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der bilinearen Reihe lassen sich nun diese quellenmäßigen Funktionen $\Phi(\varrho)$ und $\Phi(r)$ nach den $\bar{L}_\nu(\varrho)$ bzw. $\bar{X}_\nu(r)$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln.

Hinsichtlich der Entwicklung unstetiger Funktionen ist genau so zu verfahren wie in § 4. Man beweist die Fouriersche Entwicklung der an der Stelle $r = \varrho$ unstetigen Funktion $G'(r, \varrho)$.

Mit Hilfe der Kneserschen Methode zeigt man dann, daß jede mit ihren beiden ersten Ableitungen im Grundgebiete stückweise stetige Funk-

tion F, für die $\frac{F(r)}{r}$ an der Stelle $r = 0$ einen endlichen Grenzwert besitzt, nach den $\bar{L}_\nu$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden kann.

Setzen wir

$$\frac{\lambda + 2\mu}{kpb^2} = c,$$

so hat die transzendente Gleichung (5) die Form

$$\frac{J_{\frac{k}{2}}(\alpha q)}{\alpha q} + c\, J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q) = 0. \tag{34}$$

Dann können wir sagen:

Die Funktionen

$$\bar{L}_\nu = C_\nu \left\{ J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r) - r^{\frac{k}{2}-1} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q) \right\},$$

$$\bar{X}_\nu = C_\nu J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r)$$

bilden ein Biorthogonalsystem, und es lassen sich willkürliche Funktionen nach den $\bar{L}_\nu$ oder $\bar{X}_\nu$ in Fouriersche Reihen entwickeln. Dabei sind die Größen α_ν Wurzeln der Gleichung (34), wo c eine beliebige Konstante ist. Die Konstante c darf auch $= 0$ und < 0 sein. Schreiben wir (34) in der Form

$$\frac{1}{c} \frac{J_{\frac{k}{2}}(\alpha q)}{\alpha q} + J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q) = 0,$$

so erhalten wir für $c = \infty$

$$J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q) = 0.$$

Dann wird $\bar{L}_\nu = \bar{X}_\nu$, wir erhalten so als Spezialfall die Entwicklung nach Orthogonalfunktionen.

Hiermit ist auch für das allgemeine Grundgebiet, dessen Rand fest ist und auf der Temperatur Null gehalten wird, die thermoelastische Aufgabe bei beliebigem $k > 2$ vollkommen gelöst.

Nach der an diesen speziellen Randwertaufgaben durchgeführten Methode läßt sich auch bei anderer Wahl der thermischen und elastischen Randbedingungen das Entwicklungsproblem mit Erfolg behandeln.

(Eingegangen am 17. Januar 1925.)

Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson.

Par

A. Rajchman et A. Zygmund[1]) à Varsovie.

§ 1.

M. Fejér[2]) qui avait introduit dans la théorie des séries trigonométriques les procédés plus généraux que la convergence ordinaire, a fait aussi le premier essai d'extension de la méthode de Riemann aux séries divergentes mais sommables par le procédé de la première moyenne arithmétique. Il a prouvé notamment, que si la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

est sommable $(C, 1)$ pour $x=x_0$ vers la somme s, alors la quatrième derivée généralisée symétrique pour $x=x_0$ de la somme de la serie (1) intégrée quatre fois terme à terme, existe et est égale à s.

En s'appuyant sur ce théorème M. M. Riesz[3]) a démontré quelques théorèmes sur l'unicité pour les séries (1) sommables $(C, 1)$ et telles que la série

$$\frac{a_0x^3}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^3} \tag{2}$$

converge vers une fonction continue.

Si intéressant que soit le théorème de M. Fejér, utilisée avec succès par M. Riesz, la voie qu'il ouvre ne nous parait pas être une voie à suivre dans la théorie d'unicité du développement trigonométrique.

---

[1]) Rédigé par A. Zygmund.

[2]) Über Fouriersche Reihen. Math. Annalen 58.

[3]) Über summierbare trigonometrische Reihen. Math. Annalen 71.

Nous croyons qu'on doit tenir compte des circonstances suivantes.

1°) L'hypothèse dont la necessité a été mise en évidence par M. Riesz, à savoir celle de la convergence de la série (2) vers une fonction continue, nous amène à croire que la double intégration devrait suffire dans le cas considéré. 2°) Quoique le théorème de M. Fejér parait être susceptible d'une extension aux séries sommables par le procédé de Cesàro d'un ordre plus élevé[4]), il ne nous donne aucun point d'attache pour l'étude des séries sommables par le procédé de Poisson. 3°) L'application de la quatrième dérivée generalisée symétrique (et, à plus forte raison, des dérivées d'ordre plus élevé) est assez embarassant.

Par conséquent on est amené à chercher une voie plus directe, et on la trouve dans la considération de la double intégration, qui suffit, au moins dans le cas où elle conduit à une série convergente vers une fonction continue[5]), c'est-à-dire dans tous les cas qui ont été considérés jusqu'à présent.

Il est bien connu que la sommabilité d'une série (même à coefficients tendant vers zéro) par le procédé des moyennes arithmétiques, et à plus forte raison par le procédé de Poisson, n'entraine pas celle de Riemann[6]). Toutefois entre les limites d'indétermination inférieures et supérieures données par le procédé de Riemann et de Poisson (ou, comme nous dirons pour abréger, entre les limites inférieures et supérieures de Riemann et de Poisson) ont lieu des inégalités qui suffisent entièrement pour la démonstration des théorèmes sur l'unicité du développement trigonométrique pour le procédé de Poisson. Si nous désignons notamment par r_1 et r_2 les limites de Riemann et par p_1, p_2 celles de Poisson inférieure et supérieure, nous avons les inégalités fondamentales

$$(A) \qquad r_1 \leqq p_2, \qquad p_1 \leqq r_2,$$

c'est-à-dire les intervalles (r_1, r_2) et (p_1, p_2) ont toujours des points communs.

Nous avons déjà dit que le procédé de Poisson est plus puissant que

---

[4]) Cf. E. Kogbetliantz, Sur l'unicité des séries trigonométriques. C. R. 177 (1923), p. 674—677. A. Rajchman et A. Zygmund, Sur les relations entre les procédés de Riemann et de Cesàro. Bull. de l'Ac. Pol. de Cracovie. 1925.

[5]) Ou, plus généralement, à la série de Fourier (en négligeant un polynôme en x) d'une fonction continue.

[6]) En généralisant le resultat de M. Fejér (loc. cit.), M. Gronwall (Crelles Journal 147 (1917)) a demontré que la série sommable par le procédé de Riemann l'est aussi par le procédé $(C, 3)$, ou même $(C, 2+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ (voir aussi Privaloff Palermo Rendic. 41 (1916), p. 202—206). Ce théorème montre que si la série considérée est sommable, par exemple, $(C, 4)$ et non sommable $(C, 3)$, elle ne peu pas être aussi sommable par le procédé de Riemann.

celui de Riemann, il est donc naturel de se demander si les inégalités (A) ne peuvent pas être précisées. On pourrait notamment supposer que les limites de Poisson sont comprises entre celles de Riemann: $r_1 \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq r_2$. Ceci parait au premier abord autant plus probable que l'on a démontré le théorème analogue pour le cas de la simple intégration. C'est le théorème de M. Grosz[7]) dont la démonstration est d'ailleurs extrêmement simple. Néanmoins le théorème en question n'est pas vrai. On peut montrer cela sur un exemple[8]). Tout au plus on peut démontrer que

$$\frac{r_2+r_1}{2} - \frac{r_2-r_1}{2}\,1{,}022\ldots \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq \frac{r_2-r_1}{2} + \frac{r_2-r_1}{2}\,1{,}022\ldots$$

Ceci améliore une proposition de M. Grosz[9]). Notre exemple montre également que cette amélioration ne peut pas être poussée plus loin.

Notre article est divisé en deux chapitres. Le chapitre I contient la démonstration du théorème sur la double intégration des séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson; le chapitre II est consacré à l'étude de la généralisation du théorème de M. Grosz.

Chapitre I.

§ 2.

Lemme I. *Soit $\varphi(t)$ une fonction intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ au sens de M. Lebesgue; posons*

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt, \tag{3}$$

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n r^n, \tag{4}$$

on a

$$\varliminf_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t^2} \leqq \varliminf_{r\to 1}\psi(r) \leqq \varlimsup_{r\to 1}\psi(r) \leqq \varlimsup_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t^2}. \tag{5}$$

Démonstration. Évidemment il suffit de démontrer la première des inégalités (5), relative aux limites inférieures; pour passer de là aux limites supérieures, on n'a qu'à tenir compte de l'identité banale:

$$\varliminf_{x\to a} f(x) = -\varlimsup_{x\to a}[-f(x)].$$

---

[7]) W. Grosz, Zur Poissonschen Summierung. Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. Wien 124 (1915), p. 1017—1037 (cf. aussi § 2). Ce théorème, très remarquable par lui même, n'a pas été jusqu'ici utilisé dans la théorie d'unicité du développement trigonométrique. Ceci tient à ce que la théorie de la dérivée première généralisée parait être plus compliquée que celle de la dérivée seconde.

[8]) Cf. § 5.

[9]) W. Grosz (loc. cit.).

La première des inégalités (5) est banale dans le cas, où $\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t^2}=-\infty$, on n'a donc qu'à envisager le cas où ceci n'a pas lieu. Soit alors k un nombre quelconque satisfaisant à l'inégalité suivante:

$$k<\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t^2} \tag{6}$$

et posons

$$\varphi_1(t)=-k\sin^2 t+\varphi(t). \tag{7}$$

Évidemment il existe un $\varepsilon>0$ tel que l'on a

$$\varphi_1(t)\geqq 0 \quad \text{pour} \quad 0\leqq t\leqq\varepsilon. \tag{8}$$

Pour $|r|<1$ on a l'identité elementaire suivante

$$\frac{r(1-r^2)}{(1-2r\cos t+r^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nr^n\frac{\sin nt}{\sin t}; \tag{9}$$

pour $|r|<1$ la série du second membre de (9) est une série uniformément convergente en t; donc il est légitime d'intégrer cette série terme à terme, après l'avoir multiplié par la fonction intégrable $\frac{2}{\pi}\varphi_1(t)$; il vient alors

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r(1-r^2)\varphi_1(t)\,dt}{(1-2r\cos t+r^2)^2}=-kr+\psi(r). \tag{10}$$

Décomposons l'intégrale du premier membre de (10) $\int_0^{\pi}$ en $\int_0^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi}$ et remarquons que

1°) en vertu des inégalités (8) on a

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{r(1-r^2)\varphi_1(t)\,dt}{(1-2r\cos t+r^2)^2}\geqq 0, \tag{11}$$

2°) pour $\varepsilon\leqq t<\pi$ on a $1-2r\cos t+r^2>4r\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$ et par suite

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{r(1-r^2)\varphi_1(t)\,dt}{(1-2r\cos t+r^2)^2}\right|\leqq\frac{1}{8\pi\sin^4\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{1-r^2}{r}\int_{\varepsilon}^{\pi}|\varphi_1(t)|\,dt. \tag{12}$$

Le second membre de l'inégalité (12) tendant vers zéro pour $r\to 1$, il en est de même du premier; en tenant compte de cette circonstance ainsi que des formules (10) et (11) on arrive à la conclusion suivante

$$-k+\lim_{r\to 1}\psi(r)\geqq 0. \tag{13}$$

Nous avons ainsi déduit l'inégalité (13) comme une conséquence de l'inégalité (6). Or ceci équivaut à la démonstration de la première des inégalités (5) et, par conséquent (d'après ce qui a été dit au début de la démonstration) aussi à l'établissement de l'autre de ces inégalités, c. q. f. d.[10]).

§ 3.

Lemme II. *Soit*

$$\lim \frac{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n}{n}=0; \tag{14}$$

[11])

posons pour $|r|<1$:

$$f(r)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\eta_n r^{n-1}, \tag{15}$$

$$\sigma(r)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\eta_n-\eta_{n+1})r^{n-1}, \tag{16}$$

alors on a

$$\varliminf_{r\to 1}\sigma(r)\leqq\varliminf_{r\to 1}f(r)\leqq\varlimsup_{r\to 1}f(r)\leqq\varlimsup_{r\to 1}\sigma(r). \tag{17}$$

Démonstration. En repetant ce qui a été dit au début du § 2, nous pouvons nous restreindre à la démonstration de la première des inégali-

---

[10]) On déduit, comme une consequence de ce lemme, le théorème suivant de M. W. Grosz (loc. cit.):

Les sommes de Poisson d'une série trigonométrique, obtenue par la simple différentiation formelle de la série de Fourier de $f(x)$ *sont comprises entre les limites d'indétermination du quotient* $\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}$ *pour* $t\to 0$.

Il suffit de poser: $\varphi(t)=\frac{1}{2}[f(x+t)-f(x-t)]\sin t$. Alors

$$n\alpha_n=\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\sin nt\,dt=\frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\sin nt\,dt$$

$$=\frac{n}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}f(t)\sin n(t-x)\,dt+\frac{n}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(t)\sin n(t-x)\,dt.$$

Comme $f(x)$ est de période 2π, on a: $\int_{-\pi+x}^{\pi+x}=\int_{-\pi}^{+\pi}=\int_0^{2\pi}$, donc

$$n\alpha_n=\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin n(t-x)\,dt=\frac{d}{dx}\left[\cos nx\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt+\sin nx\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)s\cos nt\right],$$

c. q. f. d.

[11]) Il est aisé de voir de la démonstration, qu'en réalité il suffit de supposer seulement que la suite $\{\eta_n\}$ est sommable vers zéro par le procédé de Poisson.

tés (17) et exclure le cas banal $\overline{\lim_{r\to 1}}\,\sigma(r) = -\infty$. Soit k un nombre satisfaisant à l'inégalité:

$$k < \overline{\lim_{r\to 1}}\,\sigma(r). \tag{18}$$

Posons

$$\sigma_1(r) = -k + \sigma(r); \tag{19}$$

évidemment il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'on a

$$\sigma_1(r) > 0 \quad \text{pour} \quad 1-\varepsilon < r < 1; \tag{20}$$

posons

$$f_1(r) = -k + f(r), \tag{21}$$

$$F(r) = -kr + \sum_{n=1}^{\infty}(\eta_n - \eta_{n+1})\,r^n; \tag{22}$$

on a

$$F(1) = -k + \eta_1 \tag{23}$$

(en vertu de (14)). En appliquant la transformation d'Abel au second membre de (22), on trouve:

$$\frac{F(1)-F(r)}{1-r} = -k + \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\, r^{n-1}; \tag{24}$$

en multipliant les deux membres de (24) par $2r$ et en dérivant par rapport à r on peut écrire:

$$2\left[r\,\frac{F(1)-F(r)}{1-r}\right]' = 2\,\frac{F(1)-F(r)}{(1-r)^2} - \frac{2rF'(r)}{1-r} = -2k + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\eta_n\, r^{n-1}; \tag{25}$$

en retranchant membre à membre les idéntités (25) et (24) on arrive à l'identité suivante:

$$(1+r)\,\frac{F(1)-F(r)}{(1-r)^2} - 2r\,\frac{F'(r)}{1-r} = -k + \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,\eta_n\, r^{n-1}. \tag{26}$$

En considérant pour l'instant r comme une constante, posons

$$\psi(z) = (z+r)[F(z) - F(r)] - 2r(z-r)F'(r); \tag{27}$$

on aura

$$\psi(r) = 0, \qquad \psi'(r) = 0, \tag{28}$$

$$\psi''(z) = 2F'(z) + (z+r)F''(z). \tag{29}$$

Développons $\psi(z)$ par la formule de Taylor en voisinage de $z = r$; il vient

$$\psi(z) = \tfrac{1}{2}(z-r)^2\,\psi''(\varrho), \tag{30}$$

où ϱ désigne une quantité comprise entre r et z. En rapprochant les identités (26) et (30) ainsi que les définitions (15) et (27), on trouve

$$(31)\quad f_1(r) = -k + f(r) = \frac{\psi(1)}{(1-r)^2} = F'(\varrho) + \frac{r+\varrho}{2} F''(\varrho); \quad r < \varrho < 1.$$

Rapprochons maintenant les définitions (16), (19) et (22); on trouve immédiatement pour $0 < z < 1$ les identités suivantes:

$$(32)\quad z F'(z) = \int_0^z \sigma_1(t)\,dt,$$

$$(33)\quad z F''(z) = \sigma_1(z) - F'(z) = \sigma_1(z) - \frac{1}{z}\int_0^z \sigma_1(t)\,dt.$$

En substituant $z = \varrho$ et en portant les valeurs obtenues de $F'(\varrho)$ et $F''(\varrho)$ dans la formule (31), on trouve l'identité fondamentale pour notre raisonnement

$$(34)\quad -k + f(r) = \frac{\varrho - r}{2\varrho^2}\int_0^\varrho \sigma_1(t)\,dt + \frac{r+\varrho}{2\varrho}\sigma_1(\varrho).$$

Introduirons encore une quantité positive arbitrairement petite δ et un $\eta = \eta(\delta, \varepsilon)$, ε étant le nombre tiré de la relation (20), défini par l'égalité

$$(35)\quad \frac{\eta}{2(1-\varepsilon^2)}\int_0^{1-\varepsilon} |\sigma_1(t)|\,dt = \delta.$$

Si r, et par consequent ϱ, dépasse en même temps $1-\varepsilon$ et $1-\eta$ on aura, en vertu des formules (35) et (20):

$$(36)\quad \frac{\varrho - r}{2\varrho^2}\int_0^\varrho \sigma_1(t)\,dt = \frac{\varrho - r}{2\varrho^2}\left[\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^\varrho\right] > -\delta.$$

$$(37)\quad \frac{r+\varrho}{2\varrho}\sigma_1(\varrho) > 0.$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (34), (36), (37), on arrive à l'inégalité

$$(38)\quad -k + f(r) > -\delta \quad \text{(valable pour Max } (1-\varepsilon, 1-\eta) < r < 1).$$

Le nombre δ étant aussi petit que l'on veut, le fait d'avoir déduit l'inégalité (38) de l'inégalité (18) prouve l'exactitude de la première des inégalités (17). D'après la remarque faite au début, la démonstration est donc complète.

§ 4.

Théorème. *Soit* $F(x)(0 \leqq x < 2\pi)$ *une fonction intégrable* (L), *continue pour une valeur de* x: $x = x_0$,[12]) *et soit*

$$A - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} \tag{39}$$

sa série de Fourier, c'est-à-dire

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx, \qquad a_n = -\frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx, \\ \qquad\qquad b_n = -\frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx; \end{cases} \tag{40}$$

posons de plus

$$\sigma(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^{n-1}; \tag{41}$$

alors on a les inégalités suivantes:

$$\begin{cases} \varlimsup_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2} \leqq \varlimsup_{r\to 1} \sigma(r), \\ \varlimsup_{r\to 1} \sigma(r) \leqq \varlimsup_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2}. \end{cases} \tag{42}$$

[13])

Démonstration. Nous définissons la fonction $F(x)$ en dehors de l'intervalle $(0, 2\pi)$ par la condition de periodicité

$$F(x + 2\pi) = F(x) \tag{43}$$

et nous posons

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{4}[F(x_0 + 2t) + F(x_0 - 2t) - 2F(x_0)]. \tag{44}$$

De la condition (43) on déduit immédiatement

$$\varphi(t) = \varphi(\pi - t); \tag{45}$$

et par conséquent

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\frac{\sin 2nt}{\sin t} = \int_0^{\pi} \varphi(\pi - t)\frac{\sin(2\pi n - 2nt)}{\sin(\pi - t)}\,dt = -\int_0^{\pi} \varphi(t)\frac{\sin 2nt}{\sin t} = 0. \tag{46}$$

---

[12]) Ou possédant pour $x = x_0$ une discontinuité regulière de première espèce.

[13]) Ce théorème a été d'abord établi dans le cas où $a_n = o(1)$, par A. Rajchman (Prace Mat.-Fiz. 30); cette hypothèse a été remplacé par A. Zygmund (loc. cit.) par une hypothèse moins rectrictive, celle de la convergence de la série (39). L'énoncé actuel est une nouvelle généralisation de ces résultats.

Posons de plus

$$\eta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\,dt. \tag{47}$$

Puisque la fonction $F(x)$ est continue pour $x = x_0$, on a $\varphi(0) = 0$, et par conséquent, en vertu du théorème bien connu de M. Fejér,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n}{n} = 0. \tag{48}$$

On a évidemment

$$\eta_n - \eta_{n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\frac{\sin(2n-1)t - \sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt \tag{49}$$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\cos 2nt\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[F(x_0+2t)+F(x_0-2t)]\cos 2nt\,dt.$$

En opérant les changements $x_0 + 2t = x$ et $x_0 - 2t = x$ de la variable d'intégration, on trouve

$$n^2(\eta_n - \eta_{n+1}) = -\frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos n(x-x_0)\,dx = a_n\cos nx_0 + b_n\sin nx_0. \tag{50}$$

Pour achever la démonstration nous n'avons qu'à faire appel aux lemmes I, II. Conformément aux notations employées là, specialement aux définitions (3), (4), (15), posons

$$\alpha_{2n} = 0, \qquad \alpha_{2n-1} = \eta_n, \tag{51}$$

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\eta_n r^{2n-1}, \tag{52}$$

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\eta_n r^{n-1}, \tag{53}$$

et observons que, d'après (50), le $\sigma(r)$ défini par (16) coïncide avec celui tiré de (41). On aura évidemment

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,\psi(r) = \overline{\lim_{r\to 1}}\,f(r). \tag{54}$$

Dès lors il ne reste qu'à rapprocher les relations (5), (17), (44), (54) pour obtenir les inégalités (42); c. q. f. d.

Chapitre II.

§ 5.

Passons maintenant à la construction de l'exemple dont nous avons parlé au § 1 et qui prouve que (contrairement à ce qui se passe dans le cas de la simple intégration) les limites de Poisson ne sont pas necessaire-

ment comprises entre celles de Riemann. Soit $F(x)$ une fonction intégrable (L) et de période 2π:

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{55}$$

On sait que, pour $0 < r < 1$, on a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) P(r, t - x_0)\, dt, \tag{56}$$

où

$$P(r,t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

En différentiant deux fois l'égalité (56) par rapport à x_0, on a:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \frac{d^2}{dt^2} P(r, t - x_0)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [F(x_0 + t) + F(x_0 - t)] \frac{d^2}{dt^2} P(r,t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{F(x_0+t) + F(x_0-t) - 2F(x_0)}{t^2} \right] t^2 P''(r,t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) t^2 P''(r,t)\, dt$$

où nous avons posé

$$\varphi(t) = \frac{F(x_0+t) + F(x_0-t) - 2F(x_0)}{t^2}.$$

Nous construirons une fonction $\varphi(x)$ dont la valeur absolue est $\leqq 1$ et pour laquelle

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \cdot t^2 P''(r,t)\, dt > 1. \tag{57}$$

Il est aisé de voir que l'on a

$$P''(r,t) = \frac{2r(1-r^2)[2r(\sin^2 t + 1) - (1+r^2)\cos t]}{(1 - 2r\cos t + r^2)^3},$$ [14])

donc il existe une valeur $v = v(r)$ telle que $P''(r,t)$ est négatif à l'intérieur de l'intervalle $0 < t < v$ et positif à l'intérieur de $v < t < \pi$, v vérifiant l'équation

$$\frac{\cos v}{1 + \sin^2 v} = \frac{2r}{1 + r^2} \qquad (0 \leqq r < 1). \tag{58}$$

[14]) W. Grosz, loc. cit.

M. Grosz démontre que

$$v \sim \frac{1-r}{\sqrt{3}}, \qquad \text{pour } r \to 1^{15}).$$

Étudions maintenant pour $r \to 1$ la limite de la fonction

$$\alpha(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 |P''(r,t)|\, dt.^{16})$$

Évidemment

$$\int_0^{\pi} t^2 |P''(r,t)|\, dt = \int_v^{\pi} t^2 P''(r,t)\, dt - \int_0^{v} t^2 P''(r,t)\, dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int t^2 P''(r,t)\, dt = t^2 P'(r,t) - 2t P(r,t) + 2 \int P(r,t)\, dt,$$

donc

$$2\pi\alpha(r) = [t^2 P'(r,t)]_v^{\pi} - [t^2 P'(r,t)]_0^{v} - [2t P(r,t)]_v^{\pi} + [2t P(r,t)]_0^{v} + 2\int_v^{\pi} P(r,t)\, dt - 2\int_0^{v} P(r,t)\, dt.$$

En tenant compte de ce que $P'(r,0) = P'(r,\pi) = 0$, $\int_0^{\pi} P(r,t)\, dt = \pi$, on obtient

$$2\pi\alpha(r) = -2v^2 P'(r,v) - 2\pi\frac{1-r}{1+r} + 4vP(r,v) + 2\pi - 4\int_0^{v} P(r,t)\, dt.$$

On démontre aisément que

$$-2v^2 P'(r,v) \sim \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 4vP(r,v) \sim 2\sqrt{3}, \qquad \text{pour } r \to 1;$$

il nous reste donc à étudier $\int_0^{v} P(r,t)\, dt$:

$$\int_0^{r} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}\, dt = \int_0^{v} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{v} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + rt^2} + o(1)^{17})$$

$$= \frac{1+r}{\sqrt{r}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r}}{1-r} v + o(1) \sim 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}.$$

---

15) En décomposant les deux membres de (58) suivant les puissances de v et $1-r$ il obtient $1 - \frac{3}{2}v^2 + \ldots = 1 - \frac{(1-r)^2}{2} + \ldots$

16) C'est une fonction analogue à la suite de constantes de M. Lebesgue.

17) En effet:

$$\left| \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2}} - \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + rt^2} \right| \leq \left| \frac{(1-r^2)}{(1-r)^4} \left(t - 2\sin\frac{t}{2}\right)\left(t + 2\sin\frac{t}{2}\right) \right| \leq \frac{kt^4}{(1-r)^3}$$

(k une constante).

Donc

$$2\pi\alpha(r) \sim \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + 2\pi - \frac{4}{3}\pi, \quad \text{ou} \quad \alpha(r) \sim \frac{5\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{1}{3} = 1{,}022\ldots > 1.^{18})$$

Maintenant il ne présente aucune difficulté de construire une fonction $\varphi(x)$ aux propriétés singnalées. Définissons, par l'induction, deux suites de nombres positifs: $0 < r_0 < r_1 < \ldots$, $\lim r_n = 1$, et $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$, $\lim \alpha_n = 0$. Posons $\alpha_0 = \pi$ et soit r_0 un nombre arbitraire > 0 et < 1. Supposons définies r_i et α_i pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Prenons pour r_{n+1} un nombre $> r_n$ et tel que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_n}^{\pi} t^2 |P''(r_{n+1}, t)|\, dt < \frac{1}{n+1}.$$

Cela est évidemment possible, car

$$\lim_{r\to 1}\int_{\varepsilon}^{\pi} t^2 |P''(r,t)|\, dt = 0 \qquad (\varepsilon \text{ une constante, } 0 < \varepsilon < \pi).$$

Choisissons, de plus, α_{n+1} de telle façon que

$$\int_{0}^{\alpha_{n+1}} t^2 |P''(r_{n+1}, t)|\, dt < \frac{1}{n+1}.$$

---

[18]) On en déduit aisément, que si l'on désigne par m et M resp. les limites inférieure et supérieure de Riemann d'une série quelconque, les limites de Poisson sont comprises entre $\frac{M+m}{2} - \frac{M-m}{2}\,1{,}022$ et $\frac{M+m}{2} + \frac{M-m}{2}\,1{,}022\ldots$. Nous démontrons plus loin que $1{,}022\ldots$ ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit. Le nombre $1{,}022\ldots$ est plus petit que le nombre $1 + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \sim 1{,}14\ldots$ donné par M. Grosz (loc. cit.).

Remarquons que d'une manière analogue on peut démontrer la proposition suivante: Soit

$$\Delta^2 F = F(x_0+t) + F(x_0-t) - 2F(x_0), \quad Q(r,x) = -\Sigma n^2 (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n.$$

Posons

$$r_1 = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta^2 F}{t}, \quad r_2 = \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\Delta^2 F}{t}, \quad p_1 = \lim_{r\to 1} Q(r, x_0)(1-r), \quad p_2 = \overline{\lim_{r\to 1}} Q(r, x_0)(1-r),$$

alors

$$\frac{r_1+r_2}{2\pi} - \frac{r_2-r_1}{2}\cdot\frac{5}{4\pi} \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq \frac{r_1+r_2}{2\pi} + \frac{r_2-r_1}{2}\cdot\frac{5}{4\pi}.$$

En particulier, si la fonction $F(t)$ vérifie la condition $\lim_{t\to 0} \frac{\Delta^2 F}{t} = l$ les termes de la série de Fourier de $F(x)$ différentiée formellement deux fois sont sommables (pour $x = x_0$) vers $\frac{l}{\pi}$ par le procédé de Poisson.

Maintenant, dans l'intervalle (α_{n+1}, α_n), posons $\varphi(t) = \operatorname{sign} P''(r_{n+1}, t)$. [19]) On peut prouver sans peine que pour cette fonction la condition (57) est remplie. En effet

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\cdot t^2 \cdot P''(r_{n+1}, t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\alpha_{n+1}} + \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} + \int_{\alpha_n}^{\pi}\right] > \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} \varphi(t)\cdot t^2 \cdot P''(r_{n+1}, t)\,dt - \frac{2}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} t^2\,|P''(r_{n+1}, t)|\,dt - \frac{2}{n+1} > \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2\,|P''(r_{n+1}, t)|\,dt - \frac{4}{n+1}$$

$$\sim 1{,}022\ldots > 1.$$

En modifiant légèrement la construction de $\varphi(x)$, on peut obtenir remplies simultanément la condition (57) et la condition

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\,t^2\,P''(r, t)\,dt = -1{,}022\ldots < -1.$$

On peut aisément passer de la fonction $\varphi(x)$ à $F(x)$. Supposons, pour fixer les idées, $x_0 = 0$, $F(0) = 0$, $F(-t) = F(t)$. Alors il suffit de poser $F(t) = \frac{\varphi(t)\cdot t^2}{2}$.

---

[19]) Les modifications légères de la fonction $\varphi(x)$ permettaient de la faire continue dans $(0, \pi)$ sauf pour $x = 0$.

(Eingegangen am 20. Januar 1925.)

Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson.

Par

A. Zygmund à Varsovie.

Le but de ce travail est de démontrer quelques théorèmes concernant l'unicité du développement trigonométrique pour le procédé de Poisson. Le cas des séries à coefficients tendant vers zéro était considéré par M. A. Rajchman[1]); dans ce travail nous nous occupons d'une classe des séries à coefficients non tendant vers zéro, à savoir des séries

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

qui, intégrées deux fois terme à terme, sont des séries de Fourier d'une fonction continue. En particulier dans la classe considérée se trouvent des séries (1) dont les coefficients a_n et b_n sont $= O(n^\gamma)$ $(\gamma < 1)$.

Les théorèmes sur l'unicité, pour le cas des séries (1) sommables $(C, 1)$ à coefficients non tendant vers zéro et telles que la série

$$\frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} \tag{2}$$

converge vers une fonction continue étaient établis par M. M. Riesz et M. W. H. Young[2]).

Les méthodes dont nous faisons usage diffèrent de celles de M. M. Riesz et Young qui se servent de la série (1) intégrée quatre fois

[1]) Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson (en polonais), Prace Mat.-Fiz. 30 (1919), p. 19—88.

[2]) M. Riesz, Über summierbare trigonometrische Reihen, Math. Annalen 71 (1911), p. 54—75. — W. H. Young, On trigonometrical series whose Cesàro partial summations oscillate finitely, Proc. of the London R. Soc. 81 (1914), p. 150—157.

terme à terme, tandis que nous faisons l'usage de la double intégration formelle[3]).

Les démonstrations s'appuyent sur la relation fondamentale entre les sommes de Riemann et de Poisson de la série de Fourier différentiée terme à terme deux fois. Plus précisement: Soit

$$(3) \qquad F(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

et supposons que $F(x)$ est continue pour $x = x_0$. Posons

$$(4) \qquad \begin{cases} Q(r) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\alpha_n \cos nx_0 + \beta_n \sin nx_0) r^n; \\ D(h) = \dfrac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2}. \end{cases}$$

Alors

$$(A) \qquad \underline{\lim}_{r \to 1} Q(r) \leqq \overline{\lim}_{h \to 0} D(h), \qquad \underline{\lim}_{h \to 0} D(h) \leqq \overline{\lim}_{r \to 1} Q(r)\ ^4)$$

c'est-à-dire les intervalles $(\underline{\lim} Q, \overline{\lim} Q)$ et $(\underline{\lim} D, \overline{\lim} D)$ ont des points communs.

Les résultats obtenus ici[5]) vont plus loin que ceux de M. M. Riesz et Young, non seulement à cause que le procédé de Poisson est plus puissant que le procédé $(C, 1)$, mais aussi à cause qu'ils démontrent qu'on peut aussi dans le cas des coefficients non tendant vers zéro introduire (avec certaines restrictions) des ensembles exceptionnels, appellés «ensembles d'unicité».

Dans les chapitres I—III nous nous servons de la notion de l'intégrale de M. Lebesgue et ce n'est que dans le dernier chapitre que nous montrons que nos résultats subsistent si l'on y attribue à la notion de l'intégrale un sens plus général, à savoir celui de M. M. Denjoy et Perron.

Chapitre I.

Nous énonçons ici sans démonstration quelques théorèmes connus dont nous ferons souvent usage.

---

[3]) Cf. A. Rajchman, Eine Erweiterung des de la Vallée-Poussinschen Eindeutigkeitssatzes, Monatsh. f. Math. u. Phys. 26 (1915), p. 263—283; Prace Mat.-Fiz., loc. cit.

[4]) Pour la démonstrations cf. A. Rajchman et A. Zygmund, Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson, Math. Zeitschr. ce vol.

[5]) Une partie de ces résultats était enoncée dans les C. R. du 17. IX. 1923 et du 1. X. 1923 (cf. aussi C. R., 22. X. 1923, Errata).

Théorème I.[6]) Soit $F(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (c, d) et

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-F(x)}{h^2} \leqq 0. \tag{3}$$

Alors

$$F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a) \geqq 0 \qquad (c \leqq a < x < b \leqq d). \tag{4}$$

Le théorème subsiste si l'on intervertit simultanément dans (3) et (4) le sens des inégalités. On en deduit aisément le

Théorème I'.[6]) Si la fonction continue $F(x)$ vérifie la condition

$$\underline{\lim} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \leqq 0 \leqq \overline{\lim} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \tag{3a}$$
$$(c \leqq x \leqq d),$$

$F(x)$ est linéaire dan (c, d).

On a le théorème plus général que voici.

Théorème I''.[6]) Soit $f(x)$ $(c \leqq x \leqq d)$ une fonction finie et intégrable et soit $F(x)$ une fonction continue dans (c, d) telle que (pour $c < x < d$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \leqq f(x) \leqq \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}. \tag{5}$$

Alors

$$F(x) = \int_c^x dy \int_c^y f(t)\,dt + Ax + B \qquad (A, B \text{ des constantes}).$$

Nous dirons qu'une fonction $F(x)$ est *convexe vers le bas* (ou *concave vers le haut*) dans l'intervalle (c, d) si pour $c \leqq x < y < z \leqq d$ on a

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} \leqq \frac{F(y)-F(z)}{y-z} \tag{5a}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} \leqq \frac{F(x)-F(z)}{x-z}. \tag{5b}$$

Théorème II.[6]) Toute fonction $F(x)$ continue dans (c, d) et vérifiant la condition

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \geqq 0 \qquad (c < x < d) \tag{6}$$

est convexe vers le bas dans (c, d).

Théorème III.[7]) Toute fonction $F(x)$ continue et vérifiant partout

---

[6]) Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse, t. I, 3me éd.

[7]) Cf. H. Steinhaus, Quelques propriétés des séries trigonométriques et des séries de Fourier (en polonais), Rozprawy Akad. Umiejętności, Cracovie 56 (1915).

dans (c, d) la condition (6), possède presque partout dans (c, d) la dérivée seconde généralisée, intégrable dans $(c+\varepsilon,\ d-\varepsilon)$ quelque soit $\varepsilon > 0$ et $< \frac{d-c}{2}$

Théorème IV. Si la fonction $F(x)$ est continue et de période 2π et $f(x)$ une fonction finie et intégrable et si $F(x)$ vérifie *partout* la relation (5), alors

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = -n^2\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -n^2\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx.\ ^{8})$$

Chapitre II.

Passons maintenant à la démonstration des théorèmes sur l'unicité. Nous dirons, pour abréger, que la série trigonométrique (1) vérifie la condition (F) si la série

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx + b_n\sin nx}{n^2}$$

est la série de Fourier d'une function continue $F(x)$.

Théorème I. *Supposons que la série* (1) *vérifiant la condition* (F) *possède les limites de Poisson*

$$(7)\qquad \begin{cases} P_1(x) = \underline{\lim}_{r\to 1}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,r^n\right], \\ P_2(x) = \overline{\lim}_{r\to 1}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,r^n\right] \end{cases}$$

intégrables et partout finies. Alors la série (1) *est une série de Fourier.*

p. 175—225. Le théorème résulte du fait que 1°) $F(x)$ possède partout les nombres dérivés gauches et droits non decroissants (conséquence immédiate des inégalités (5a) et (5b)) et 2°) que la fonction monotone possède presque partout la dérivée intégrable. M. Rajchman (l. c. [1])) démontre le théorème III en supposant que $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h} = 0$ partout. Cette hypothèse n'est pas nécessaire.

[8]) On sait que, si la fonction $F(x)$ vérifie la condition:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h} = 0,$$

ou, plus généralement,

$$\underline{\lim}\,\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \leqq 0 \leqq \overline{\lim}\,\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2},$$

les théorèmes I, I', I'', II, IV peuvent être un peu généralisés; on peut alors supposer que les inégalités (3), (3a), (5), (6) sont remplies partout sauf peut être dans un ensemble dénombrable.

Démonstration. On peut supposer que $a_0 = 0$. Moyennant la condition (F) on a

$$F(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \tag{8}$$

Posons:

$$D_1(x) = \underline{\lim}_{h \to 0} \frac{\Delta^2 F}{h^2}, \qquad D_2(x) = \overline{\lim}_{h \to 0} \frac{\Delta^2 F}{h^2}. \text{ [9]}$$

D'après la proposition fondamentale (A), les intervalles (P_1, P_2) et (D_1, D_2) ont des points communs. Posons de plus

$$\varphi(x) = \operatorname{Min}(D_2(x), P_2(x)). \text{ [10]}$$

Alors

$$D_1(x) \leqq \varphi(x) \leqq D_2(x), \qquad P_1(x) \leqq \varphi(x) \leqq P_2(x).$$

Comme $\varphi(x)$ est intégrable on a, d'après le théorème IV du Chap. précédent,

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx\, dx = \pi a_n, \qquad \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx\, dx = \pi b_n \qquad (n \geqq 1).$$

On peut aussi considérer la série (1) comme la série de Fourier de $P_1(x)$ ou $P_2(x)$.

Comme un corollaire du théorème I on obtient le théorème suivant [11]).

Théorème II. *Si la série trigonométrique* (1) *vérifiant la condition* (F) *possède les sommes de Poisson* $P_1(x)$ *et* $P_2(x)$ *partout finies et presque partout égales à zéro, tous les coefficients de cette série sont nuls* [12]).

Théoreme III. *Si pour la série* (1) *vérifiant la condition* (F) *les fonctions* $P_1(x)$ *et* $P_2(x)$ (7) *sont finies et la fonction* $P_1(x)$ *vérifie l'inégalité*

$$P_1(x) \geqq \psi(x) \tag{9}$$

où $\psi(x)$ *est une fonction intégrable, la série considérée est une série de Fourier* [13]).

---

[9]) Nous écrivons: $\Delta^2 F = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)$.

[10]) Les fonctions $D_2(x)$ et $P_2'(x)$ sont mesurables donc, il en est de même de $\varphi(x)$.

[11]) Dans le cas $\overline{\lim}\, a_n^2 + b_n^2 = o(1)$ les théorèmes I, II et III (pour $\psi = \text{const}$) ont été démontrés par M. Rajchman (loc. cit.).

[12]) Il suffit de supposer que $P_1(x)$ et $P_2(x)$ (ou même l'une de ces fonctions, cf. le théorème IV) sont intégrables et que presque partout $P_1(x) \leqq 0 \leqq P_2(x)$. Il est très probable que la condition d'intégrabilité peut être rejetée, mais je n'en connais pas de démonstration. Il est également probable que la condition (9) peut être remplacée par $P_2(x) \geqq \psi(x)$.

[13]) Pour les séries trigonométriques partout convergentes et $\psi = 0$ (ou plus généralement: $\psi = \text{const}$), cf. H. Steinhaus (loc. cit.). Pour les séries trigonométriques partout convergentes et ψ-intégrable quelconque le théorème en question était démontré par M. S. Banach, mais la démonstration n'était pas publiée. Cf. aussi: A. Rajchman, l. c. [1]).

Démonstration. Il suffit évidemment de prouver que $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont intégrables.

1°. Nous démontrerons d'abord que la série considérée est sommable presque partout par le procédé de Riemann vers une fonction intégrable. Supposons pour la commodité de la démonstration que $a_0 = 0$. Définissons $F(x)$ par la relation (8). Comme $\psi(x)$ est une fonction intégrable, on peut construire une fonction $z(x)$ continue et *à variation bornée* pour laquelle on a

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{z(x+h)-z(x)}{h} \leqq \psi(x). \quad [14])$$

Posons

$$\int_0^x z(t)\,dt = Z(x)$$

et considérons la différence $F(x) - Z(x)$. On voit sans peine que

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta^2[F-Z]}{h^2} \geqq \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta^2 F}{h^2} - \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta^2 Z}{h^2}.$$

Mais

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta^2 F}{h^2} \geqq \psi(x), \qquad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta^2 Z}{h^2} \leqq \psi(x); \quad [15])$$

donc $\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta^2(F-Z)}{h^2} \geqq 0$ et, d'après le théorème II du Chap. I, la fonction $F(x) - Z(x)$ est convexe vers le bas. D'après le théorème III du Chap. I, cette fonction possède presque partout la dérivée seconde généralisée intégrable. D'autre part la fonction $Z(x)$ possède la dérivée $z(x)$, continue et à variation bornée. On en déduit que $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 F}{h^2}$ existe presque partout et est intégrable[16]).

[14]) Cf. Ch. de la Vallée Poussin (l. c. [6])). Cf. aussi du même auteur: Intégrales de Lebesgue, fonctions de Baire, classes d'ensembles. Paris 1915. Évidemment on peut supposer que $\psi(x)$ est partout finie.

[15]) La première de ces inégalités résulte des inégalités fondamentales (A) et de (9); la seconde du fait que $\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta^2 Z}{h^2}$ sont comprises entre les nombres dérivés de la fonction $Z'(x) = z(x)$. Cf. p. ex. A. Rajchman, l. c. [1]).

[16]) Jusqu'ici la démonstration subsiste si l'on suppose que $P_1(x)$ est $> -\infty$. (Dans ce cas on peut encore supposer que ψ est partout finie.) Si $P_1(x_0) = -\infty$, donc $\psi(x_0) = -\infty$, le raisonnement de ci dessus tombe en défaut car il est possible (d'après les inégalités (A)) que $D_1(x_0) = -\infty$, et on ne peut pas démontrer que $\overline{\lim} \frac{\Delta^2(F-Z)}{h^2} \geqq 0$.

2°. Maintenant on peut aisément achever la démonstration. Posons

$$(9a)\quad D_1(x) = \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta^2 F}{h^2},\quad D_2(x) = \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\Delta^2 F}{h^2},\quad \varphi(x) = \operatorname{Min}[P_2(x), D_2(x)].$$

Évidemment

$$D_1(x) \leqq \varphi(x) \leqq D_2(x).$$

Il est possible que la fonction $\varphi(x)$ dévient infinie dans certain ensemble M de mesure nulle. Si l'on remarque cependant que $D_1(x)$ et $D_2(x)$ ne peuvent pas prendre simultanément des valeurs infinies et de même signe (conséquence des inégalités (A) et des hypothèses faites sur $P_1(x)$ et $P_2(x)$) on voit qu'on peut, en changeant les valeurs de φ en M, obtenir une fonction $\varphi^*(x)$, finie, intégrable et telle que

$$D_1 \leqq \varphi^* \leqq D_2.$$

Des lors la démonstration du théorème III ne diffère pas de celle du théorème I.

Du théorème III on déduit aisément la généralisation suivante du théorème I.

Théorème IV. *Si pour la série* (1) *vérifiant la condition* (F) *les fonctions* $P_1(x)$ *et* $P_2(x)$ *sont partout finies et si l'une au moins de ces fonctions est intégrable, la série* (1) *est une série de Fourier.*

Supposons, par exemple, que $P_1(x)$ est intégrable. Il suffit alors de poser dans l'énoncé du théorème III: $\psi(x) = P_1(x)$.

Chapitre III.

Cherchons maintenant à étudier le cas où $P_1(x)$ et $P_2(x)$ cessent d'être partout finies et considérons le cas le plus simple, c'est-à-dire celui du théorème II du Chap. II.

Théorème I.[17]) *Si la série*

$$(10)\quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

vérifie la condition (F) *et si pour cette série* $P_1(x) = P_2(x) = 0$ *presque partout,* $P_1(x)$ *et* $P_2(x)$ *étant finies partout sauf peut-être dans un seul point:* $x = x_0 \pmod{2\pi}$, *alors la série* (10) *est nécessairement de la forme*

$$\frac{a_0}{2} + a_0 \cos(x - x_0) + a_0' \cos 2(x - x_0) + \ldots.$$

---

[17]) Cf. A. Zygmund, Sur les séries trigonométriques, C. R. 1. X. 1923. J'apprends que dans le cas de la sommabilité (C, α) $(\alpha < 1)$ (partout, sauf peut-être pour $x = x_0$) ce théorème était démontré (mais non publié) par M. E. Kogbetliantz.

Démonstration. En faisant le changement de la variable on peut supposer $x = 0$. Posons

$$(11) \qquad F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} \qquad [18])$$

La fonction $F(x)$ est, on le voit aisément (théorème II du Chap. I) linéaire[19]) dans $(0, 2\pi)$:

$$F(x) = Ax + B \qquad (A, B \text{ des constantes}) \qquad 0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

Différentions terme à terme la série (11) dont la partie périodique est la série de Fourier. On obtient la série

$$\frac{a_0 x}{2} - A + \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}$$

sommable à l'intérieur de $(0, 2\pi)$ vers zéro par le procédé de Riemann. On en déduit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}$$

à coefficients tendant vers zéro est sommable par le procédé de Riemann à l'intérieur de $(0, 2\pi)$ vers la fonction linéaire $\frac{a_0 x}{2} - A$.

D'après le *principe de localisation* de Riemann sous sa forme classique[20]), la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}$$

converge vers zéro partout, sauf peut-être pour $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Si l'on tient compte de la formule

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

on en conclut que la série

$$a_0 \left[\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right] - A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}$$

$$= \frac{a_0 \pi}{2} - A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - a_0) \sin nx - b_n \cos nx}{n}$$

---

[18]) On voit sans peine que la série (11) converge.

[19]) On en déduit que a_n et b_n sont bornées.

[20]) B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Abh. Ges. d. Wissensch. Göttingen **13** (1867). Cf. aussi: A. Zygmund. Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques. Math. Zeitschr. **24** (1925), pp. 47—104.

à coefficients tendant vers zéro converge vers zéro partout sauf peut-être pour $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Donc $a_n - a_0 = 0, \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$, c. q. f. d.

Comme corollaire de la proposition précédente on déduit le

Théorème II. *Si la série* (10) *vérifie les prémisses du théorème précédent et si, de plus, la fonction harmonique* $f(r, x)$ *relative à la série* (1)[21]) *vérifie la condition*

$$\lim_{r \to 1} (1 - r) |f(r, x_0)| = 0 \tag{12}$$

tous les coefficients de la série considérée sont nuls.

Le théorème I peut-être généralisé de la manière suivante:

Théorème III. *Si pour la série* (10) *vérifiant la condition* (F) *les fonctions* $P_1(x)$ *et* $P_2(x)$ *sont finies partout sauf peut-être dans un nombre fini de points* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ $(0 \leqq x_i < 2\pi, \ i = 1, 2, \ldots, s)$ *et si presque partout* $P_1(x) = P_2(x) = 0$, *la série* (10) *peut être représentée sous la forme*

$$\sum_{i=1}^{s} C_i P(x - x_i) \qquad (C_i \text{ une constante pour } i = 1, 2, \ldots, s) \tag{13}$$

où

$$P(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots .$$

Démonstration. Elle s'appuye sur la théorie de la *multiplication formelle*[22]). Remarquons d'abord que 1° les coefficients de la série considérée sont bornées[23]), et 2° la série en question, ainsi que la série conjuguée, sont uniformément sommables par le procédé de Poisson partout sauf dans le voisinage de points $x_1, x_2, \ldots, x_s$.[23a]) Prenons un

---

[21]) C'est-à-dire $f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$.

[22]) Cf. A. Zygmund, l. c.[20]).

[23]) Après la double intégration formelle de la série (10) on obtient (en négligéant le terme $\frac{a_0 x^2}{4}$) la série de Fourier d'une fonction continue dont la dérivée est *à variation bornée.*

[23a]) Ceci résulte des théorèmes sur la localisation pour les séries trigonométriques et les séries conjuguées. Cf. A. Zygmund l. c.[20]), pp. 100—101 ou 89.

On peut aussi s'appuyer sur le théorème suivant (De la Vallée Poussin, Bull. de l'Ac. Belg. 1908, pp. 193—254, spéc. pp. 253—254): Si la fonction $f(x)$:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \tag{S}$$

possède (uniformément) dans (α, β) la k'ième dérivée $f^{(k)}(x)$, la série (S), différentiée

nombre $\varepsilon > 0$, suffisamment petit pour que les intervalles $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ n'aient pas des points communs. Soit $\lambda_i(x)$ une fonction de période 2π, continue avec ses cinq dérivées successives, égale à zéro en dehors de $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$; supposons de plus que $\lambda_i(x_i) = 1$, $\lambda_i'(x_i) = 0$. Posons

$$\lambda(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \ldots + \lambda_s(x), \qquad \mu(x) = 1 - \lambda(x).$$

La série (10) peut-être mise sous la forme de la somme de deux produits: 1^0 de la série (10) par la série de Fourier de $\lambda(x)$, 2^0 de la série (10) par la série de Fourier de $\mu(x)$. D'après les théorèmes sur la multiplication formelle, le produit 2^0 est une série à coefficients bornés, sommable par le procédé de Poisson partout vers zéro, donc identiquement égale à zéro. Le produit 1^0 peut être decomposé en somme de s produits de la série (10) par la série de Fourier de $\lambda_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Chacun de ces produits est une série trigonométrique à coefficients bornées sommable vers zéro partout, sauf pour $x = x_i$, et peut être donc présenté sous la forme $C_i P(x - x_i)$ c. q. f. d. [24]).

Passons maintenant aux généralisations des théorèmes du Chap. précédent.

Théorème IV. *Si la série trigonométrique* (10) *vérifiant la condition* (F) *possède les fonctions* $P_1(x)$ *et* $P_2(x)$ *presque partout égales à*

---

formellement k-fois est sommable (uniformément) par le procédé de Poisson vers $f^{(k)}(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$.

On en déduit que la série conjuguée à la série (S) différentiée $(k-1)$-fois est également sommable car la sommabilité de la série $\sum a_n$ entraîne celle de $\sum \frac{a_n}{n}$.

Remarquons encore que la sommabilité de la série conjuguée n'est pas nécessaire dans la démonstration du théorème en question. Il suffit de supposer que les termes de cette série sont sommables par le procédé de Poisson vers zéro. Ceci est indispensable pour que les théorèmes sur la multiplication formelle (dans le cas des coefficients non tendant vers zéro) soient vérifiées dans les points où les hypothèses concernant les dérivées des fonctions localisantes ne sont pas remplies (cf. A. Zygmund l. c. [20]), p. 80).

[24]) Il est aisé de voir que si la série (10) vérifiant la condition (F) possède les fonctions $P_1(x)$ et $P_2(x)$ finies partout sauf pour $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ et intégrables, cette série peut être représentée sous la forme de la série de Fourier de $P_1(x)$ [ou $P_2(x)$] et de la série de la forme (13). Il faut remarquer que la généralisation analogue du théorème III du Chap. II n'est pas vraie: on peut aisément construire des séries trigonométriques à coefficients du type $O(n^\gamma)$ $(0 < \gamma < 1)$ pour lesquelles les fonctions: $P_1(x) - P_2(x)$ sont positives et finies *partout sauf dans un point*, et cependant $P_1(x)$ $(- P_2(x))$ n'est pas intégrable. Posons par exemple: $s(x) = \frac{(x-\pi)}{x^\gamma}$ $(0 < x \leqq \pi)$, $s(-x) = s(x)$. La série obtenue par la différentiation formelle de la série de Fourier de $s(x)$ possède les propriètes démandées.

zéro, finies sauf peut-être dans un ensemble E au plus dénombrable de points, et si pour tout x_0 appartenant à E la condition (12) *subsiste, tous les coefficients de la série considérée sont nuls.*

Théorème V. *Si la série* (10) *vérifiant la condition* (F) *possède les fonctions $P_1(x)$ et $P_2(x)$ intégrables, finies sauf dans un ensemble E au plus dénombrable de points et si partout dans E la relation* (12) *subsiste, cette série est une série de Fourier.*

Théorème VI. *Si pour la série* (10) *les fonctions $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont finies partout sauf dans un ensemble E au plus dénombrable de points, dans E vérifient l'égalité* (12) *et si*

$$P_1(x) \geqq \psi(x) \tag{14}$$

où $\psi(x)$ est une fonction intégrable, la série en question est une série de Fourier.

Démonstrations. Commençons par la démonstration du théorème V, dont le théorème IV est une conséquence[24a]).

On sait que le théorème I′ du Chap. I subsiste même si l'on fait abstraction de l'inégalité (5) dans un ensemble au plus dénombrable de points, pourvu que la fonction $F(x)$ vérifie partout la condition

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h} = 0$$

ou même

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h} \leqq 0 \leqq \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h}. \tag{15}$$

[25])

Désignons par $F(x)$ la partie périodique de la série considérée intégrée deux fois terme à terme:

$$F(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Si nous prouverons que $F(x)$ vérifie l'inégalité (15), la démonstration du théorème V sera identique à celle du théorème I du Chap. précédent.

Pour x non appartenant à E l'inégalité (15) est vérifiée, car, d'après la relation fondamentale (A), il existe une suite de nombres $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$, tendant vers zéro et telle que la suite

$\frac{F(x+h_i)+F(x-h_i)-2F(x)}{h_i^2}$ est bornée, donc $\lim_{i\to\infty} \frac{F(x+h_i)+F(x-h_i)-2F(x)}{h_i} = 0$

ce qui équivaut à (15).

[24a]) La démonstration directe du théorème IV est plus facile.

[25]) Ch. J. de la Vallée-Poussin, Cours d'Analyse t. I (3me éd.). Cf. [9]).

Désignons maintenant par E_1 la partie de l'ensemble E où l'inégalité (15) n'est pas vérifiée. Je dis que l'ensemble E_1 est vide. En effet, l'ensemble E, où l'un au moins des nombres $P_1(x)$, $P_2(x)$ n'est pas fini, est du type G_δ (suivant la terminologie de M. Hausdorff), c'est-à-dire est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts[26]). On en déduit aisément que E_1 est également du type G_δ. Mais tout ensemble G_δ au plus dénombrable possède certainement des points isolés[27]). Soit x_0 un tel point et supposons qu'il soit le seul point de E_1 appartenant à l'intervalle $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$.

A l'intérieur des intervalles $(x_0-\varepsilon,\ x_0)$, $(x_0,\ x_0+\varepsilon)$ on peut appliquer le théorème I'' du Chap. I, on obtient donc (cf. [8])) que dans $(x_0-\varepsilon,\ x_0)$ et $(x_0,\ x_0+\varepsilon)$ la fonction continue $F(x)$ est respectivement

$$= \int_{x_0-\varepsilon}^{x} dy \int_{x_0-\varepsilon}^{y} \varphi(t)\,dt + Ax + B \quad \text{et} \quad = \int_{x}^{x_0+\varepsilon} dy \int_{y}^{x_0+\varepsilon} \varphi(t)\,dt + A_1 x + B_1$$

$(A,\ A_1,\ B,\ B_1$ des constantes)

où $\varphi(t)$ désigne une fonction intégrable dans $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ (cf. les définitions (9a)).

On en déduit que pour $x=x_0$ la fonction $F(x)$ possède les dérivées premières droite et gauche, donc la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h} \tag{16}$$

existe et est finie. Désignons par $l(x_0)$ sa valeur. Pour prouver que $l(x_0)=0$, il suffit de s'appuyer sur le lemme suivant:

Si $F(x)$ (de période 2π) est une fonction intégrable et si pour $x=x_0$ la limite (finie)

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h} = l(x_0)$$

existe, le terme général (pour $x=x_0$) de la dérivée seconde (formelle) de la série de Fourier de $F(x)$,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \sim F(x), \tag{15a}$$

---

[26]) C'est une conséquence du théorème général: pour toute suite $\{f_n\}$ de fonctions continues l'ensemble de points pour lesquels on a

$$\overline{\lim}\, f_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \underline{\lim}\, f_n = -\infty$$

est du type G_δ.

[27]) Tout ensemble G_δ dense en soi est de puissance du continu, cf. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 67.

à savoir $-n^2(\alpha_n \cos n x_0 + \beta_n \sin n x_0)$, *sommé par le par le procédé de Poisson, tend vers* $l(x_0)/\pi$.[28])

On voit donc (cf. (12)) que, dans le cas considéré, $l(x_0) = 0$ ce qui contredit à l'hypothèse que x_0 appartient à E_1. Nous avons ainsi démontré que E_1 est vide.

1°. Pour démontrer le théorème VI il suffit de prouver que la relation (15) est vérifiée partout. A cet effet démontrons d'abord que $\lim \frac{\Delta^2 F}{h^2}$ existe presque partout et représente une fonction intégrable. Cela est déjà demontré dans le cas où pour tout x_0 appartenant à E on a $P_1(x_0) > -\infty$.[28a]) Je dis qu'il en est de même dans le cas général. Soit

$$\frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n \cos n x + \bar{b}_n \sin n x) \tag{16a}$$

une série trigonométrique à coefficients bornés vérifiant les trois conditions suivantes:

a) $\overline{P}_1(x)$ $(= P_2(x)$ presque partout) est intégrable et $> -\infty$,

b) $\lim_{r \to 1} (1-r)\overline{P}(r, x_0) > 0$ pour tout x_0 appartenant à E,

c) $\lim \frac{\Delta^2 \overline{F}}{h^2}$ existe presque partout et représente une fonction intégrable[28b]) ($\overline{F}$, $\overline{P}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ sont des fonctions analogues aux F, P, P_1, P_2). Désignons par

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n x + B_n \sin n x)$$

---

[28]) Ou même $(C, 2+\varepsilon)$. Le lecteur construira facilement la démonstration de ce lemme. (Cf. aussi A. Rajchman et A. Zygmund, Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson, Math. Zeitschr., ce volume). La limite (15a) peut être traitée comme une sorte de discontinuité de la dérivée de la fonction $F(x)$

$$\left(\frac{F(x+h)+F(x-h)-F(x)}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x)-F(x-h)}{h}\right)$$

pour $x = x_0$, même si $F'(x_0)$ n'existe pas. On voit donc que cette discontinuité peut être caractérisée par la limite (généralisée) des termes de la série de Fourier de $F(x)$ différentiée terme à terme deux fois. C'est le théorème analogue au théorème connu de M. Fejér (Crelles Journal 142 (1913)) d'après lequel la discontinuité de $F(x)$ (si $F(x)$ est *à variation bornée*) pour $x = x_0$ (c'est-à-dire: $\lim_{h \to +0} [F(x_0+h) - F(x_0-h)]$) est mesurée (à un facteur $\frac{1}{\pi}$ près) par la limite $(C, 1)$ des termes de la série obtenue par la simple différentiation de la série de Fourier de $F(x)$.

[28a]) Cf. [16]).

[28b]) Pour construire une fonction de ce genre on peut procéder de la manière suivante. Supposons, pour fixer les idées, que dans l'intervalle $(2\pi - \eta, 2\pi)$ $(\eta > 0)$ il n'y a pas de points de E (rappelons que E est un ensemble dénombrable du

la somme des séries (10) et (16a) et soit, de plus, $\overline{\overline{F}} = F + \overline{F}$ et

$$\overline{\overline{P}}_1(x) = \lim_{r \to 1} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n x + B_n \cos n x) r^n \right].$$

Comme $\overline{\overline{P}}_1(x) > -\infty$, la dérivée seconde généralisée de $\overline{\overline{F}}$ existe presque partout et est une fonction intégrable. Il en est de même de F.

2°. Nous pouvons démontrer maintenant que la relation (15) est vérifiée partout. Cela est évident en dehors de E. Soit E_1 la partie de E ou elle n'est pas verifiée. E_1 — comme un sous-ensemble d'un G_δ dénombrable — est lui-même G_δ. Soit x_0 l'un de points isolés de E_1, le seul dans l'intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Soit $\varphi(x)$ la fonction définiée par (9a). A l'intérieur des intervalles $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ et $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ on a respectivement

$$F(x) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x} dy \int_{x_0-\varepsilon}^{y} \varphi(t)\, dt + Ax + B, \qquad F(x) = \int_{x}^{x_0+\varepsilon} dy \int_{y}^{x_0+\varepsilon} \varphi(t)\, dt + A_1 x + B_1.$$

Comme $\varphi(t)$ est intégrable dans $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, on en déduit l'existence de $F'(x_0 - 0)$ et $F'(x_0 + 0)$, donc aussi celle de $\lim \frac{\Delta^2 F(x_0)}{h} = l(x_0)$. Le raisonnement identique à celui que nous avons employé dans la démonstration du théorème précédent montre que $l(x_0) = 0$, donc E_1 est vide.

Les théorèmes de ce chapitre montrent qu'aussi dans la théorie des séries trigonométriques à coefficients non tendant vers zéro on peut introduire des ensembles d'unicité pourvu que l'on fasse quelques restrictions sur le degré d'infinitude de la fonction harmonique associée à la série considérée.

Nous avons démontré que les ensembles dénombrables sont des ensembles d'unicité de ce type. Il est naturel de se démander s'ils existent aussi des ensembles de ce type non dénombrables? Evidémment il suffit

---

type G_δ, donc ne peut être partout dense sur $(0, 2\pi)$). Soit $f(x)$ la fonction *à variation bornée* definiée comme suit

$\alpha)$ $f(0) = f(2\pi) = 0$,

$\beta)$ $f(x)$ croit pour $0 \leqq x \leqq 2\pi - \eta$,

$\gamma)$ $f(x)$ possède le saut pour tout x appartenant à E,

$\delta)$ $f(x)$ est linéaire dans $(2\pi - \eta, 2\pi)$.

On peut prendre pour la série (16a) la série de Fourier de $f(x)$ différentiée formellement. On a presque partout $\overline{P}_1 = \overline{P}_2 = f'$. La condition a) résulte d'un théorème de M. Grosz, Zur Theorie der Poissonschen Summierung, Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. Wien 124 (1915), pp. 1017–1037, d'après lequel les fonctious $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont comprises entre les nombres dérivés de f. Pour b) cf. le théorème de M. Fejér cité dans [28]).

de se borner aux ensembles mesurables B. La reponse est négative: aucun ensemble *parfait*[29]) peut être un ensemble d'unicité dans ce sens. Plus précisément: pour tout ensemble parfait P situé sur $(0, 2\pi)$ on peut faire correspondre une série trigonométrique (10) à coefficients bornés, sommable vers zéro par le procédé de Poisson en dehors de P et vérifiant dans P la condition

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n\right]=0. \tag{17}$$

En effet, soit $f(x)$ une fonction de période 2π, *continue, à variation bornée*, constante dans chaque intervalle contigu à P. Supposons que (10) désigne la série de Fourier de $f(x)$ différentiée terme à terme un fois. On sait que cette série est en dehors de P sommable vers zéro par le procédé de Poisson (même (C, ε), $\varepsilon > 0$). D'après le théorème de M. Fejér[30]), la suite $a_n\cos nx + b_n\sin nx$ sommée par le procédé de la première moyenne arithmétique (donc, a plus forte raison, par le procédé de Poisson) donne $\frac{1}{\pi}$-fois le saut de $f(x)$, et comme $f(x)$ est continue on obtient la relation (17).

Il serait intéressant de savoir s'il est possible d'arriver à des ensembles d'unicité non dénombrables (pour les séries à coefficients non tendant vers zéro) par l'introduction des hypothèses plus restrictives sur l'ordre d'infinitude de la fonction harmonique[31]).

Chapitre IV.

Dans les théorèmes sur l'unicité que nous venons de démontrer le mot *intégrable* était employé dans le sens qui est du à M. Lebesgue. Mais il est à remarquer que ces théorèmes subsistent si l'on y remplace le mot *intégrable* par *intégrable au sens de M. M. Denjoy-Perron*[32]).

En effet, les démonstrations des théorèmes sur l'unicité s'appuyent au fond sur les deux propositions fondamentales: 1° sur les relations (A) et 2° sur le théorème I″ (Chap. I) de M. de la Vallée Poussin (le théorème IV du Chap. I en est une consequénce et sa démonstration s'obtient par l'application double de l'intégration *par parties*).

---

[29]) Donc *à fortiori* aucun ensemble mesurable B et non dénombrable.

[30]) Cf. la remarque[28]).

[31]) Par exemple on peut poser le problème suivant: Est-ce-qu'il existe des ensembles d'unicité *non dénombrables*, dans le cas de séries à coefficients non tendant vers zéro, si l'on suppose que $f(r,x)=O\left(\frac{1}{(1-r)^{\alpha}}\right)$, $0<\alpha<1$?

[32]) Cf. Denjoy, Ann. de l'Ec. Normale (1917); Hake, Math. Ann. **83**; Alexandroff, Math. Zeitschr. **20**; Locman, Math. Ann. **93**.

L'idée de la démonstration du théorème I″ (Chap. IV) consiste en l'application des fonctions *majorantes* et *minorantes*. On sait, notamment, que pour toute fonction $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ intégrable L et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\varphi_\varepsilon(x)$ et $\psi_\varepsilon(x)$ telles que

$$1°) \quad 0 \leqq F(x) - \varphi_\varepsilon(x) \leqq \varepsilon, \qquad 2°) \quad 0 \leqq \psi_\varepsilon(x) - F(x) \leqq \varepsilon;$$

(18)
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a \leqq a \leqq b)$$

et que

(19)
$$\overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\varphi_\varepsilon(x+h) - \varphi(x)}{h} \leqq f(x), \qquad \underline{\lim_{h \to 0}} \frac{\psi_\varepsilon(x+h) - \psi_\varepsilon(x)}{h} \geqq f(x).$$

Maintenant il suffit de remarquer que l'existence des fonctions $\varphi_\varepsilon(x)$ et $\psi_\varepsilon(x)$ vérifiant les conditions (18) 1°, 2° et (19), *est une condition nécessaire et suffisante* pour que la fonction $F(x)$ soit l'intégrale de M. Denjoy-Perron de $f(x)$. On obtient donc, *en répétant mot pour mot* la démonstration du théorème I″ (Chap. I)[33]), que ce théorème (ainsi que le théorème IV du Chap. I)[34]) subsistent pour l'intégrale de M. M. Denjoy-Perron[35]). Également subsistent leurs généralisations, mentionnées dans[8]).

Maintenant les démonstrations des théorèmes sur l'unicité pour l'intégrale de M. M. Denjoy-Perron ne diffèrent pas de celles données dans les Chap. II et III. Il sera utile de se rappeller que si f_1 et f_2 $(f_1 \leqq f_2)$ sont intégrables au sens de M. Denjoy-Perron, il en est de même pour toute fonction mesurable $f(x)$ comprise entre $f_1(x)$ et $f_2(x)$ $(f_1 \leqq f \leqq f_2)$.

Faisons encore une remarque qui est utile dans ces démonstrations. On sait que les coefficients de Fourier des fonctions intégrables au sens de M. M. Denjoy-Perron ne tendent pas nécéssairement vers zéro, mais ils sont sommables vers zéro par le procédé $(C, 1+\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.[35a]) Plus généralement: Soit

(20)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

---

[33]) Cf. par exemple Ch. de la Vallée Poussin, C. R. **155** (1912) p. 951—953.

[34]) Si $f(x)$ est intégrable au sens de M. Denjoy les intégrales $\int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sin nx}\,dx$ existent, donc on peut appliquer l'intégration *par parties* (Denjoy l. c.).

[35]) Remarquons que si dans (19) $f(x)$ est intégrable au sens de M. Denjoy-Perron, $\varphi'_\varepsilon(x)$ et $\psi'_\varepsilon(x)$ existent presque partout et sont intégrables dans le même sens. L'existence des $\varphi'_\varepsilon(x)$ et $\psi'_\varepsilon(x)$ presque partout, découle des théorèmes connus de M. Denjoy (Journ. d. Math. 1915) sur les nombres dérivées des fonctions continues. Remarquons maintenant que $\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)$ est une fonction monotone, donc $\psi'_\varepsilon(x) - \varphi'_\varepsilon(x)$ est intégrable L. Pour démontrer, par exemple, l'intégrabilité (au sens de M. M. Perron-Denjoy) de la fonction $\psi'_\varepsilon(x)$ il suffit de remarquer que 1° $\psi'_\varepsilon(x) = f(x) + [\psi'_\varepsilon(x) - f(x)]$ et que 2° $0 \leqq \psi'_\varepsilon(x) - f(x) \leqq \psi'_\varepsilon(x) - \varphi'_\varepsilon(x)$.

[35a]) Dans les applications suffit la sommabilité par le procédé de Poisson.

la série obtenue par la différentiation formelle de la série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n} \tag{21}$$

d'une fonction partout continue $F(x)$, alors

$$\begin{aligned} &1°) \quad (C, 1+\varepsilon) \lim_{n\to\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0, \\ &2°) \quad (C, 1+\varepsilon) \lim_{n\to\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

L'égalité (22, 1°) résulte du fait que pour toute fonction $F(x)$ intégrable (L) et de période 2π, le saut $\lim_{h\to 0}[F(x+h) - F(x-h)]$ est égal $\left(\text{à facteur } \frac{1}{\pi} \text{ près}\right)$ à la limite $(C, 1+\varepsilon)$ des termes de la série de Fourier de $F(x)$ *différentiée un fois*[36]).

Pour obtenir l'égalité (22, 2°) soit $\sum_0^{\infty} \alpha_k$ une série quelconque. Désignons par s_n et σ_n respectivement la $n^{\text{ième}}$ somme partielle et la moyenne arithmétique des $n+1$ premières sommes partielles de cette série $\left(s_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,\ \sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1},\ n = 0, 1, \ldots\right)$. On a l'égalité suivante

$$s_n - \sigma_n = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n}{n+1}.$$

Appliquons cette égalité à la série (21). Si l'on tient compte encore de la sommabilité (C, ε) de la série (21) pour tout $\varepsilon > 0$ (M. Riesz et Chapman) et de l'équivalence $(C, \alpha)(C, \beta) \sim (C, \alpha+\beta)$ [37]) on obtient aisément l'égalité (22, 2°).[38])

---

[36]) La démonstration de ce théorème ne présente pas des difficultés. Cf. p. ex. A. Zygmund, Sur un théorème de M. Gronwall, dans Bull. de l'Ac. de Cracovie, 1925.

[37]) C'est-à-dire la superposition des moyennes (C, α) et (C, β) est équivalente à $(C, \alpha+\beta)$ $(\alpha, \beta, \alpha+\beta > -1)$. Cf. F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen. Math. Zeitschr. 9 (1921) p. 90. E. Kogbetliantz, C. R. 168, p. 1090, et 178.

[38]) Remarquons, en passant, que le raisonnement tout à fait analogue montre que la série *conjuguée* à celle de Fourier de la fonction $F(x)$ intégrable (L), dans un point $x = x_0$ de continuité de $F(x)$, ou est sommable (C, ε) ou n'est sommable par aucune moyenne arithmétique.

(Eingegangen am 20. Januar 1925.)

Sur un théorème de la théorie de la sommabilité.

Par

A. Zygmund à Varsovie.

§ 1.

M. M. Riesz[1]) a démontré le théorème suivant:

Théorème. *Toute suite (série) finie* (C, α) *et limitible (sommable)* (C, β) $(0 \leqq \alpha < \beta)$ *est limitible (sommable)* $(C, \alpha + \varepsilon)$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

La démonstration de ce théorème que je me permets de donner ici (pour $\alpha > -1$) me parait être simple et élémentaire. Elle s'obtient par l'application réitérée du lemme suivant:

Lemme: *Toute suite* $\{a_n\}$ 1° *finie* (C, α) *et* 2° *limitible* $(C, \alpha+1)$ $(\alpha > -1)$[2]) *l'est aussi* $(C, \alpha + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

Supposons que $(C, \alpha+1)\text{-}\lim a_n = 0$ et que $0 < \varepsilon < 1$. Soit

$$(1-x)^\gamma \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(\gamma)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^{\gamma+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\gamma)} x^n; \qquad A_n^{(\gamma)} = \binom{n+\gamma}{n} \sim \frac{n^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \qquad (\gamma \neq -1, -2, \ldots).$$

Il faut démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(\alpha+\varepsilon)}}{A_n^{(\alpha+\varepsilon)}} = 0.$$

On voit sans peine que

$$S_n^{(\alpha+\varepsilon)} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{(\varepsilon-1)} S_k^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{[\theta n]} + \sum_{k=[\theta n]+1}^{n} = J_n + K_n \qquad \left(\frac{1}{2} < \theta < 1\right).$$

---

[1]) Acta Univ. Hung. 1 (1922). (Pendant la correction des épreuves M. Knopp m'a fait obligeamment remarquer que le théorème en question se trouve démontré encore dans le travail de M. A. F. Andersen: Studier over Cesàros Summabilitetsmethode, Copenhague 1921.) (15. XII. 25. L'idée de la démonstration de M. Anderson et la mienne sont, au fond, idéntiques.)

[2]) On voit de la démonstration du lemme qu'il subsiste pour $\alpha > -2$ (et $\neq -1$).

Pour évaluer K_n nous nous appuyons sur 1°; la condition 2° nous permet d'évaluer J_n.

$$|K_n| \leqq \sum_{k=[n\theta]+1}^{n} A_{n-k}^{(\varepsilon-1)} \left|S_k^{(\alpha)}\right| \leqq C_1 n^{\alpha} \sum_{k=[n\theta]+1}^{n} A_{n-k}^{(\varepsilon-1)} \leqq C_2 n^{\alpha} \sum_{k=0}^{n-[n\theta]} k^{\varepsilon-1}. \quad ^{3})$$

On voit aisément que si θ est assez voisin à 1, on a $\left|\frac{K_n}{A_n^{(\alpha+\varepsilon)}}\right| < \frac{\delta}{2} (n > n_0)$.

δ étant une constante positive arbitraire, donnée à l'avance.

θ étant ainsi fixé, on démontre que $J_n = o(A_n^{(\alpha+\varepsilon)})$. En effet: d'après la transformation d'Abel:

$$|J_n| = \left|\sum_{k=0}^{[\theta n]} A_{n-k}^{(\varepsilon-1)} S_k^{(\alpha)}\right| = \left|\sum_{k=0}^{[\theta n]} A_{n-k}^{(\varepsilon-2)} S_k^{(\alpha+1)}\right| + o(n^{\alpha+\varepsilon}) \leqq \frac{C_3}{[n(1-\theta)]^{2-\varepsilon}} \sum_{k=0}^{[n\theta]} o(n^{\alpha+1}) + o(n$$

$$= \frac{C_3\, o(n^{\alpha+2})}{[n(1-\theta)]^{2-\varepsilon}} = o(n^{\alpha+\varepsilon}) = o\left(A_n^{(\alpha+\varepsilon)}\right) < \frac{\delta}{2} A_n^{(\alpha+\varepsilon)} \quad \text{pour } n > n_1.$$

Donc

$$\left|\frac{S_n^{(\alpha+\varepsilon)}}{A_n^{(\alpha+\varepsilon)}}\right| < \delta \text{ pour } n > n_2 \qquad (n_2 = \max(n_0, n_1)) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

M. Riesz a démontré (l. c.) un théorème plus général, concernant les *moyennes typiques* ($\alpha \geqq 0$). On voit sans peine que la démonstration de ci-dessus subsiste aussi dans ce cas général (étant même un peu plus simple).

§ 2.

Le théorème cité de M. Riesz pour les moyennes typiques peut être complété par la proposition suivante:

Théorème. *Si la série* Σa_n *est finie* (R, e^{λ}, α) *et sommable* (R, e^{λ}, β) $(0 < \alpha < \beta)$, *elle est sommable* (R, λ, α).

Ou, plus généralement:

Théorème. *Si la série* Σa_n *est sommable* (R, e^{λ}, β) *et pour certain* $\alpha < \beta$:

(a) $$C_{e^{\lambda}}^{(\alpha)}(x) = o(x^{\alpha} \log^{\alpha} x), \quad ^{4}) \qquad (\alpha > 0)$$

la série considérée est sommable (R, λ, α).

---

^{3}) $C_1, C_2, \ldots$ sont des constantes indépendantes de n.

^{4}) Notation de M. M. Hardy et Riesz („The general theory of Dirichlet's series", 1915). On a

$$C_{\lambda}^{(0)}(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n, \qquad C_{\lambda}^{(\alpha)}(x) = \alpha \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} C_{\lambda}^{(0)}(t)\, dt \qquad (\alpha > 0).$$

(Fortsetzung der Fußnote 4 auf nächster Seite.)

Ces théorèmes généralisent la proposition d'après laquelle toute série sommable (R, e^{λ}, α) l'est aussi (R, λ, α). Leurs démonstrations sont tout à fait analogues à celle du dernier théorème [5]).

Démonstration. Nous pouvons supposer que β est un entier et que (R, e^{λ}, β)-$\Sigma a_n = 0$, c'est-à-dire que $C_{e^{\lambda}}^{(\beta)}(x) = o(x^{\beta})$. Posons $e^{\lambda_n} = l_n$. On a:

$$\alpha^{-1} C_{\lambda}^{(\alpha)}(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} C_{\lambda}^{(0)}(t)\, dt = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} C_l^{(0)}(e^t)\, dt.$$

Donc

$$\alpha^{-1} C_{\lambda}^{(\alpha)}(\log x) = \int_1^x \frac{(\log x - \log t)^{\alpha-1}}{t} C_l^{(0)}(t)\, dt = \frac{1}{\beta!} \int_1^x \frac{(\log x - \log t)^{\alpha-1}}{t} \frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}} C_l^{(\beta)}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\beta!} \int_1^x \psi(t) B^{(\beta)}(t)\, dt$$

où

$$\psi(t) = \frac{(\log x - \log t)^{\alpha-1}}{t}, \qquad B(t) = C_l^{(\beta)}(t) = o(t^{\beta}).$$

On a

$$\int_1^x \psi(t) B^{(\beta)}(t)\, dt = [\psi(t) B^{(\beta-1)}(t) - \psi'(t) B^{(\beta-2)}(t) + \ldots$$

$$+ (-1)^k \psi^{(k)}(t) B^{(\beta-k-1)}(t) + \ldots + (-1)^{\beta-1} \psi^{(\beta-1)}(t) B(t)]_1^x$$

$$+ (-1)^{\beta} \int_1^x \psi^{(\beta)}(t) B(t)\, dt.$$

1° Supposons d'abord α entier. Remarquons que $B(1) = B'(1) = B''(1) = \ldots = 0$ et que $\psi^{(k)}(x) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, \alpha - 2$. Remarquons encore que de la condition $C_l^{(\alpha)}(x) = o(x^{\alpha} \log^{\alpha} x)$ résulte: $C_l^{(\gamma)}(x) = o(x^{\gamma} \log^{\alpha} x)$ pour tout $\gamma > \alpha$.

Évaluons maintenant les termes $V_k(t) = (-1)^k \psi^{(k)}(t) B^{(\beta-1-k)}(t) = A_k \psi^{(k)}(t) C_l^{(k+1)}(t)$ pour $k = \alpha - 1, \ldots, \beta - 1$ (A_k sont des constantes). On a:

$$\text{(A)} \qquad \psi^{(k)}(t) = \frac{1}{t^{k+1}} \sum_s H_{k,s} (\log x - \log t)^{\alpha-1-s}$$

($H_{k,s}$ des constantes, $0 \leqq s \leqq \alpha - 1$)

Si $\lambda_n = \log n$ la condition (a) peut être remplacée par

$$\frac{S_n^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}} = o(\log^{\alpha} n).$$

On peut assez aisément démontrer que cette dernière condition entraîne (a). C'est au fond la même idée qui permet de démontrer que la sommabilité (C, α) implique celle de (R, n, α).

[5]) Cf. Hardy et Riesz, l. c. p. 30.

donc

$$V_k(t) = \frac{A_k\, C_t^{(k+1)}(t)}{t^{k+1}} \sum_s H_{k,s} (\log x - \log t)^{\alpha-1-s} \quad (k = \alpha-1, \ldots, \beta-1).$$

Décomposons les termes de $V_k(t)$ en deux groupes: $V_k(t) = \overline{V}_k(t) + \overline{\overline{V}}_k(t)$ dont le premier contient les termes correspondant à $\alpha - 1 - s > 0$ et le second tous les autres. Évidemment $[\overline{V}_k(t)]_1^x = 0$. D'autre part: $[\overline{\overline{V}}_k(t)]_1^x = \overline{\overline{V}}_k(x) = O\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right) \cdot o(x^{k+1} \log^\alpha x) = o(\log^\alpha x)$. Enfin

$$\int_1^x \psi^{(\beta)}(t) B(t)\, dt = \int_1^x O\left(\frac{\log^{\alpha-1} x}{t^{\beta+1}}\right) o(t^\beta)\, dt = o(\log^\alpha x).$$

2° Considérons maintenant le cas de α non entier. En intégrant par parties:

$$\beta!\, \alpha^{-1} C_\lambda^{(\alpha)}(\log x) = \int_1^x \psi(t) B^{(\beta)}(t)\, dt = \Big[\sum_{k=0}^{[\alpha-1]} (-1)^k \psi^{(k)}(t)\, B^{(\beta-1-k)}(t)\Big]_1^x$$

$$+ (-1)^{[\alpha]} \int_1^x \psi^{[\alpha]}(t) B^{(\beta-[\alpha])}(t)\, dt = (-1)^{[\alpha]} \int_1^x \psi^{[\alpha]}(t) B^{(\beta-[\alpha])}(t)\, dt.$$

On a:

$$\int_1^x = \int_1^{\frac{x}{3}} + \int_{\frac{x}{3}}^x .$$

Évidemment

$$(-1)^{[\alpha]} \int_1^{\frac{x}{3}} \psi^{[\alpha]}(t) B^{(\beta-[\alpha])}(t)\, dt = \Big[\sum_{k=[\alpha]}^{\beta-1} (-1)^k \psi^{(k)}(t) B^{(\beta-1-k)}(t)\Big]_1^{\frac{x}{3}}$$

$$+ (-1)^\beta \int_1^{\frac{x}{3}} \psi^{(\beta)}(t) B(t)\, dt = \Big[\sum_{k=[\alpha]}^{\beta-1} A_k \psi^{(k)}(t)\, C_t^{(k+1)}(t)\Big]_1^{\frac{x}{3}} \quad {}^{5a})$$

$$+ (-1)^\beta \int_1^{\frac{x}{3}} \psi^{(\beta)}(t) B(t)\, dt = o(\log^\alpha x) + \int_1^{\frac{x}{3}} (\log x - \log t)^{\alpha-1} o\left(\frac{1}{t}\right) dt = o(\log^\alpha x)$$

Il ne reste qu'étudier l'intégrale

$$\int_{\frac{x}{3}}^x \psi^{[\alpha]}(t) B^{(\beta-[\alpha])}(t)\, dt = A \int_{\frac{x}{3}}^x \psi^{[\alpha]}(t)\, C_t^{[\alpha]}(t)\, dt. \quad {}^{5a})$$

On voit que (cf. (A))

$$\psi^{[\alpha]}(t) = \frac{1}{t^{[\alpha]+1}} \sum_s H_{[\alpha],s} (\log x - \log t)^{\alpha-1-s} \qquad (0 \leqq s = [s] \leqq [\alpha] < \alpha).$$

${}^{5a})$ $\overline{A}_k$ et A sont des constantes.

Considérons l'intégrale

$$J_s = \int_{\frac{x}{3}}^{x} \frac{1}{t^{[\alpha]+1}} (\log x - \log t)^{\alpha-1-s} C_t^{[\alpha]}(t)\, dt$$

$$= \int_{\frac{x}{3}}^{x} \frac{1}{t^{[\alpha]+1}} \left(\frac{\log x - \log t}{x-t}\right)^{\alpha-s-1} (x-t)^{\alpha-s-1} C_t^{[\alpha]}(t)\, dt$$

$$= \int_{\frac{x}{3}}^{x} \frac{1}{t^{[\alpha]+1}} \left(\frac{\log x - \log t}{x-t}\right)^{\alpha-1-s} (x-t)^{[\alpha]-s} (x-t)^{\alpha-[\alpha]-1} C_t^{[\alpha]}(t)\, dt.$$

Remarquons que $\frac{1}{t^{[\alpha]+1}}$ et $(x-t)^{[\alpha]-s}$ sont des fonctions décroissantes de t $(0 < t < x)$; $\left(\frac{\log x - \log t}{x-t}\right)^{\alpha-1-s}$ croit avec $t\,(0 < t < x)$ pour $\alpha - 1 - s < 0$, décroit pour $\alpha - 1 - s > 0$ et tend vers $x^{s+1-\alpha}$ pour $t \to x$. Donc d'après le second théorème de la moyenne:

$$|J_s| = \left(\frac{3}{x}\right)^{[\alpha]+1} \left(\frac{2}{3}x\right)^{[\alpha]-s} \left(\frac{3}{2x}\log 3\right)^{\alpha-s-1} \left| \int_{\frac{x}{3}}^{\xi} (x-t)^{\alpha-[\alpha]-1} C_t^{[\alpha]}(t)\, dt \right|$$

$$\leqq C_4\, x^{-\alpha} \operatorname*{Max}_{0<t<x} \left| C_t^{(\alpha)}(t) \right| [6]) = o(\lg^{\alpha} x) \quad \left(\text{pour } \alpha - 1 - s > 0,\ \frac{x}{3} < \xi < x\right)$$

$$|J_s| = \left(\frac{3}{x}\right)^{[\alpha]+1} \left(\frac{2}{3}x\right)^{[\alpha]-s} \left| \int_{\frac{x}{3}}^{\xi_1} \left(\frac{\log x - \log t}{x-t}\right)^{\alpha-1-s} (x-t)^{\alpha-[\alpha]-1} C_t^{[\alpha]}(t)\, dt \right|$$

$$\leqq C_5\, x^{-\alpha} \left| \int_{\xi_2}^{\xi_1} (x-t)^{\alpha-[\alpha]-1} C_t^{[\alpha]}(t)\, dt \right| \leqq C_6\, x^{-\alpha} \operatorname*{Max}_{0<t<x} \left| C^{(\alpha)}(t) \right| = o(\log^{\alpha} x)$$

$$\left(\text{pour } \alpha - 1 - s < 0,\ \frac{x}{3} < \xi_2 < \xi_1 < x\right).$$

Donc:

$$C_t^{(\alpha)}(\log x) = o(\log^{\alpha} x), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

La même démonstration prouve que si la série Σa_n est sommable (R, λ, β) et $C_{\lambda}^{(\alpha)}(x) = o(x^{\alpha} \log^{\alpha} x\, \psi(x))$ $(0 < \alpha < \beta,\ \psi(x)$-une fonction non décroissante et tendant vers $+\infty$ avec $x)$, on a $C_{\log \lambda}^{(\alpha)}(\log x) = o(\log^{\alpha} x\, \psi(x))$, c'est-à-dire

$$C_{\log \lambda}^{(\alpha)}(x) = o(x^{\alpha} \psi(e^x)).$$

---

[6]) Cf. Hardy et Riesz, l. c. p. 29 (lemme 8).

En appliquant plusieurs fois ce théorème on en déduit la proposition suivante:

Si la série Σa_n *est sommable* (R, λ, β) *et*

$$C_\lambda^{(\alpha)}(x) = o(x^\alpha \log^\alpha x \log_2^\alpha x \dots \log_k^\alpha x) \qquad (0 < \alpha < \beta),$$

cette série est sommable $(R, \log_k \lambda, \alpha)$.

Comme une application de cette proposition citons le théorème suivant (analogue au théorème connu de M. M. Riesz): *Pour que la série* $\Sigma a_n x^n$ *soit sommable* $(R, \log_k n, \alpha)$ $(\alpha > 0)$ *dans les points réguliers du cercle* $|x| = 1$, *il faut et il suffit que* $a_n = o[(n \log n \dots \log_k n)^\alpha]$. Nous y reviendrons à une autre occasion.

(Eingegangen am 22. Mai 1925.)

Une remarque sur un théorème de M. Kaczmarz.

Par

A. Zygmund à Varsovie.

Dans sa note, publiée dans Math. Zeitschrift, M. Kaczmarz[1]) démontre la proposition suivante:

Toute série de fonctions ortogonales

$$f \sim \sum a_n \varphi_n \tag{8}$$

(*où* $f \in L^2$, $\varphi_n \in L^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$) *sommable presque partout par le procédé de Poisson, l'est aussi* $(C, 1)$.

En modifiant légèrement la démonstration on peut remplacer dans cet enoncé la sommabilité $(C, 1)$ par $(C, \frac{1}{2} + \delta)$ $(\delta > 0)$. Il suffit de tenir compte de deux propositions suivantes

1° Toute série $\sum a_n$, convergente (ou même sommable par le procédé de Poisson), vérifiant la condition

$$\sum n |a_n|^2 < \infty$$

est sommable $(C, -\frac{1}{2} + \delta)$ $(\delta > 0)$. [2])

2° La superposition des moyennes (C, α) et (C, β) équivaut à $(C, \alpha + \beta)$:

$$(C, \alpha)\ (C, \beta) \sim (C, \alpha + \beta) \quad (\alpha, \beta, \alpha + \beta > -1). \text{ [3])}$$

En effet, désignons par $\sigma_n^{(r)}$ la suite de moyennes de Cesàro d'ordre r de la série (S). M. Kaczmarz démontre (l. c.) la convergence presque partout de la série

$$\sum n (\sigma_n^{(1)} - \sigma_{n-1}^{(1)})^2.$$

---

[1]) Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 263–270.

[2]) G. H. Hardy and J. Littlewood, Some theorems concerning Dirichlets series, Messenger of Math. Nr. 513 (1914).

[3]) F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen, Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 90.

Supposons, ce qui est permis, que la suite $\sigma_n^{(1)}$, c'est-à-dire la série $\sum(\sigma_n^{(1)} - \sigma_{n-1}^{(1)})$ converge presque partout. D'après la proposition 1°, cette série, ou la suite $\sigma_n^{(1)}$, est sommable $(C, -\frac{1}{2}+\delta)$ $(\delta > 0)$, donc (cf. 2°) la suite $\sigma_n^{(\frac{1}{2}+\delta)}$ converge presque partout, c. q. f. d.[4])

---

[4]) *Remarque* (9. XII. 1925). Pendant la correction des épreuves j'ai remarqué que la série $\sum n(\sigma_n^{(r)} - \sigma_{n-1}^{(r)})^2$ converge (presque partout) pour $r > {}_2$; la demonstration de ci-dessus prouve donc que dans le théorème de M. Kaczmarz on peut remplacer $(C, 1)$ par (C, δ) $(\delta > 0)$. Si la série $\sum |a_n|^2 n^k$ converge $(0 < k < 2)$, la série (S) est sommable presque partout $\left(C, -\frac{k}{2}+\delta\right)$.

(Eingegangen am 11. September 1925.)

Zur Begründung der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen.

Von

D. Enskog in Gävle (Schweden).

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich eine einfache Methode zur numerischen Auflösung linearer Integralgleichungen entwickelt. Die Diskussion der Lösung ergab direkt die wichtigsten der Fredholmschen Sätze. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich auch die übrigen aus den früheren Resultaten ergeben, und wir erhalten außerdem das Theorem von Schur[2]). Der Beweis ist elementar und setzt die Kenntnis der genannten Auflösungsmethode nicht voraus. Die Ausführungen zeigen übrigens Verwandtschaft mit der Schmidtschen Theorie der symmetrischen Integralgleichung[3]) und scheinen mir dazu eine Ergänzung bilden zu können[4]).

Wir stützen uns auf die folgenden Fredholmschen Sätze, die wir schon bewiesen haben:

Die Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

ist entweder für beliebiges $f(s)$ lösbar, oder die homogene transponierte Gleichung

$$\chi(s) - \int_a^b K(t,s)\chi(t)\,dt = 0 \tag{2}$$

besitzt wenigstens eine normierte Lösung. Im letzteren Falle ist (1)

[1]) Eine allgemeine Methode zur Auflösung von linearen Integralgleichungen. Diese Zeitschr. 24 (1926), S. 670.

[2]) Math. Annalen 66 (1909), S. 501.

[3]) Math. Annalen 63 (1907), S. 433.

[4]) Während der Korrektur hat mir Herr Professor Dr. L. Neder verschiedene Verbesserungsvorschläge gemacht, wofür ich hiermit bestens danke.

dann und nur dann lösbar, wenn $f(s)$ zu jeder Lösung von (2) orthogonal ist[5]).

Der Kern soll eine reelle oder komplexe Funktion der reellen Veränderlichen s und t im Gebiet $a \leqq \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \leqq b$ sein. Wir benutzen ferner die Voraussetzung, daß die Integrale

$$\int |K(s,t)|^2 ds, \qquad \int |K(s,t)|^2 dt, \qquad \iint |K(s,t)|^2 ds\, dt$$

existieren und beschränkt sind. Die Integrationen sollen hier und im folgenden stets über das Grundgebiet erstreckt werden. Der Kürze halber bezeichnen wir jede nicht identisch verschwindende Lösung von (2) als eine χ-Funktion, jede solche der homogenen ursprünglichen Gleichung

$$\psi(s) - \int K(s,t)\psi(t)\,dt = 0 \tag{3}$$

als eine ψ-Funktion des Kernes.

§ 1.

Die Fredholmschen Sätze.

Ist die homogene Gleichung (2) lösbar, so kann man, wie wir jetzt zeigen wollen, zu einem neuen Kern übergehen, wobei man leicht überblickt, wie sich die Zahl der linear unabhängigen Nullösungen ändern kann.

Erster Fall. Es besitze der Kern q linear unabhängige ψ-Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_q(s)$[6]) und r linear unabhängige χ-Funktionen $\chi_1(s), \ldots, \chi_r(s)$, wo $q \geqq 1$, $r \geqq 1$, und es sei wenigstens eine ψ-Funktion zu wenigstens einer χ-Funktion nicht orthogonal. Dann sei, was offenbar immer möglich ist[7]), ein solches System linear unabhängiger ψ- und χ-Funktionen hergestellt, daß $\psi_1(s), \ldots, \psi_p(s)$ und $\chi_1(s), \ldots, \chi_p(s)$ ein biorthogonales System bilden $(1 \leqq p \leqq \min(q,r))$, daß jede der Funktionen $\psi_{p+1}(s), \ldots, \psi_q(s)$ zu jeder χ-Funktion orthogonal ist, und daß von $\chi_{p+1}(s), \ldots, \chi_r(s)$ entsprechendes gilt.

Bilden wir den neuen Kern

$$H(s,t) = K(s,t) - \sum_{i=1}^{p} \psi_i(s)\chi_i(t), \tag{4}$$

so sind offenbar $\psi_{p+1}(s), \ldots, \psi_q(s)$, $\chi_{p+1}(s), \ldots, \chi_r(s)$ bzw. ψ- und χ-Funktionen auch dieses Kernes, $\psi_1(s), \ldots, \psi_p(s)$, $\chi_1(s), \ldots, \chi_p(s)$ dagegen nicht. Da

$$\int H(s,t)\chi_i(s)\,ds = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

[5]) Die Notwendigkeit der Bedingung ist evident.

[6]) Die Anzahl der linear unabhängigen Nullösungen ist endlich, vgl. l. c. [3]), § 13.

[7]) Siehe E. Goursat, Cours d'analyse mathématique **3**, S. 392. Paris 1923.

so ist jede ψ-Funktion des neuen Kernes zu $\chi_1(s), \ldots, \chi_p(s)$ orthogonal und folglich wegen (4) auch ψ-Funktion von $K(s,t)$. Entsprechendes gilt für jede χ-Funktion des Kernes $H(s,t)$. Also:

Ersetzt man $K(s,t)$ durch $H(s,t)$ so wird sowohl die Zahl der linear unabhängigen ψ-Funktionen als auch diejenige der linear unabhängigen χ-Funktionen um p herabgesetzt. Wenn ferner von den beiden Integralen

$$\iint |K(s,t)|^2 ds\,dt, \qquad \iint |H(s,t)|^2 ds\,dt$$

das erste endlich ist, so gilt gleiches von dem zweiten.

Zweiter Fall. Der Kern $K(s,t)$ soll χ-Funktionen besitzen, aber keine ψ-Funktion, die nicht zu allen χ-Funktionen orthogonal ist.

Wir nehmen an, daß die χ-Funktionen $\chi_1(s), \ldots, \chi_r(s)$ ein normiertes Orthogonalsystem bilden, d. h. daß

$$\int \chi_i(s)\,\bar{\chi}_k(s)\,ds \equiv (\chi_i, \bar{\chi}_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \gtrless k. \end{cases}$$

Setzen wir

$$\varphi_i(s) = \int K(s,t)\,\bar{\chi}_i(t)\,dt, \tag{5}$$

so folgt offenbar

$$(\varphi_i, \chi_k) = \delta_{ik} \tag{6}$$

und hieraus nach der Schwarzschen Ungleichung:

$$1 = |(\varphi_i, \chi_i)|^2 \leqq (\varphi_i, \bar{\varphi}_i). \tag{7}$$

Wir setzen jetzt

$$H(s,t) = K(s,t) - \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(s)\,\chi_i(t). \tag{8}$$

Aus der Orthogonalität und Normiertheit des Systems der $\chi_1(s), \ldots, \chi_r(s)$ ergibt sich

$$\int |H(s,t)|^2 dt = \int |K(s,t)|^2 dt - \sum_{i=1}^{r} |\varphi_i(s)|^2,$$

also wegen (7)

$$\iint |H(s,t)|^2 ds\,dt \leqq \iint |K(s,t)|^2 ds\,dt - r. \tag{9}$$

Wie im ersten Falle beweist man unter Benutzung von (6), daß jede ψ-Funktion von $K(s,t)$ eine solche von $H(s,t)$ ist und umgekehrt. Also:

Vertauscht man $K(s,t)$ mit $H(s,t)$, so wird die Zahl der linear unabhängigen ψ-Funktionen nicht geändert. Die Zahl der linear unabhängen χ-Funktionen wird jedenfalls nicht verkleinert, wie wir jetzt zeigen wollen.

Die homogene Integralgleichung

$$\chi(s) - \int H(t,s)\,\chi(t)\,dt = 0 \tag{10}$$

ist mit der Gleichung

$$\chi(s) - \int K(t,s)\chi(t)\,dt = -\sum_{i=1}^{r}(\varphi_i, \chi)\chi_i(s) \tag{11}$$

identisch. Die r Gleichungen

$$\chi(s) - \int K(t,s)\chi(t)\,dt = \chi_k(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{12}$$

sind lösbar, weil nach der Voraussetzung jede Lösung der homogenen transponierten Gleichung zu $\chi_k(s)$ orthogonal ist. Nach (6) kann man offenbar durch Hinzufügung von Nullösungen zu $\chi(s)$ eine solche Lösung $\chi_k^*(s)$ von (12) herstellen, daß

$$-(\varphi_i, \chi_k^*) = \delta_{ik} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

wird. Dann genügt $\chi_k^*(s)$ auch (11) und mithin (10).

Die r so erhaltenen Lösungen $\chi_1^*(s), \ldots, \chi_r^*(s)$ von (10) sind linear unabhängig, denn sind $c_1, c_2, \ldots, c_r$ Konstanten, und ist

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \chi_i^*(s) = 0,$$

so folgt aus (12)

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \chi_i(s) = 0,$$

was nur möglich ist, wenn alle c_i verschwinden. —

Man beweist nunmehr leicht den folgenden Fredholmschen Satz:

Die homogene ursprüngliche Integralgleichung (3) *hat ebenso viele linear unabhängige Lösungen wie die transponierte Gleichung* (2).

Wäre nämlich die Zahl der linear unabhängigen Lösungen von (2) größer als die von (3) ($> q$), so könnte man entweder nach (4) oder nach (8) zu einem neuen Kern übergehen. Nach der Voraussetzung und nach den früheren Resultaten kann man in dieser Weise nie einen Kern ohne χ-Funktionen erhalten, und der Prozeß kann daher unbegrenzt fortgesetzt werden. Da der Austausch (4) höchstens q-mal vorkommen kann, so würde mithin nach (9) das Integral vom Quadrat des Absolutwertes des Kernes unter 0 hinunter sinken, was offenbar unmöglich ist.

Ebensowenig kann, aus Symmetriegründen, die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (3) größer sein als die von (2).

§ 2.

Das Theorem von I. Schur.

Es sei $\chi_1(s), \ldots, \chi_r(s)$ ein vollständiges System von linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung

$$\chi(s) = \lambda_1 \int K(t,s)\chi(t)\,dt,$$

und es gelte

$$(\chi_i, \bar{\chi}_k) = \delta_{ik}.$$

Setzen wir

$$\varphi_i(s) = \lambda_1 \int K(s,t)\,\bar{\chi}_i(t)\,dt,$$

so gelten wieder (6) und (7). Es sei

$$K_1(s,t) = K(s,t) - \frac{\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(s)\,\chi_i(t)}{\lambda_1}.$$

Ist λ_1 ein Eigenwert auch von $K_1(s,t)$, so seien $\chi_{r+1}(s), \ldots, \chi_{r_1}(s)$ die in derselben Weise wie die $\chi_1(s), \ldots, \chi_r(s)$ normierten χ-Funktionen.

Nun ist offenbar $K_1(s,t)$ links zu $\chi_1(s), \ldots, \chi_r(s)$, rechts aber zu $\bar{\chi}_1(s), \ldots, \bar{\chi}_r(s)$ orthogonal. Daher ist jede der Funktionen $\chi_{r+1}(s), \ldots, \chi_{r_1}(s)$ zu den Funktionen $\bar{\chi}_1(s), \ldots, \bar{\chi}_r(s)$ orthogonal. Die Funktionen $\chi_1(s), \ldots, \chi_{r_1}(s)$ bilden mit anderen Worten ein Orthogonalsystem. In dieses System ordnen sich auch alle χ-Funktionen ein, die man durch Wiederholung desselben Verfahrens erhalten kann. Ist λ_1 kein Eigenwert des neugebildeten Kernes, so kann man in derselben Weise die einem anderen Eigenwerte entsprechenden χ-Funktionen erhalten. Alle solche Funktionen bilden zusammen ein Orthogonalsystem.

Ist $\psi(s)$ eine Lösung der Gleichung

$$\psi(s) = \lambda_2 \int K_1(s,t)\,\psi(t)\,dt,$$

so ist diese Funktion offenbar zu $\chi_1(s), \ldots, \chi_r(s)$ orthogonal. Daher genügt sie auch der Gleichung

$$\psi(s) = \lambda_2 \int K(s,t)\,\psi(t)\,dt.$$

Ist λ_2 von λ_1 verschieden, so gilt auch die Umkehrung. Denn ist $\psi(s)$ eine Lösung der letzten Gleichung, so ist sie bekanntlich, und wie sich leicht zeigen läßt, zu $\chi_1(s), \ldots, \chi_r(s)$ orthogonal und genügt daher auch der früheren Gleichung.

Durch das beschriebene Verfahren kann man folglich (vgl. (9)!) einen Kern

$$H(s,t) = K(s,t) - \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s)\,\chi_i(t)}{\lambda_1}$$

finden, für den λ_1 kein Eigenwert ist. Alle anderen Eigenwerte sind aber für $H(s,t)$ und $K(s,t)$ gemeinsam. Die Zahl der einem gemeinsamen Eigenwert entsprechenden linear unabhängigen Nullösungen ist für beide Kerne dieselbe.

Die gemeinsamen Eigenwerte haben auch dieselbe Ordnung, d. h. es ist die Multiplizität derselben als Nullstellen des Fredholmschen Nenners dieselbe. Die Ordnung von λ_1 ist gleich n.

Setzt man nämlich

$$k(s,t) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(s)\chi_i(t),$$

so wird

$$\int k(s,z) K_1(z,t)\,dz = 0,$$

d. h. es sind $k(s,t)$ und $K_1(s,t)$ semiorthogonal. Der Fredholmsche Nenner von $K(s,t)$ ist daher gleich dem Produkt derselben Nenner von $K_1(s,t)$ und $k(s,t)$[8]). Der letztere ist offenbar gleich $\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^r$. Es folgt daraus, daß der Fredholmsche Nenner des Kernes $K(s,t)$ gleich

$$\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^n \cdot D(\lambda)$$

ist, wenn $D(\lambda)$ der Fredholmsche Nenner des Kernes $H(s,t)$ ist. Da λ_1 kein Eigenwert dieses Kernes ist, so folgt daraus die Behauptung.

Nach der Besselschen Ungleichung wird, wenn wir die Eigenwerte in geeigneter Weise numerieren,

$$\int |K(s,t)|^2\,dt \geqq \sum \left|\frac{\varphi_l(s)}{\lambda_l}\right|^2,$$

und daher nach (7)

$$\iint |K(s,t)|^2\,ds\,dt \geqq \sum \left|\frac{1}{\lambda_l}\right|^2,$$

was zu beweisen war.

---

[8]) Siehe E. Goursat, Cours d'analyse mathématique 3, S. 396. Paris 1923. Es wird bei dieser Überlegung vorausgesetzt, daß die Fredholmsche Auflösung anwendbar ist.

(Eingegangen am 14. März 1925.)

Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der „Principia Mathematica“[1]).

Von

Paul Bernays in Göttingen.

§ 1.

In den „Principia Mathematica“ von Whitehead und Russell geschieht die systematische Entwicklung des logischen Aussagenkalkuls in der Weise, daß fünf Aussagenformeln als Grundformeln („primitive propositions“) an die Spitze gestellt werden, aus denen sich jede allgemeingültige, d. h. für beliebige Werte der vorkommenden Aussagenvariablen richtige Aussagenverknüpfung durch *Einsetzungen* und durch Anwendung einer einzigen formalen *Schlußregel* gewinnen läßt.

Mit der Zurückführung der Sätze auf die Grundformeln verbindet sich eine Zurückführung der logischen Verknüpfungen auf die beiden Operationen:

der Negation

$$\sim p \text{ (nicht } p)$$

und der Disjunktion

$p \vee q$ (p oder q; „oder“ im Sinne des lateinischen „vel“),

aus denen durch Zusammensetzung gebildet werden[2]):

die Implikation

$p \supset q$ (wenn p, so q), als Abkürzung für $\sim p \vee q$

[1]) Der Inhalt dieser Abhandlung ist zu einem wesentlichen Teil einer vom Verfasser 1918 der Göttinger math. nat. Fakultät eingereichten unveröffentlichten Habilitationsschrift entnommen. Die dort noch behandelte Frage nach der Ersetzbarkeit von Formeln durch Schlußregeln ist in der vorliegenden Untersuchung beiseite gelassen.

[2]) Zur Vermeidung einer Häufung von Klammern sollen, so wie in den Princip. Math., Punkte als Trennungszeichen benutzt werden, wobei die Regel gilt, daß mehrere Punkte stärker trennen als weniger Punkte. Diese Regel bezieht sich jedoch

und die Konjunktion[3])

$p \,\&\, q$ (p und q), als Abkürzung für $\sim(\sim p \vee \sim q)$.

Die fünf Grundformeln lauten:

(*Taut*) $\quad p \vee p \supset p,$

(*Add*) $\quad q \supset p \vee q,$

(*Perm*) $\quad p \vee q \supset q \vee p,$

(*Assoc*) $\quad p \vee \cdot q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r,$

(*Sum*) $\quad q \supset r \cdot \supset \cdot p \vee q \supset p \vee r.$

Bei der Ersetzung der Implikation durch den definierenden Ausdruck lauten sie:

(*Taut*) $\quad \sim(p \vee p) \cdot \vee p,$

(*Add*) $\quad \sim q \vee \cdot p \vee q,$

(*Perm*) $\quad \sim(p \vee q) \cdot \vee \cdot q \vee p,$

(*Assoc*) $\quad \sim(p \vee \cdot q \vee r) : \vee : q \vee \cdot p \vee r,$

(*Sum*) $\quad \sim(\sim q \vee r) \cdot \vee : \sim(p \vee q) \cdot \vee \cdot p \vee r.$

Die Schlußregel läßt sich so formulieren: Aus zwei Formeln[4])

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \text{ (bzw. } \sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$$

ist die Formel $\mathfrak{B}$ zu entnehmen.

Die Regel der Einsetzung besteht darin, daß für eine Aussagen-Variable eine beliebige Formel eingesetzt werden kann.

Man kann sich nun leicht klarmachen, daß jede der fünf Grundformeln bei der inhaltlichen Deutung eine allgemeingültige Aussagenverknüpfung darstellt. Und daß man auch durch Anwendung der Regeln nur zu Formeln *von dieser Eigenschaft* gelangt.

---

nur auf die Trennung durch *gleichartige* Zeichen. Wo von den Zeichen $\sim$, $\vee$, $\supset$ zwei verschiedene in Konkurrenz kommen, soll allgemein die Verabredung gelten, daß für die Trennung der Formelbestandteile $\supset$ vor $\vee$ und $\sim$, sowie $\vee$ vor $\sim$ den Vorrang hat, sofern nicht durch *Klammern* eine anderweitige Zusammenfassung angegeben wird. Hiernach ist z. B. die Formel

$$p \supset \sim q \vee : p \vee \cdot q \vee r \cdot \supset \cdot p \supset p \vee : \sim q \vee \cdot q \vee r$$

in der Weise aufzufassen, wie es ohne weitere Verabredung durch folgende Klammernsetzung angegeben würde:

$$\big(p \supset \big((\sim q) \vee (p \vee (q \vee r))\big)\big) \supset \big(p \supset \big(p \vee \big((\sim q) \vee (q \vee r)\big)\big)\big).$$

[3]) In den Princip. Math. wird als Symbol für die Konjunktion einfach ein Punkt genommen.

[4]) Als Zeichen zur inhaltlichen Fixierung von Formeln, deren Gestalt unbestimmt gelassen ist, sollen hier große gotische Buchstaben angewendet werden.

Zugleich ist das System der Grundformeln in dem Sinne *vollständig*, daß man aus ihm mit Hilfe der Regeln *sämtliche* allgemein richtigen Aussagenverknüpfungen enthält. Diese Behauptung kann noch folgendermaßen verschärft werden:

Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige aus den eingeführten Zeichen gebildete Formel, so ist sie entweder aus den fünf Grundformeln gemäß den Regeln ableitbar, oder es wird bei Hinzunahme von $\mathfrak{A}$ zu den Grundformeln *jede beliebige Formel* $\mathfrak{B}$ ableitbar.

Die Begründung dieser Behauptung sei hier kurz angedeutet[5]). Sie ergibt sich aus der Betrachtung der *konjunktiven Normalform*. Unter einer solchen versteht man eine Formel, welche aus einer oder mehreren durch & (Konjunktion) verbundenen „einfachen" Disjunktionen besteht, d. h. solchen Disjunktionen, wo jedes Glied entweder eine Variable oder eine mit einer Negation versehene Variable ist.

Z. B. ist

$$p \,\&\, (p \vee \sim q \vee r)$$

eine konjunktive Normalform.

Es gilt nun der bekannte Satz, daß man eine jede Formel auf eine konjunktive Normalform bringen kann; d. h. man hat ein Verfahren, um zu einer vorgelegten Formel $\mathfrak{A}$ eine Normalform $\mathfrak{N}$ von der Art zu finden, daß

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{N} \quad \text{sowie} \quad \dot{\mathfrak{N}} \supset \mathfrak{A}$$

aus den Grundformeln ableitbar. ist (Die Bestimmung von $\mathfrak{N}$ zu $\mathfrak{A}$ ist übrigens nicht eindeutig.)

Man erkennt nun sofort: wenn $\mathfrak{A}$ ableitbar ist, so ist es auch $\mathfrak{N}$, und umgekehrt; ferner wenn $\mathfrak{N}$ ableitbar ist, so ist es auch jede der in $\mathfrak{N}$ (als Konjunktionsglied) vorkommenden einfachen Disjunktionen.

Damit ist unsere Behauptung auf die entsprechende für einfache Disjunktionen zurückgeführt. Für eine solche ergibt sie sich aber sogleich; denn in einer einfachen Disjunktion sind entweder zwei Glieder enthalten, von denen eines die Negation des andern ist (wie p und $\sim p$); dann ist sie ableitbar; oder die Disjunktion enthält keine zwei solcher Glieder; dann kann man aus ihr durch Einsetzung eine Disjunktion erhalten, deren jedes Glied entweder die Variable p oder die doppelte Negation von p, also $\sim (\sim p)$ ist. Aus einer solchen Formel ist aber diejenige Formel ableitbar, welche bloß aus der Variablen p besteht, und von dieser kann man durch Einsetzung zu jeder beliebigen Formel gelangen.

---

[5]) Ein etwas anderer Beweis findet sich in der Abhandlung von E. L. Post, „Introduction to a general theory of elementary propositions" (American Journal of Math. 43 (1921)).

Mit dieser Überlegung ergibt sich zugleich ein einfaches Verfahren zur Entscheidung, ob eine vorgelegte Formel $\mathfrak{A}$ eine allgemein richtige Aussagenverknüpfung darstellt, bzw. — was sachlich auf dasselbe hinauskommt — aus den Grundformeln ableitbar ist: man bestimme zu $\mathfrak{A}$ eine konjunktive Normalform $\mathfrak{N}$. Treten dann in jeder der in $\mathfrak{N}$ vorkommenden einfachen Disjunktionen zwei Glieder auf, von denen eines die Negation des andern ist, so ist die vorgelegte Formel $\mathfrak{A}$ allgemein richtig, sonst nicht.

Durch dieses Entscheidungsverfahren wird das Hauptproblem des Aussagenkalkuls vollkommen gelöst, und sofern es sich nur um einen Überblick über das System der allgemeingültigen logischen Aussagenverknüpfungen handelte, könnte man zu diesem Ergebnis auf direkterem Wege als nach der Methode der Principia Mathematica gelangen.

Es ist aber an sich die Erkenntnis von Bedeutung, daß die fünf aufgezählten Grundformeln (bei Anwendung der Regeln) zur Ableitung aller allgemeingültigen Aussagenverknüpfungen genügen. Unter diesem Gesichtspunkt stellt sich nun die weitere Frage ein, ob denn die Grundformeln im Sinne der formalen Ableitung voneinander unabhängig sind.

Dies ist tatsächlich *nicht* der Fall, vielmehr kann die Formel *Assoc* aus den andern vier abgeleitet werden. Es kann somit das System der fünf Grundformeln ersetzt werden durch das der vier Formeln

Taut, *Add*, *Perm*, *Sum* (System 1).

Von diesen vier Formeln ist keine entbehrlich, und zwar auch dann nicht, wenn man *Assoc* beibehält.

Für diese Behauptungen soll im folgenden der Nachweis geliefert werden. Damit soll aber unsere Untersuchung der Abhängigkeiten nicht erschöpft sein. Vielmehr sollen noch einige Fragen behandelt werden, welche sich hier naturgemäß anschließen und die sich aus zwei Bemerkungen ergeben.

Die eine Bemerkung ist, daß im Falle der Beibehaltung von *Assoc* die Formel *Perm* beweisbar wird, sofern wir an Stelle von

$$Add\colon\quad q \supset p \vee q$$

die Formel

$$Add^*\colon\quad p \supset p \vee q$$

als Grundformel nehmen.

Diese beiden Formeln sind bekanntermaßen bei Benutzung von *Perm* und *Sum* einander gleichwertig, d. h. man kann unter Benutzung von *Perm* und *Sum* von der Formel *Add* zu Add^*, und auch zurück, gelangen.

Es wird sich also zeigen, daß als System von Grundformeln folgende vier Formeln ausreichen:

Taut, Add, Assoc, Sum* (System 2).

Diese Tatsache ist deshalb nicht so verwunderlich, weil in der Formel *Assoc* eine Vertauschung vorkommt. Man wird sich daher fragen, ob die Abhängigkeit der Formel *Perm* auch noch dann besteht, wenn statt *Assoc* die Formel

$$Assoc^*: \quad p \vee \cdot q \vee r \supset p \vee q \cdot \vee r,$$

welche den assoziativen Charakter der Disjunktionen reiner zum Ausdruck bringt, als Grundformel gewählt wird.

Es zeigt sich, daß dies nicht der Fall ist; d. h. in dem System 2 kann die Formel *Assoc* nicht durch *Assoc** ersetzt werden. Wohl aber kann sie ersetzt werden durch *Add* und *Assoc** zusammen, so daß als Grundformeln die fünf Formeln

Taut, Add, Add, Assoc*, Sum* (System 3)

genügen. (Daß die Formeln *Assoc* und *Assoc** beim Weglassen von *Perm* nicht dieselbe Schlußkraft besitzen, steht natürlich nicht im Widerspruch damit, daß, wie bekannt, bei Benutzung von *Perm* und *Sum* jene beiden Formeln einander gleichwertig sind.)

Die zweite Bemerkung besteht darin, daß in dem System 1 die Formel *Add* durch die speziellere Formel

$$Simp: \quad q \supset \cdot p \supset q,$$

bzw.

$$\sim q \vee \cdot \sim p \vee q$$

ersetzbar ist, so daß also die vier Formeln

Taut, Simp, Perm, Sum (System 4)

als Grundformeln ausreichen.

Durch die entsprechende Spezialisierung wie die von *Add* zu *Simp* entsteht aus *Assoc* die Formel

$$Comm: \quad p \supset \cdot q \supset r : \supset : q \supset \cdot p \supset r$$

bzw.

$$\sim (\sim p \vee \cdot \sim q \vee r) \vee : \sim q \vee \cdot \sim p \vee r$$

und aus *Sum* die Formel

$$Syll: \quad q \supset r \cdot \supset : p \supset q \cdot \supset \cdot p \supset r$$

bzw.

$$\sim (\sim q \vee r) \vee : \sim (\sim p \vee q) \vee \cdot \sim p \vee r.$$

Nun liegt die Frage nahe, ob nicht auch *Assoc* durch *Comm*, oder *Sum*

durch *Syll* ersetzbar ist. Diese Frage entscheidet sich in verneinendem Sinne: weder kann *Assoc* im System 2, noch *Assoc** im System 3 durch *Comm* ersetzt werden, und *Sum* kann in keinem der Systeme 1, 2, 3, 4 durch *Syll* ersetzt werden. Ferner zeigt sich, daß im System 3 die Formel *Add* nicht durch *Simp* ersetzt werden kann.

Endlich soll noch die Beziehung der Formel

Id: $p \supset p$ bzw. $\sim p \vee p$

zu den Formeln der Systeme 1, 2, 3, 4 betrachtet werden. *Id* ist ausgezeichnet als die einfachste allgemein richtige Aussagenverknüpfung. Man würde daher wünschen, diese Formel als Grundformel zu nehmen. Jedoch vermag sie in keinem der Systeme 1, 2, 3, 4 irgendeine der Formeln zu ersetzen.

Die einfachste Ableitung von *Id* ist die aus

Taut, *Add*, *Syll*,

bei welcher man zunächst aus *Add* durch Einsetzung die Formel

$Id^*: p \supset p \vee p,$

bzw. $\sim p \vee \cdot p \vee p$

gewinnt. Ohne Anwendung von *Sum* kann man *Id* ableiten

aus *Add* und *Assoc*,

sogar schon aus *Simp* und *Comm*;

ferner aus *Taut*, *Add**, *Assoc**,

sowie aus *Add**, *Perm*, *Assoc**.

Die Ausführung dieser Ableitungen, welche man sich leicht zurechtlegt, soll dem Leser überlassen bleiben. Bei allen diesen Ableitungen wird entweder *Add* oder *Simp* oder *Add** benutzt. Wir werden zeigen, daß ohne die Anwendung einer dieser Formeln die Formel *Id* aus den übrigen Formeln der Systeme 1, 2, 3, 4 *nicht mehr* beweisbar ist.

Natürlich bildet die Formel *Id* keinen ausreichenden Ersatz für eine der beiden Formeln *Add*, *Add**. Es wird sich zeigen, daß bei Hinzunahme von *Id* zu den Formeln

Taut, *Perm*, *Assoc*, *Sum*

noch nicht einmal die Formel *Id** beweisbar ist und daß ferner auch, wenn außer *Id* noch *Id** hinzugenommen wird, die Formeln *Add* und *Add**, und auch *Simp*, unbeweisbar bleiben.

Für die ausgesprochenen Behauptungen sollen nunmehr die Beweise erbracht werden, und zwar sollen im § 2 die behaupteten *Abhängigkeiten* erwiesen werden, auf Grund deren die Formelsysteme 1, 2, 3, 4 als ausreichende Systeme von Grundformeln erkannt werden; im § 3 sollen die Beweise für die *Unabhängigkeits*-Behauptungen geliefert werden, und es soll gezeigt werden, daß *keines der Systeme* 1, 2, 3, 4 *eine überflüssige Formel* enthält.

Der Übersicht halber seien hier die vier Systeme zusammengestellt:

System 1: *Taut*, *Add*, *Perm*, *Sum*,

„ 2: *Taut*, *Add**, *Assoc*, *Sum*,

„ 3: *Taut*, *Add*, *Add**, *Assoc**, *Sum*,

„ 4: *Taut*, *Simp*, *Perm*, *Sum*.

§ 2.

Zur Erläuterung der folgenden Beweisführungen sind einige Bemerkungen vorauszuschicken.

Wird eine Formel durch buchstäbliche Wiederholung oder durch Einsetzung aus einer Grundformel oder aus einer schon abgeleiteten Formel erhalten, so soll deren Bezeichnung *links* angegeben werden. Eine *neue Bezeichnung* für eine erhaltene Formel soll *rechts* von dieser angegeben werden.

Die Anwendung der Schlußregel geschieht nach dem Schema

$$\frac{\mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

Ferner werden wir auch — zum Zweck einer *abgekürzten Mitteilung* von Beweisen — das Schema

$$\frac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}}$$

anwenden. Hiermit hat es folgende Bewandtnis: Aus der Grundformel *Sum* erhält man, wie schon erwähnt, durch Einsetzung die Formel

$$Syll\colon q \supset r \cdot \supset : p \supset q \cdot \supset \cdot p \supset r.$$

Durch zweimalige Anwendung dieser Formel in Verbindung mit der Schlußregel kann man von zwei Formeln

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}$$

zu der Formel

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}$$

gelangen. Wir können daher, überall *wo die Anwendung der Grundformel Sum zugelassen ist*, so verfahren, als ob wir eine Schlußregel hätten, gemäß der aus zwei Formeln

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}$$

die Formel

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}$$

entnommen werden kann. Und dies wollen wir auch tun, um unnötige Umständlichkeiten zu vermeiden.

Die im Beweise einzuführenden Bezeichnungen für abgeleitete Formeln sollen durch eingeklammerte Ziffern geschehen; diese Bezeichnungen brauchen nur *innerhalb eines Beweises* festgehalten zu werden.

Ferner sei bemerkt, daß zwei Formeln, die aus einander durch Anwendung der Abkürzung

$$p \supset q \quad \text{für} \quad \sim p \vee q$$

hervorgehen, für unsere Betrachtungen als gleich gelten sollen. Der Übergang von einer der beiden Schreibweisen zur andern wird durch „bzw." angedeutet.

Wir gehen nun an die Beweise für die behaupteten Abhängigkeiten. Und zwar sollen die zu beweisenden Sätze so numeriert werden, daß bei jedem Satz *die Nummer mit derjenigen des Formelsystems übereinstimmt*, welches durch ihn als vollständig erwiesen wird[6]).

1. Ableitung von *Assoc* aus *Taut*, *Add*, *Perm*, *Sum*.

(*Add*) $\quad r \supset p \vee r$

(*Sum*) $\quad \dfrac{r \supset p \vee r \cdot \supset \cdot q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r}{q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee \cdot r}$

(*Sum*) $\quad \dfrac{q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r \cdot \supset \cdot p \vee \cdot q \vee r \supset p \vee : q \vee \cdot p \vee r}{p \vee \cdot q \vee r \supset p \vee : q \vee \cdot p \vee r}$

(*Perm*) $\quad \dfrac{p \vee : q \vee \cdot p \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r : \vee p}{p \vee \cdot q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r : \vee p} \qquad (1)$

[6]) Man beachte, daß bei den Ableitungen 1, 2, 3 die Negation *nirgends explizite auftritt*. Die Abhängigkeiten 1 bis 3 bestehen also auch, wenn die Implikation — anstatt als zusammengesetzt aus Negation und Disjunktion — als *Grundverknüpfung* betrachtet wird.

(*Add*) $p \supset r \vee p$

(*Perm*) $r \vee p \supset p \vee r$

$p \supset p \vee r$

(*Add*) $p \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r$

$p \supset q \vee \cdot p \vee r$

(*Sum*) $p \supset q \vee \cdot p \vee r \cdot \supset \cdot q \vee \cdot p \vee r : \vee p \supset q \vee \cdot p \vee r : \vee : q \vee \cdot p \vee r$

$q \vee \cdot p \vee r : \vee p \supset q \vee \cdot p \vee r : \vee : q \vee \cdot p \vee r$

(*Taut*) $q \vee \cdot p \vee r : \vee : q \vee \cdot p \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r$

$q \vee \cdot p \vee r : \vee p \supset q \vee \cdot p \vee r$ (2)

(1) $p \vee \cdot q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r : \vee p$

(2) $q \vee \cdot p \vee r : \vee p \supset q \vee \cdot p \vee r$

$p \vee \cdot q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r$

2. Ableitung von *Perm* aus *Taut*, *Add**; *Assoc*, *Sum*.

(*Taut*) $p \vee p \supset p$

(*Sum*) $p \vee p \supset p \cdot \supset \cdot q \vee \cdot p \vee p \supset q \vee p$

$q \vee \cdot p \vee p \supset q \vee p$ (1)

(*Add**) $q \supset q \vee p$

(*Sum*) $q \supset q \vee p \cdot \supset \cdot p \vee q \supset p \vee \cdot q \vee p$

$p \vee q \supset p \vee \cdot q \vee p$

(*Assoc*) $p \vee \cdot q \vee p \supset q \vee \cdot p \vee p$

$p \vee q \supset q \vee \cdot p \vee p$

(1) $q \vee \cdot p \vee p \supset q \vee p$

$p \vee q \supset q \vee p$

3. Ableitung von *Assoc* aus *Taut*, *Add*, *Assoc**, *Sum*.

(*Add*) $r \supset p \vee r$

(*Sum*) $r \supset p \vee r \cdot \supset \cdot q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r$

$q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r$

$$(Add)\quad \frac{q \vee \cdot p \vee r \supset r \vee : q \vee \cdot p \vee r}{q \vee r \supset r \vee : q \vee \cdot p \vee r}$$

$$(Sum)\quad \frac{q \vee r \supset r \vee : q \vee \cdot p \vee r \cdot \supset \cdot p \vee \cdot q \vee r \supset p \vee \therefore r \vee : q \vee \cdot p \vee r}{p \vee \cdot q \vee r \supset p \vee \therefore r \vee : q \vee \cdot p \vee r}$$

$$(Assoc^*)\quad \frac{p \vee \therefore r \vee : q \vee \cdot p \vee r \supset p \vee r \cdot \vee : q \vee \cdot p \vee r}{p \vee \cdot q \vee r \supset p \vee r \cdot \vee : q \vee \cdot p \vee r}$$

$$(Add)\quad \frac{p \vee r \cdot \vee : q \vee \cdot p \vee r \supset q \vee \therefore p \vee r \cdot \vee : q \vee \cdot p \vee r}{p \vee \cdot q \vee r \supset q \vee \therefore p \vee r \cdot \vee : q \vee \cdot p \vee r}$$

$$(Assoc^*)\quad \frac{q \vee \therefore p \vee r \cdot \vee : q \vee \cdot p \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r : \vee : q \vee \cdot p \vee r}{p \vee \cdot q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r : \vee : q \vee \cdot p \vee r}$$

$$(Taut)\quad \frac{q \vee \cdot p \vee r : \vee : q \vee \cdot p \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r}{p \vee \cdot q \vee r \supset q \vee \cdot p \vee r}$$

4. Ableitung von *Add* aus *Taut*, *Simp*, *Perm*, *Sum*.

$$(Taut)\quad \sim p \vee \sim p \supset \sim p$$

$$(Sum)\quad \frac{\sim p \vee \sim p \supset \sim p \cdot \supset \cdot \sim (\sim p) \vee \cdot \sim p \vee \sim p \supset \sim (\sim p) \vee \sim p}{\sim (\sim p) \vee \cdot \sim p \vee \sim p \supset \sim (\sim p) \vee \sim p} \qquad (1)$$

$$(Simp)\quad \sim p \supset \cdot p \supset \sim p$$

bzw.

$$\sim (\sim p) \vee \cdot \sim p \vee \sim p$$

$$(1)\quad \frac{\sim (\sim p) \vee \cdot \sim p \vee \sim p \supset \sim (\sim p) \vee \sim p}{\sim (\sim p) \vee \sim p}$$

$$(Perm)\quad \frac{\sim (\sim p) \vee \sim p \supset \sim p \vee \sim (\sim p)}{\sim p \vee \sim (\sim p)}$$

bzw.

$$p \supset \sim (\sim p)$$

$$(Sum)\quad \frac{p \supset \sim (\sim p) \cdot \supset \cdot q \vee p \supset q \vee \sim (\sim p)}{q \vee p \supset q \vee \sim (\sim p)}$$

$$(Perm)\quad \frac{q \vee \sim (\sim p) \supset \sim (\sim p) \vee q}{q \vee p \supset \sim (\sim p) \vee q}$$

bzw.

$$q \vee p \supset \cdot \sim p \supset q \qquad (2)$$

(*Taut*) $p \vee p \supset p$

bzw.

$$\sim (p \vee p) \vee p$$

(*Perm*) $\sim (p \vee p) \vee p \supset p \vee \sim (p \vee p)$

$$p \vee \sim (p \vee p)$$

(2) $p \vee \sim (p \vee p) \supset \cdot \sim (\sim (p \vee p)) \supset p$

$$\sim (\sim (p \vee p) \supset p$$

(*Sum*) $\sim (\sim (p \vee p)) \supset p \cdot \supset \cdot q \vee \sim (\sim (p \vee p)) \supset q \vee p$

$$q \vee \sim (\sim (p \vee p)) \supset q \vee p \qquad (3)$$

(*Perm*) $\sim (\sim (p \vee p)) \vee q \supset q \vee \sim (\sim (p \vee p))$

(3) $q \vee \sim (\sim (p \vee p)) \supset q \vee p$

$$\sim (\sim (p \vee p)) \vee q \supset q \vee p$$

(*Sum*) $\sim (\sim (p \vee p)) \vee q \supset q \vee p \cdot \supset \cdot \sim q \vee \cdot \sim (\sim (p \vee p)) \vee q \supset \sim q \vee \cdot q \vee p$

$$\sim q \vee \cdot \sim (\sim (p \vee p)) \vee q \supset \sim q \vee \cdot q \vee p \qquad (4)$$

(*Simp*) $q \supset \cdot \sim (p \vee p) \supset q$

bzw.

$$\sim q \vee \cdot \sim (\sim (p \vee p)) \vee q$$

(4) $\sim q \vee \cdot \sim (\sim (p \vee p)) \vee q \supset \sim q \vee \cdot q \vee p$

$$\sim q \vee \ q \vee p$$

bzw.

$$q \supset q \vee p$$

(*Perm*) $q \vee p \supset p \vee q$

$$q \supset p \vee q$$

§ 3.

Es handelt sich nun darum, die im § 1 behaupteten Sätze über *Unabhängigkeit* — zu denen auch die Behauptungen über Nichtersetzbarkeit gehören — zu beweisen. Daß eine Formel $\mathfrak{A}$ innerhalb eines Formelsystems nicht entbehrlich, bzw. daß sie nicht durch eine andere Formel $\mathfrak{B}$ ersetzbar ist, wird erwiesen, wenn wir zeigen, daß aus dem Formelsystem, welches nach Streichung der Formel $\mathfrak{A}$ verbleibt, bzw. nach der Ersetzung von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ entsteht, irgendeine allgemein richtige Formel $\mathfrak{C}$ nicht abgeleitet werden kann.

Unter Berücksichtigung der festgestellten *Abhängigkeiten* erkennt man, daß sämtliche aufgestellten Unabhängigkeitsbehauptungen zu Recht bestehen, sofern folgende Unabhängigkeiten nachgewiesen werden:

I. *Taut* kann nicht abgeleitet werden aus *Add, Perm, Assoc, Sum*;
II. *Sum* „ „ „ „ „ *Taut, Add, Add*, Perm, Assoc, Assoc*, Syll*;
III. *Simp* „ „ „ „ „ *Taut, Perm, Assoc, Sum, Id, Id**;
IV. *Id** „ „ „ „ „ *Taut, Perm, Assoc, Sum, Id*;
V. *Id* „ „ „ „ „ *Taut, Perm, Assoc, Sum*;
VI. *Add* „ „ „ „ „ *Taut, Add*, Simp, Assoc*, Sum*;
VII. *Add** „ „ „ „ „ *Taut, Add, Assoc*, Sum*;
VIII. *Assoc** „ „ „ „ „ *Taut, Add, Add*, Comm, Sum*;
IX. *Assoc** „ „ „ „ „ *Taut, Add, Assoc, Sum*.

Die Beweise für diese Sätze sollen nach der für solche Untersuchungen gebräuchlichen *Methode der Aufweisung* geführt werden: Es wird jedesmal eine endliche Gruppe (im weiteren Sinne des Wortes) aufgestellt, d. h. eine endliche Gesamtheit von Elementen, für welche die „Disjunktion" als Zusammensetzung und die „Negation" als eingliedrige Operation durch Angabe des Wertverlaufs definiert wird (die Zusammensetzung braucht im allgemeinen weder assoziativ noch eindeutig umkehrbar noch auch kommutativ zu sein)[7]).

Ferner wird aus der Gruppe eine Teilgesamtheit von „ausgezeichneten Werten" ausgesondert.

Es möge dann eine Aussagenformel (in bezug auf die betreffende Gruppe) eine „richtige Formel" heißen, wenn sie bei beliebigen Einsetzungen von Elementen der Gruppe für die Aussagenvariablen stets einen ausgezeichneten Wert liefert.

Hiernach ist zunächst ersichtlich, daß jede Aussagenformel, die durch Einsetzung aus einer richtigen Formel entsteht, wieder eine richtige Formel ist. Es sollen ferner die Gruppen so eingerichtet werden, daß bei der Anwendung der Schlußregel aus zwei richtigen Formeln wieder eine richtige Formel erhalten wird. Dazu genügt es, daß folgende Bedingung B erfüllt wird:

Die Disjunktion $\sim p \vee q$, gebildet aus der Negation eines *ausgezeichneten Wertes* p und irgendeinem Element q, hat nur dann einen ausgezeichneten Wert, wenn q ein ausgezeichneter Wert ist. Die Erfüllung dieser Bedingung hat zur Folge, daß jede Formel, die aus richtigen Formeln ableitbar ist, wiederum richtig ist.

---

[7]) Die Elemente bezeichnen wir durch kleine griechische Buchstaben.

Um daher die Unabhängigkeit einer Formel $\mathfrak{F}$ von gewissen anderen Formeln $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{K}$ zu erweisen, braucht man nur eine der Bedingung B genügende Gruppe zu finden, für welche $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{K}$ richtige Formeln sind, während $\mathfrak{F}$ keine richtige Formel ist.

Für jeden der Unabhängigkeitssätze I bis IX soll nun eine entsprechende Gruppe aufgestellt werden. Die Angabe geschieht so: Zuerst werden die Elemente in runder Klammer, dann die ausgezeichneten Werte in geschweifter Klammer aufgezählt. Sodann wird die Negation und die Disjunktion definiert[8]). (Wo in einer Definitionsgleichung eine Aussagenvariable steht, soll dies bedeuten, daß die Gleichung für *jeden* Wert der Variablen gelten soll.) Hernach werden die Formeln aufgezählt, von denen man nachzuprüfen hat, daß sie richtige Formeln sind.

Diese Nachprüfung soll dem Leser überlassen bleiben; bei den komplizierteren Formeln kann man sie durch geeignete Fallunterscheidungen wesentlich abkürzen.

Zuletzt wird für die als unabhängig zu erweisende Formel eine spezielle Einsetzung von Werten angegeben, bei welcher die Formel einen *nicht ausgezeichneten* Wert liefert, wodurch ersichtlich wird, daß sie keine richtige Formel ist.

Zur Erleichterung der Nachprüfungen sei noch folgendes bemerkt: Ist für eine Gruppe die Formel *Id* eine richtige Formel, so ist,

falls die Disjunktion kommutativ ist, auch *Perm* eine richtige Formel;

falls die Disjunktion assoziativ ist, auch *Assoc** eine richtige Formel;

falls die Disjunktion sowohl kommutativ wie assoziativ ist, auch *Assoc* eine richtige Formel;

falls $p \vee p = p$ (für jeden Wert von p) ist, auch *Taut* eine richtige Formel.

Bei *jeder der Gruppen ist die Bedingung B erfüllt.* Dies ist jedesmal eigens festzustellen, ohne daß es für jede Gruppe besonders gesagt werden soll.

Gruppe I.

$$(\alpha, \beta, \gamma); \quad \{\alpha\}.$$

$$\sim \alpha = \beta, \quad \sim \beta = \alpha, \quad \sim \gamma = \gamma,$$

$$\alpha \vee p = p \vee \alpha = \alpha,$$

$$\beta \vee p = p \vee \beta = p,$$

$$\gamma \vee \gamma = \alpha.$$

[8]) Dabei wird das Gleichheitszeichen im Sinne der Definitionsgleichheit angewandt.

Die so definierte Disjunktion läßt sich arithmetisch darstellen durch die Multiplikation der drei Restklassen 0, 1, 2 mod 4.

Id, *Add*, *Perm*, *Assoc*, *Sum* sind richtige Formeln; dagegen ist *Taut* keine richtige Formel, denn

$$\sim(\gamma \vee \gamma) \vee \gamma = \sim \alpha \vee \gamma = \beta \vee \gamma = \gamma.$$

Gruppe II.

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta); \quad \{\alpha\}.$$

$$\sim \alpha = \beta, \quad \sim \beta = \alpha, \quad \sim \gamma = \delta, \quad \sim \delta = \alpha,$$
$$\alpha \vee p = p \vee \alpha = \alpha,$$
$$\beta \vee p = p \vee \beta = p,$$
$$p \vee p = p,$$
$$\gamma \vee \delta = \delta \vee \gamma = \alpha.$$

Die Disjunktion läßt sich arithmetisch darstellen durch die Multiplikation der Restklassen 0, 1, 3, 4 mod 6.

Id, *Taut*, *Add*, *Add**, *Perm*, *Assoc*, *Assoc**, *Syll* sind richtige Formeln; nicht aber *Sum*, denn

$$\sim(\sim \delta \vee \beta) \vee \cdot \sim(\gamma \vee \delta) \vee (\gamma \vee \beta)$$
$$= \sim(\alpha \vee \beta) \vee \cdot \sim \alpha \vee \gamma = \sim \alpha \vee \cdot \beta \vee \gamma$$
$$= \beta \vee \gamma = \gamma.$$

Gruppe III.

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta); \quad \{\alpha, \gamma\}.$$

$$\sim \alpha = \beta, \quad \sim \beta = \alpha, \quad \sim \gamma = \delta, \quad \sim \delta = \gamma,$$
$$\alpha \vee p = p \vee \alpha = \alpha,$$
$$\beta \vee p = p \vee \beta = \beta \quad \text{für} \quad p \neq \alpha,$$
$$p \vee p = p,$$
$$\gamma \vee \delta = \delta \vee \gamma = \gamma.$$

Id, *Id**, *Taut*, *Perm*, *Assoc*, *Sum* sind richtige Formeln; nicht aber *Simp* (und folglich auch nicht *Add*), denn

$$\sim \gamma \vee \cdot \sim \alpha \vee \gamma = \delta \vee \cdot \beta \vee \gamma = \delta \vee \beta = \beta.$$

Gruppe IV.

Diese Gruppe unterscheidet sich von der Gruppe III nur dadurch, daß

$$\gamma \vee \gamma = \beta$$

definiert wird:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad \{\alpha, \gamma\}.$$

$$\sim \alpha = \beta, \quad \sim \beta = \alpha, \quad \sim \gamma = \delta, \quad \sim \delta = \gamma,$$
$$\alpha \vee p = p \vee \alpha = \alpha,$$
$$\beta \vee p = p \vee \beta = \beta \quad \text{für} \quad p + \alpha,$$
$$\gamma \vee \gamma = \beta,$$
$$\gamma \vee \delta = \delta \vee \gamma = \gamma,$$
$$\delta \vee \delta = \delta.$$

Id, *Taut*, *Perm*, *Assoc*, *Sum* sind richtige Formeln; nicht aber *Id**, denn

$$\sim \gamma \vee \cdot \gamma \vee \gamma = \delta \vee \beta = \beta.$$

Gruppe V.

$$(\alpha, \beta, \gamma); \quad \{\alpha\}.$$

$$\sim \alpha = \beta, \quad \sim \beta = \alpha, \quad \sim \gamma = \gamma,$$
$$\alpha \vee p = p \vee \alpha = \alpha,$$
$$\beta \vee \beta = \beta \vee \gamma = \gamma \vee \beta = \gamma \vee \gamma = \beta.$$

Taut, *Perm*, *Assoc*, *Sum* sind richtige Formeln; nicht aber *Id*, denn

$$\sim \gamma \vee \gamma = \gamma \vee \gamma = \beta.$$

Gruppe VI.

$$(\alpha, \beta, \gamma); \quad \{\alpha\}.$$

$$\sim \alpha = \beta, \quad \sim \beta = \sim \gamma = \alpha,$$
$$\alpha \vee p = \alpha, \quad \beta \vee p = p, \quad \gamma \vee p = \gamma.$$

Id, *Taut*, *Add**, *Simp*, *Assoc**, *Comm*, *Sum* sind richtige Formeln; nicht aber *Add* (und folglich auch nicht *Assoc*), denn

$$\sim \alpha \vee \cdot \gamma \vee \alpha = \beta \vee \gamma = \gamma.$$

Gruppe VII.

$$(\alpha, \beta, \gamma); \quad \{\alpha, \gamma\}.$$

$$\sim \alpha = \beta, \quad \sim \beta = \alpha, \quad \sim \gamma = \beta,$$
$$\alpha \vee p = \alpha,$$
$$\beta \vee p = \gamma \vee p = p.$$

Id, *Taut*, *Add*, *Assoc**, *Sum* sind richtige Formeln; nicht aber *Add**, denn

$$\sim \gamma \vee \cdot \gamma \vee \beta = \beta \vee \beta = \beta.$$

Gruppe VIII.

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta); \quad \{\alpha\}.$$

$$\sim \alpha = \beta, \quad \sim \beta = \alpha, \quad \sim \gamma = \alpha, \quad \sim \delta = \gamma,$$
$$\alpha \vee p = p \vee \alpha = \alpha,$$
$$\beta \vee p = p \vee \beta = p,$$
$$p \vee p = p,$$
$$\gamma \vee \delta = \alpha, \quad \delta \vee \gamma = \delta.$$

Id, Taut, Add, Add, Comm, Sum* sind richtige Formeln; nicht aber *Perm* (und folglich auch weder *Assoc* noch *Assoc**), denn

$$\sim (\gamma \vee \delta) \vee \cdot \delta \vee \gamma = \sim \alpha \vee \delta = \beta \vee \delta = \delta.$$

Gruppe IX.

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta); \quad \{\alpha, \gamma\}.$$

$$\sim \alpha = \beta, \quad \sim \beta = \alpha, \quad \sim \gamma = \delta, \quad \sim \delta = \gamma,$$
$$\alpha \vee p = p \vee \alpha = \alpha,$$
$$\beta \vee p = \delta \vee p = p,$$
$$\gamma \vee \beta = \beta,$$
$$\gamma \vee \gamma = \gamma \vee \delta = \gamma.$$

Id, Taut, Add, Assoc, Sum sind richtige Formeln; nicht aber *Assoc** (und folglich auch weder *Add** noch *Perm*), denn

$$\sim (\gamma \vee \cdot \beta \vee \delta) \vee : \gamma \vee \beta \cdot \vee \delta$$
$$= \sim (\gamma \vee \delta) \vee \cdot \beta \vee \delta$$
$$= \sim \gamma \vee \delta = \delta \vee \delta = \delta.$$

(Eingegangen am 7. April 1925.)

Reciprocal formulae involving series and integrals.

By

E. C. Titchmarsh in London.

1. Introduction. In the following paper I give proofs of these two theorems:

Theorem A. *Let a_n denote any sequence of numbers such that the series*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p \qquad (p>1) \tag{1a}$$

is convergent, and let

$$b_n = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_m}{m+n+\frac{1}{2}} \tag{2a}$$

for all values of n. Then the series $\Sigma |b_n|^p$ is also convergent, and there is a number N_p depending only on p such that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^p \leqq N_p^p \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p. \tag{3a}$$

We have the reciprocal formula

$$a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{m+n+\frac{1}{2}}. \tag{4a}$$

If further α_n, β_n, are related in the same way as a_n, b_n but with exponent $p/(p-1)$, then

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \beta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \alpha_n. \tag{5a}$$

When $p=2$ we may put $\alpha_n = a_n$, so that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2. \tag{6a}$$

Theorem B. *Let $f(x)$ be any function such that the integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \qquad (p > 1) \tag{1b}$$

is convergent, and let

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt, \tag{2b}$$

the integral being defined as a principal value at $t = x$. This principal value exists for almost all values of x, the function $|F(x)|^p$ is integrable over $(-\infty, \infty)$, and

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx \leqq N_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx. \tag{3b}$$

We have, in the same sense as (2b), the reciprocal formula

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{t-x} dt. \tag{4b}$$

If further $g(x)$, $G(x)$, are related in the same way as $f(x)$, $F(x)$, but with exponent $p/(p-1)$, then

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx. \tag{5b}$$

When $p = 2$ we may put $g(x) = f(x)$, so that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F(x)\}^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx. \tag{6b}$$

Theorem B is, in the form given here, due to M. Riesz[1]). The reciprocal formulae (2b), (4b), have however been considered in various forms, and theorems about them have been deduced from very different sources — by Hardy[2]) from the theory of Cauchy's principal values, by Kellogg[3]) and Hilbert[4]) from the theory of integral equations, by Young[5]) and Plessner[6]), from the theory of Fourier series, by myself[7])

---

[1]) Riesz's paper has not yet been published.

[2]) G. H. Hardy, Proc. London Math. Soc. (2) 7 (1908), pp. 181–208.

[3]) O. D. Kellogg, Math. Ann. 58 (1904), pp. 441–456; 60 (1905), pp. 424–433.

[4]) D. Hilbert, Theorie der linearen Integralgleichungen (1912), pp. 75–77.

[5]) W. H. Young, Messenger of Math. 41 (1912), pp. 161–166.

[6]) A. Plessner, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Gießen (1922).

[7]) E. C. Titchmarsh, Proc. London Math. Soc. 24 (1925), pp. 109–130.

from the kindred theory of Fourier transforms, again by Hardy[8]) from a consideration of singular integrals involving logarithmic functions, and by Riesz from the theory of complex integration. I introduce here a new method, which consists in first proving Theorem A, and then deducing Theorem B by a limiting process.

Theorem A is a complete algebraical analogue of Theorem B. Naturally it is of a more elementary character, and I prove it in an entirely elementary way. The main difficulty lies in proving the inequality (3a) for $p \neq 2$; but when this has been surmounted in the algebraical case, the general case of Theorem B presents no more difficulty than the case $p = 2$. Of the above authors only Riesz obtained the general case. The case $p = 2$ is a particular case of a general theorem relating to orthogonal matrices[9]).

The formulae (2a), (4a), may be replaced by the more general ones

$$b_n = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{a_m}{m+n+\lambda}, \qquad a_n = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{b_m}{m+n+\lambda},$$

but the theory of these presents no features which do not occur in the case $\lambda = \frac{1}{2}$.

In proceeding from Theorem A to Theorem B the main difficulty lies in proving the existence of the principal values. The fact that the limit

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{a} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt$$

exists for almost all values of x when $|f(x)|^2$ is integrable can be proved without difficulty if we assume a sufficient knowledge of the theory of Fourier series. Actually the limit exists almost everywhere if $f(x)$ is any integrable function, as was proved by Plessner in his dissertation referred to. No proof substantially different from Plessner's of the general theorem has been given; but a proof depending only on elementary inequalities and the theory of sets of points has been given by Besikovitch[10]) for the case when $|f(x)|^2$ is integrable. Here I extend Besikovitch's proof to all functions which have a power greater than the first integrable.

---

[8]) G. H. Hardy, Messenger of Math. **54** (1924), pp. 20–27 and pp. 81–88.

[9]) E. Hellinger and O. Toeplitz, Math. Ann. **69** (1910), 289–330. J. Schur, Journal für Math. **140** (1911), pp. 1–28.

[10]) A. Besikovitch, Fundamenta Math. **4** (1923), pp. 172–195.

The formulae (2b), (4b), may, by writing $F(-x) = \Phi(x)$, be put in the more symmetrical form

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t+x}dt, \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(t)}{t+x}dt$$

analogous to (2a), (4a). But I keep the more usual form.

The constant N_p, supposed the least for which (3a) is true, is also the least for which (3b) is true. Its exact value seems to be of little importance, and is only known for $p = 2$. A certain amount of information about it may however be gathered from our analysis.

Theorem C. *We have* $N_3 = 1$, *and* $N_p = N_{p/(p-1)}$ *for all values of* p. *Considered as a function of* p, N_p *is continuous increasing for* $p \geqq 2$, *and there are constants* A, B, *such that*

$$A\,p < N_p < B\,p^{1/2} \qquad (p > 2).$$

A smaller but more complicated exponent could be obtained on the right; but as I cannot state the exact rate of increase, I leave the inequality in its simplest form.

2. Proof of Theorem A.

2.1. *Proof of* (6a), (6b), *when* $p = 2$ *and* $a_m = 0$ $(|m| > k)$.

We have

$$\sum_{m=-k}^{k}\left|\frac{a_m}{m+n+\frac{1}{2}}\right| \leqq \frac{(2k+1)\,\mathrm{Max}\,|a_m|}{|n|-k-\frac{1}{2}} \qquad (|n| > k).$$

Hence the series $\Sigma|b_n|^2$, when expressed as a double series, is absolutely convergent. Hence

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m=-k}^{k}\frac{a_m}{m+n+\frac{1}{2}}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m=-k}^{k}\frac{a_m^2}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2} + 2\sum_{m_1<m_2}\frac{a_{m_1}a_{m_2}}{\left(m_1+n+\frac{1}{2}\right)\left(m_2+n+\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

$$(2.11) \quad = \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=-k}^{k}a_m^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{m_1<m_2}a_{m_1}a_{m_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m_1+n+\frac{1}{2}\right)\left(m_2+n\right.}$$

Now

$$(2.12)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \dots\right\} = \pi^2$$

and

$$\sum_{n=-r}^{s} \frac{1}{\left(m_1+n+\frac{1}{2}\right)\left(m_2+n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{m_2-m_1} \sum_{n=-r}^{s} \left(\frac{1}{m_1+n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{m_2+n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{m_2-m_1}\left(\sum_{n=m_1-r}^{m_1+s} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=m_2-r}^{m_2+s} \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{m_2-m_1}\left(\sum_{n=m_1-r}^{m_2-r-1} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=m_1+s+1}^{m_2+s} \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right).$$

Hence

$$\left|\sum_{n=-r}^{s} \frac{1}{\left(m_1+n+\frac{1}{2}\right)\left(m_2+n+\frac{1}{2}\right)}\right| < \frac{1}{r-m_2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{s+m_1+\frac{3}{2}}$$

if $r > m_2$, $s > -m_1$. Hence

$$(2.13)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(m_1+n+\frac{1}{2}\right)\left(m_2+n+\frac{1}{2}\right)} = 0 \qquad (m_1 \neq m_2).$$

Hence (2.11) reduces to

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n^2$$

which proves (6a) in this case. Also

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{m+n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m+n+\frac{1}{2}} \sum_{r=-k}^{k} \frac{a_r}{r+m+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{r=-k}^{k} a_r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\left(m+r+\frac{1}{2}\right)} = a_n$$

by (2.12), (2.13). This proves (4a).

2.2. *Proof of Theorem* A *in the case* $p = 2$. We assume now simply that (1a) is convergent for $p = 2$. Writing

$$(2.21)\qquad b_{n,k} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-k}^{k} \frac{a_m}{m+n+\frac{1}{2}}$$

it follows from § 2.1 that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{n,k}^2 = \sum_{n=-k}^{k} a_n^2$$

for all values of k. *A fortiori*

$$\sum_{n=-N}^{N} b_{n,k}^2 \leqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2$$

for all values of N and k. Making $k \to \infty$ we have

$$\sum_{n=-N}^{N} b_n^2 \leqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2$$

and then making $N \to \infty$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^2 \leqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2. \tag{2.22}$$

This proves (3a). To prove (4a) we have to show that when m_1 and m_2 tend to infinity

$$\lim \sum_{m=-m_1}^{m_2} \frac{b_m}{m+n+\frac{1}{2}} = \pi a_n.$$

Now it follows from § 2.1 that if $-k < n < k$

$$\lim \sum_{m=-m_1}^{m_2} \frac{b_{m,k}}{m+n+\frac{1}{2}} = \pi a_n.$$

Hence it is sufficient to prove that we can choose k so large that

$$\left| \sum_{m=-m_1}^{m_2} \frac{b_m - b_{m,k}}{m+n+\frac{1}{2}} \right| < \varepsilon$$

for all values of m_1 and m_2. And in fact

$$\left| \sum_{m=-m_1}^{m_2} \frac{b_m - b_{m,k}}{m+n+\frac{1}{2}} \right| \leqq \left\{ \sum_{m=-m_1}^{m_2} (b_m - b_{m,k})^2 \sum_{m=-m_1}^{m_2} \frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \pi \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (b_m - b_{m,k})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \pi \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-k-1} a_n^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

by (2.22), and this is independent of m_1 and m_2, and may be made as small as we please by taking k large enough. So (4a) is proved.

Now starting from (4a) and the convergence of Σb_n^2, we obtain in the same way as (2.22)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 \leqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^2. \tag{2.23}$$

(6a) now follows from (2.22) and (2.23). Also if b_n, β_n are transforms of a_n, α_n, then $b_n + \beta_n$ is the transform of $a_n + \alpha_n$. Hence

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \beta_n = \frac{1}{2}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}(b_n+\beta_n)^2 - \sum_{-\infty}^{\infty} b_n^2 - \sum_{-\infty}^{\infty}\beta_n^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}(a_n+\alpha_n)^2 - \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^2 - \sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n^2\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \alpha_n$$

which is (5a). This completes the proof in the case $p = 2$.

2.3. *Proof of* (3a) *when* p *is a power of* 2. Since we have proved the theorem for $p = 2$, it is sufficient to prove that, if it is true for a particular value of p, then it is also true for $2p$.

Suppose first that $a_m = 0$ for $|m| > k$. Then

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m^2}{m+n+\frac{1}{2}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m+n+\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{r=-k}^{k}\frac{a_r}{m+r+\frac{1}{2}}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{m+n+\frac{1}{2}}\left\{\sum_{r=-k}^{k}\frac{a_r^2}{\left(m+r+\frac{1}{2}\right)^2} + 2\sum_{r_1<r_2}\frac{a_{r_1}a_{r_2}}{\left(m+r_1+\frac{1}{2}\right)\left(m+r_2+\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{r=-k}^{k} a_r^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\left(m+r+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\sum_{r_1<r_2} a_{r_1}a_{r_2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\left(m+r_1-\frac{1}{2}\right)\left(m+r_2+\frac{1}{2}\right)}.$$

Now if $r = n$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\left(m+r+\frac{1}{2}\right)^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^3} = 0 \tag{2.311}$$

while if $r \neq n$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\left(m+r+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{n-r}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{m+r+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{m+r+\frac{1}{2}} - \frac{1}{m+n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{n-r} \tag{2.312}$$

by (2.12), (2.13). Also

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\left(m+r_1+\frac{1}{2}\right)\left(m+r_2+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{r_2-r_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m+n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{m+r_1+\frac{1}{2}} - \frac{1}{m+r_2+\frac{1}{2}} \right),$$

which is zero if $r_1 \neq n$, $r_2 \neq n$, by (2.13). If $r_1 = n$ the sum is $\pi^2/(r_2-n)$ by (2.312), while if $r_2 = n$ the sum is $\pi^2/(r_1-n)$. Hence

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m^2}{m+n+\frac{1}{2}} = \sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{a_r^2}{n-r} + 2a_n \sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{a_r}{r-n} \tag{2.32}$$

the accent indicating that the term $n=r$ is omitted. Let

$$b_n' = \frac{1}{\pi} \sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{a_r}{r-n}, \qquad B_n = \frac{1}{\pi} \sum_{r=-k}^{k} \frac{a_r^2}{n+r+\frac{1}{2}}, \qquad B_n' = \frac{1}{\pi} \sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{a_r^2}{r-n}.$$

Then by (2.32) the transform of b_n^2 is $2a_n b_n' - B_n'$. Hence, assuming (3a) for a certain value of p, we have

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^{2p} \leqq N_p^p \sum_{n=-\infty}^{\infty} |2a_n b_n' - B_n'|^p.$$

Hence

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^{2p} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq 2N_p \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n b_n'|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + N_p \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n'|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq 2N_p \left\{ \sum_{n=-k}^{k} |a_n|^{2p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n'|^{2p} \right\}^{\frac{1}{2p}} + N_p \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n'|^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{2.33}$$

We now require to replace b_n', B_n', by b_{-n}, B_{-n}. We have

$$B_n' = B_{-n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{a_r^2}{\left(r-n+\frac{1}{2}\right)(r-n)} - \frac{2}{\pi} a_n^2,$$

so that

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n'|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{a_r^2}{\left(r-n+\frac{1}{2}\right)(r-n)} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=-k}^{k} |a_n|^{2p} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Now

$$\left|\sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{a_r^2}{\left(r-n+\frac{1}{2}\right)(r-n)}\right|^p \leqq \sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{|a_r|^{2p}}{\left|r-n+\frac{1}{2}\right|^p} \cdot \left\{\sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{1}{|r-n|^{p/(p-1)}}\right\}^{p-1}$$

and

$$\sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{1}{|r-n|^{p/(p-1)}} < 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p/(p-1)}} < 2\left\{1+\int_1^{\infty} t^{-\frac{p}{p-1}}\,dt\right\} = 2p.$$

Hence

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{a_r^2}{\left(r-n+\frac{1}{2}\right)(r-n)}\right|^p < (2p)^{p-1}\sum_{r=-k}^{k}|a_r|^{2p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\left|r-n+\frac{1}{2}\right|^p}$$

and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\left|r-n+\frac{1}{2}\right|^p} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^p} < 2\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} t^{-p}\,dt = \frac{2^p}{p-1},$$

so that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{r=-k}^{k}{}' \frac{a_r^2}{\left(r-n+\frac{1}{2}\right)(r-n)}\right|^p < \frac{(2p)^{p-1}2^p}{p-1}\sum_{r=-k}^{k}|a_r|^{2p} < (4p)^p\sum_{r=-k}^{k}|a_r|^{2p}.$$

Hence

$$(2.34)\quad \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|B_n'|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|B_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \frac{2}{\pi}(p+1)\left\{\sum_{r=-k}^{k}|a_r|^{2p}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Substituting a_r for a_r^2, and $2p$ for p, we obtain

$$(2.35)\quad \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}} \leqq \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}} + \frac{2}{\pi}(2p+1)\left\{\sum_{r=-k}^{k}|a_r|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}}.$$

Combining (2.33), (2.34), (2.35), we have

$$(2.36)\quad \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq 2N_p\left\{\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^{2p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}}$$

$$+ N_p\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|B_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \frac{2}{\pi}(5p+3)N_p\left\{\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

But since B_n is the transform of a_n^2

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|B_n|^p \leqq N_p^p\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^{2p}.$$

Hence

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq 2N_p\left\{\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^{2p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}} + \left\{\frac{2}{\pi}(5p+3)N_p+N_p^2\right\}\left\{\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

or

$$\left\{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}-N_p\left(\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}\right\}^2 \leqq \left\{\frac{2}{\pi}(5p+3)N_p+2N_p^2\right\}\left\{\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

or

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}} \leqq \left[N_p+\left\{\frac{2}{\pi}(5p+3)N_p+2N_p^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\left\{\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}}.$$

Suppose now simply that $\Sigma|a_n|^{2p}$ is convergent. Then we have proved that

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_{n,k}|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}} \leqq \left[N_p+\left\{\frac{2}{\pi}(5p+3)N_p+2N_p^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\left\{\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}}$$

and it follows by the argument used at the beginning of § 2.2 that

$$(2.37)\quad \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}} \leqq \left[N_p+\left\{\frac{2}{\pi}(5p+3)N_p+2N_p^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\left\{\sum_{n=-\infty}^{r}|a_n|^{2p}\right\}^{\frac{1}{2p}}$$

This proves (3a) for $2p$, and so for any power of 2.

2.4. *Proof of* (3a) *for all values of p greater than unity*[11]. Suppose that we have obtained (3a) for two different values of p, say $p=q$, $p=r$. Let

$$\varphi=\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^s, \qquad \psi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_{n,k}|^s \qquad (s>1).$$

Then for all values of the a_n such that $\varphi=1$, ψ has a maximum value depending only on s and k, say $N_{s,k}^s$. When ψ has its maximum value, i. e. when

$$(2.41)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_{n,k}|^s=N_{s,k}^s\sum_{n=-k}^{k}|a_n|^s,$$

[11]) The method is suggested by Hausdorff's proof of the generalized Parseval theorem. See F. Hausdorff, Math. Zeitschr. **16** (1923), p. 163—169.

we have

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_n} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \qquad (n = -k, -k+1, \ldots, k).$$

Now

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = s \operatorname{sign} a_n |a_n|^{s-1}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial a_n} = \frac{s}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign} b_{m,k} |b_{m,k}|^{s-1}}{m+n+\frac{1}{2}}.$$

Hence

$$(2.42) \qquad \lambda \operatorname{sign} a_n |a_n|^{s-1} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign} b_{m,k} |b_{m,k}|^{s-1}}{m+n+\frac{1}{2}} \qquad (n = -k, \ldots, k).$$

To find the value of λ, multiply by a_n and sum from $-k$ to k. We get

$$\lambda \sum_{n=-k}^{k} |a_n|^s = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} b_{m,k} |b_{m,k}|^{s-1} \sum_{n=-k}^{k} \frac{a_n}{m+n+\frac{1}{2}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_{m,k}|^s,$$

so that by (2.41)

$$(2.43) \qquad \lambda = N_{s,k}^s$$

Now it follows from (2.42) that the transform of $\operatorname{sign} b_{m,k} \cdot |b_{m,k}|^{s-1}$ is $\lambda \operatorname{sign} a_n |a_n|^{s-1}$, for $n = -k, \ldots, k$. Hence by (3a) with $p = q$

$$\sum_{n=-k}^{k} \left| \lambda \operatorname{sign} a_n |a_n|^{s-1} \right|^q \leqq N_q^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \operatorname{sign} b_{n,k} |b_{n,k}|^{s-1} \right|^q$$

or

$$(2.44) \qquad N_{s,k}^{sq} \sum_{n=-k}^{k} |a_n|^{q(s-1)} \leqq N_q^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_{n,k}|^{q(s-1)}.$$

Now by (3a) with $p = r$

$$(2.45) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_{n,k}|^r \leqq N_r^r \sum_{n=-k}^{k} |a_n|^r.$$

Taking $q(s-1) = r$, i. e. $s = 1 + r/q$, and combining (2.44), (2.45), we have

$$N_{1+r/q,k}^{q+r} \leqq N_q^q N_r^r.$$

Since this is true for all values of k it follows that (3a) holds for $p = 1 + r/q$, and

$$(2.46) \qquad N_{1+r/q}^{q+r} \leqq N_q^q N_r^r.$$

Suppose now that (3a) holds for a certain value of p greater than 2, and consider the set E which contains the points 2 and p, and is such that, if a and b are two points of E, then $1 + a/b$ is a point of E. Then it follows from a repeated application of (2.46) that (3a) holds for all points of E. We have in fact for every point s of E

$$N_s \leqq N_2^a N_p^{1-a} \leqq N_p$$

since (putting $q = r = p$ in (2.46)) $N_2 \leqq N_p$.

Now E is dense throughout the interval $p/(p-1)$, p. To prove this, observe first that if s is a point of E other than p, then there are points a, b, of E such that $s = 1 + a/b$. Hence $s/(s-1) = 1 + b/a$ is also a point of E. Hence it is sufficient to prove that E is dense in the interval $(2, p)$. If this is not the case there is an interval (α, β). where $2 \leqq \alpha < \beta \leqq p$, which contains no point of E in its interior. We may take it to be a 'maximum excluded interval', i. e. such that there are points of E of the form $s = \alpha - \varepsilon$, $s = \beta + \eta$, where ε and η are either zero or as small as we please. Then $(\alpha - \varepsilon)/(\alpha - \varepsilon - 1)$ is also a point of E, and hence so is

$$s = 1 + (\beta + \eta)(\alpha - \varepsilon - 1)/(\alpha - \varepsilon).$$

Now it is easily seen that this point lies in the interval (α, β) if ε and η are small enough. This gives a contradiction, so proving the density of E. Thus any point s in the interval $p/(p-1)$, p is the limit of a sequence $s_1, s_2, \ldots$ of points of E. Hence

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_{m,k}|^s \Big/ \sum_{m=-k}^{k} |a_m|^s = \lim \sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_{m,k}|^{s_n} \Big/ \sum_{m=-k}^{k} |a_m|^{s_n}$$
$$\leqq \lim N_{s_n}^{s_n} \leqq \lim N_p^{s_n} = N_p^s$$

and it follows as in previous cases that (3a) holds for s, and

$$N_s \leqq N_p. \tag{2.47}$$

Since in the above argument p may be any power of 2, we have now established (3a) in the general case.

2.5. *Proof of* (4a) *in the general case.* As in § 2.2 it is sufficient to prove that

$$\left| \sum_{m=-m_1}^{m_2} \frac{b_m - b_{m,k}}{m+n+\frac{1}{2}} \right| < \varepsilon \qquad (k > k_\varepsilon)$$

for all values of m_1 and m_2. And in fact

$$\left| \sum_{m=-m_1}^{m_2} \frac{b_m - b_{m,k}}{m+n+\frac{1}{2}} \right| \leqq \left\{ \sum_{m=-m_1}^{m_2} |b_m - b_{m,k}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{m=-m_1}^{m_2} \frac{1}{\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}} \right\}^{1-\frac{1}{p}}$$
$$\leqq \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_m - b_{m,k}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}} \right\}^{1-\frac{1}{p}}$$
$$\leqq N_p \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-k-1} |a_n|^p + \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{p/(p-1)}} \right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

which gives the result.

2.6. *Proof of* (5a) *in the general case.* We have

$$\sum_{n=-k}^{k} a_n \alpha_n = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-k}^{k} a_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_m}{m+n+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m \sum_{n=-k}^{k} \frac{a_n}{m+n+\frac{1}{2}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m b_{m,k}.$$

Now

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m (b_m - b_{m,k}) \right| \leqq \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_m - b_{m,k}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\beta_m|^{\frac{p}{p-1}} \right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leqq N_p \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-k-1} |a_n|^p + \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{m-\infty}^{\infty} |\beta_m|^{\frac{p}{p-1}} \right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

so that

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m b_{m,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m b_m.$$

This proves (5a), and completes the proof of Theorem A.

3. Proof of Theorem B.

3.1. Lemma α. *Let* $X_1 \leqq X_2 < X_3 \leqq X_4$, *and* $|f(t)| \leqq M (X_1 \leqq t \leqq X_4)$, $f(t) = a (X_2 \leqq t \leqq X_3)$, $f(t) = 0 (t < X_1 \text{ or } t > X_4)$. *Let* $X_2 + \delta < x < X_3 - \delta$, *let* ν *be an integer greater than* $3/\delta$, k *an integer such that* $\nu x < k \leqq \nu x + 1$, *and*

$$m_i = \nu \int_{(i-1)/\nu}^{i/\nu} f(t)\, dt.$$

Then

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\, dt - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} \right| < \frac{5M}{\nu\delta - 3}.$$

We have $f(t) = a$ for $(k-N)/\nu < t < (k+N)/\nu$ if

$$|x - (k \pm N)/\nu| \leqq \delta$$

which is true if $N + 1 \leqq \nu\delta$, or if N is the integer such that

$$\nu\delta - 2 < N \leqq \nu\delta - 1.$$

Then

$$\sum_{i=k-N+1}^{k+N} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} = a \sum_{i=k-N+1}^{k+N} \frac{1}{i-k-\frac{1}{2}} = 0 \tag{3.11}$$

and

$$\int_{(k-N)/\nu}^{(k+N)/\nu} \frac{f(t)}{t-x}\,dt = a\int_{x-(k-N)/\nu}^{(k+N)/\nu-x} \frac{dt}{t} < \frac{2a\,(k/\nu-x)}{x-(k-N)/\nu}$$

$$< \frac{2a}{N-1} < \frac{2M}{\nu\delta-3}. \tag{3.12}$$

Also if $i \geqq k+N+1$

$$\left|\int_{(i-1)/\nu}^{i/\nu} \frac{f(t)}{t-x}\,dt - \frac{m_i}{i-\nu x-\frac{1}{2}}\right| = \left|\int_{(i-1)/\nu}^{i/\nu} \left\{\frac{1}{t-x} - \frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)/\nu-x}\right\} f(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_{(i-1)/\nu}^{i/\nu} \frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)/\nu-t}{(t-x)\left\{\left(i-\frac{1}{2}\right)/\nu-x\right\}} f(t)\,dt\right| < \frac{M}{2\nu}\int_{(i-1)/\nu}^{i/\nu} \frac{dt}{(t-x-1/2\nu)^2}.$$

Hence

$$\left|\int_{(k+N)/\nu}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt - \sum_{i=k+N+1}^{\infty} \frac{m_i}{i-\nu x-\frac{1}{2}}\right| < \frac{M}{2\nu}\int_{(k+N)/\nu}^{\infty} \frac{dt}{(t-x-1/2\nu)}$$

$$= \frac{M}{2\left(k+N-\nu x-\frac{1}{2}\right)} < \frac{M}{2(N-1)} < \frac{M}{2(\nu\delta-3)}. \tag{3.13}$$

Similarly

$$\left|\int_{-\infty}^{(k-N)/\nu} \frac{f(t)}{t-x}\,dt - \sum_{i=-\infty}^{k-N} \frac{m_i}{i-\nu x-\frac{1}{2}}\right| < \frac{M}{2(\nu\delta-3)}. \tag{3.14}$$

Also

$$\left|\sum_{i=k+N+1}^{\infty}\left(\frac{m_i}{i-\nu x-\frac{1}{2}} - \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}}\right)\right| < M\sum_{i=k+N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(i-k-\frac{1}{2}\right)^2} < \frac{M}{\nu\delta-3}, \tag{3.15}$$

$$\left|\sum_{i=-\infty}^{k-N}\left(\frac{m_i}{i-\nu x-\frac{1}{2}} - \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}}\right)\right| < M\sum_{i=-\infty}^{k-N} \frac{1}{\left(i-k-\frac{1}{2}\right)^2} < \frac{M}{\nu\delta-3}. \tag{3.16}$$

The result follows at once from these six relations.

3.2. *Proof of Theorem* B *in the case when* $f(t) = a_\mu$ $(x_\mu \leqq t < x_{\mu+1})$ *for* $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$, *and* $f(t) = 0$ *for* $t < x_1$, *or* $t > x_m$.

3.21. The principal value of (2b) obviously exists except at the discontinuities of $f(t)$. The remainder of the theorem will be deduced from the formula

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}}\right|^p dx = 0 \tag{3.211}$$

where m_i and k are defined as in Lemma α. Let $x_0 < x_1$, $x_{m+1} > x_m$, and let E be the set consisting of the intervals $(x_\mu + \delta, x_{\mu+1} - \delta)$ for $\mu = 0, 1, \ldots, m$, and let E' be its complement with respect to (x_0, x_{m+1}). Then, calling the above integral I,

$$I = \int_E + \int_{E'} + \int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_{m+1}}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Putting $X_1 = x_0$, $X_2 = x_\mu$, $X_3 = x_{\mu+1}$, $X_4 = x_{m+1}$ in Lemma α, we have

$$\int_{x_\mu+\delta}^{x_{\mu+1}-\delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} \right|^p dx < \left(\frac{5M}{\nu\delta - 3}\right)^p (x_{\mu+1} - x_\mu - 2\delta).$$

Summing with respect to μ we have

$$|I_1| < \left(\frac{5M}{\nu\delta - 3}\right)^p (x_{m+1} - x_0) < K \frac{x_{m+1} - x_0}{\nu^p \delta^p}. \tag{3.212}$$

Again

$$|I_2| \leqq 2^{p-1} \int_{E'} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt \right|^p dx + 2^{p-1} \int_{E'} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} \right|^p dx.$$

Now $m(E') = 2m\delta$, and the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt$$

has only a finite number of logarithmic infinities, so that its p^{th} power is integrable over any finite interval. Hence the first term on the right tends to zero with δ. Also $m_i = 0$ for $i < \nu x_1$, or $i > 1 + \nu x_m$, whence it easily follows that for any value of x

$$\left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} \right| < 4M \log\{2\nu(x_m - x_1) + 4\}.$$

Hence

$$\begin{aligned} |I_2| &< o(1) + 2^{3p} m M^p \delta \log^p \{2\nu(x_m - x_1) + 4\} \\ &< o(1) + K\delta \log^p \nu. \end{aligned} \tag{3.213}$$

Again

$$|I_3| < 2^{p-1} \int_{-\infty}^{x_0} \left| \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{t-x} \right|^p dt + 2^{p-1} \int_{-\infty}^{x_0} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} \right|^p dx,$$

and if $x < x_0$ we have, since $f(t) = 0$ outside (x_1, x_m),

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt \right| < M \frac{x_m - x_1}{x_1 - x}, \qquad \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} \right| < M \frac{\nu x_m - \nu x_1 + 1}{\nu x_1 - \nu x - 2}.$$

Hence

$$|I_3| < \frac{2^{p-1}M^p(x_m - x_1)^p}{(p-1)(x_1-x_0)^{p-1}} + \frac{2^{p-1}M^p(x_m - x_1 + 1/\nu)^p}{(p-1)(x_1-x_0-2/\nu)^{p-1}} < \frac{K}{|x_0|^{p-1}}. \tag{3.214}$$

Similarly

$$|I_4| < \frac{K}{|x_{m+1}|^{p-1}}. \tag{3.215}$$

Combining these results we have

$$|I| < K\frac{x_{m+1}-x_0}{\nu^p\delta^p} + o(1) + K\delta\log^p\nu + \frac{K}{|x_0|^{p-1}} + \frac{K}{|x_{m+1}|^{p-1}}$$

and (3.211) follows on taking $\delta = \nu^{-\frac{1}{2}}$, $x_0 = -\nu^{p/4}$, $x_{m+1} = \nu^{p/4}$ $(\nu > \nu_0)$.

3.22. *Proof of* (3b). It follows from (3.211) that

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}}\right|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}\,dt\right|^p dx. \tag{3.221}$$

Now

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}}\right|^p dx = \frac{1}{\nu}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}}\right|^p \leqq \frac{1}{\nu}\pi^p N_p^p \sum_{i=-\infty}^{\infty}|m_i|^p$$

by (3a), and

$$|m_i|^p = \nu^{-p}\left|\int_{(i-1)/\nu}^{i/\nu} f(t)\,dt\right|^p \leqq \nu\int_{(i-1)/\nu}^{i/\nu}|f(t)|^p\,dt.$$

Hence

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}}\right|^p dx \leqq \pi^p N_p^p\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p\,dt. \tag{3.222}$$

and (3b) follows from (3.221), (3.222).

3.23. *Proof of* (4b). Let ξ be an internal point of an interval where $f(t)$ is constant, say at a distance c from the nearest discontinuity; let $\delta < \frac{1}{2}c$, and let j, s, be integers such that $\nu\xi < j \leqq \nu\xi + 1$, $\nu\delta < s \leqq \nu\delta + 1$. Then

$$\left|\int_{(j+s)/\nu}^{\infty}\left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{\nu}{j-k-\frac{1}{2}}\right)F(x)\,dx\right| < \frac{3}{\nu}\int_{(j+s)/\nu}^{\infty}\left|\frac{F(x)}{(\xi-x)(\xi-x-3/\nu)}\right|dx < \frac{K}{\nu}$$

for fixed δ; and

$$\left|\int_{(j+s)/\nu}^{\infty}\frac{\nu}{j-k-\frac{1}{2}}\left\{F(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}}\right\}dx\right|$$

$$\leqq \left\{\int_{(j+s)/\nu}^{\infty}\left|F(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}}\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{(j+s)/\nu}^{\infty}\frac{dx}{|\xi-x-3/\nu|^{\frac{p}{p-1}}}\right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

which tends to zero as $\nu \to \infty$, by (3.211). Hence

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{\pi} \int_{(j+s)/\nu}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j-k-\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} \right\} dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_{(j+s)/\nu}^{\infty} \frac{F(x)}{\xi - x}\, dx$$

or

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=j+s}^{\infty} \frac{1}{j-k-\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} = \int_{\xi+\delta}^{\infty} \frac{F(x)}{\xi - x}\, dx. \tag{3.231}$$

Similarly

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{j-s-1} \frac{1}{j-k-\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} = \int_{-\infty}^{\xi-\delta} \frac{F(x)}{\xi - x}\, dx. \tag{3.232}$$

Again

$$\sum_{k=j-s}^{j+s+1} \frac{1}{j-k-\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} = \sum_{r=1}^{s} \frac{1}{r-\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{m_{i+j+1}}{i+r+\frac{1}{2}} - \frac{m_{i+j+1}}{i-r-\frac{1}{2}} \right\}$$

and

$$\sum_{i=-q-r+1}^{q-r} \frac{m_{i+j+1}}{i+r+\frac{1}{2}} = 0, \qquad \sum_{i=-q+r+1}^{q+r} \frac{m_{i+j+1}}{i-r-\frac{1}{2}} = 0$$

if all the m_i in these sums have the same value, which is true if $q = [\frac{1}{2}\nu c] - 4$. Hence

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{m_{i+j+1}}{i+r+\frac{1}{2}} - \frac{m_{i+j+1}}{i-r-\frac{1}{2}} \right\} = -\sum_{i=-\infty}^{-q-r} \frac{(2r+1)\, m_{i+j+1}}{i^2 - \left(r+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$- \sum_{i=q+r}^{\infty} \frac{(2r+1)\, m_{i+j+1}}{i^2 - \left(r+\frac{1}{2}\right)^2} + \sum_{i=q-r+1}^{q+r-1} \frac{m_{i+j+1}}{i+r+\frac{1}{2}} - \sum_{i=-q-r+1}^{-q+r} \frac{m_{i+j+1}}{i-r-\frac{1}{2}}$$

and it is easily seen that the modulus of each term on the right is less than Kr/ν. Hence

$$\left| \sum_{k=j-s}^{j+s+1} \frac{1}{j-k-\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} \right| < K\frac{s}{\nu} < K\delta. \tag{3.233}$$

Combining (3.231), (3.232), (3.233), we have

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left| \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j-k-\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} - \left(\int_{-\infty}^{\xi-\delta} + \int_{\xi+\delta}^{\infty} \right) \frac{F(x)}{\xi - x}\, dx \right| < K\delta.$$

But by (4a)

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{j-k-\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty}{}' \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} = \pi m_j = \pi\nu \int_{(j-1)/\nu}^{j/\nu} f(t)\,dt = \pi f(\xi)$$

if $\nu > 1/c$. Hence

$$\left| \pi f(\xi) - \left(\int_{-\infty}^{\xi-\delta} + \int_{\xi+\delta}^{\infty} \right) \frac{F(x)}{\xi - x}\,dx \right| < K\delta$$

which gives (4b).

3.24. *Proof of* (5b). Let $g(t)$ be another function satisfying the conditions of § 3.2, and let

$$n_i = \nu \int_{(i-1)/\nu}^{i/\nu} g(t)\,dt.$$

Now, using (3.211) and its analogue with $g(t)$, and the inequality

$$\begin{aligned} |\int (FG - F_n G_n)\,dx| &\leqq |\int (F - F_n) G\,dx| + |\int F_n (G - G_n)\,dx| \\ &\leqq \{\int |F - F_n|^p dx\}^{\frac{1}{p}} \{\int |G|^{p/(p-1)} dx\}^{1-\frac{1}{p}} \\ &\quad + \{\int |F_n|^p dx\}^{\frac{1}{p}} \{\int |G - G_n|^{p/(p-1)} dx\}^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

we have

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty}{}' \frac{m_i}{i-k-\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty}{}' \frac{n_i}{i-k-\frac{1}{2}} \right\} dx = \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,G(x)\,dx.$$

But it follows from (5a) that the integral on the left is equal to

$$\frac{\pi^2}{\nu} \sum_{i=-\infty}^{\infty}{}' m_i n_i$$

and by a well-known theorem [12])

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu \sum_{i=-\infty}^{\infty}{}' \int_{(i-1)\nu}^{i/\nu} f(t)\,dt \int_{(i-1)/\nu}^{i/\nu} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(t)\,dt.$$

This proves (5b).

---

[12]) See E. W. Hobson, Theory of Functions a Real Variable (ed. 2) 1, p. 612. Of course we need here only the case where the functions have Riemann integrals, which is easily proved.

3.3. *Proof of Theorem* B *in the general case.* If $f(x)$ is any function such that the integral (1b) exists, then [13]) there is a sequence of functions $f_n(x)$, each satisfying the conditions of § 3.2, such that

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)|^p \, dx = 0 .$$

Hence it is sufficient to prove that, if this relation holds and Theorem B is true for each $f_n(x)$, then it is also true for $f(x)$.

The main difficulty lies in proving the existence of the principal value of (2b). For this we require further lemmas.

3.4. Lemma β.[14]) *Let every point x of a set E included in an interval (a, b) be the mid-point of a closed interval $C(x)$ also included in (a, b) and let C be the set of all points belonging to any of the intervals $C(x)$. Then from the intervals $C(x)$ we can select two sets, each consisting of non-overlapping intervals, which between them contain all C except a set whose measure may be as small as we please.*

The set C consists of non-overlapping intervals, of which there are therefore only an enumerable infinity, say $C_1, C_2, \ldots$. Let $C_1', C_2', \ldots$ be the closed intervals obtained by shortening the intervals $C_1, C_2, \ldots$ at each end by $\delta_1, \delta_2, \ldots$ $(\delta_n < \delta^n)$. Since every point of the closed interval C_n' belongs to some $C(x)$, by the Heine-Borel theorem C_n' is contained in a finite number of intervals $C(x)$. From this finite number take first that which contains the left-hand end-point and stretches furthest to the right, next that which overlaps or abuts on the first and stretches furthest to the right, and so on. Call these intervals $D_1, D_2, \ldots$. Then $D_1, D_3, \ldots$ and $D_2, D_4, \ldots$ each form a non-overlapping set, and between them they cover C_n'. Proceeding in this way for each C_n' we enclose all C in two non-overlapping sets of intervals $C(x)$, except posssibly a set of measure $\delta/(1-\delta)$.

3.5. Lemma γ. *Let*

$$\Psi(\xi, x) = \int_{x-m(x)}^{x+m(x)} \frac{f(t)}{t-\xi} \, dt$$

where $f(t)$ satisfies the conditions of § 3.2, *and $m(x)$ is any positive function of x such that $x - m(x) \geqq a$, $x + m(x) \leqq b$. Then the measure of the set E in (a, b) where $|\Psi(x, x)| > R$ is less than*

$$3(8\pi N_p)^p R^{-p} \int_a^b |f(t)|^p \, dt .$$

---

[13]) F. Riesz, Math. Annalen 69 (1910), pp. 449–497 (459–466). Riesz proves the theorem for integrals with finite limits, but it can obviously be extended to infinite integrals.

[14]) Compare this and the following lemma with Besikovitch, l. c. pp. 175–177.

Let

$$\Phi(\xi) = \int_a^b \frac{f(t)}{t-\xi}\,dt,$$

$$\Omega(\xi, x) = \Phi(\xi) - \Psi(\xi, x) = \int_{x+m(x)}^{b} \frac{f(t)}{t-\xi}\,dt - \int_a^{x-m(x)} \frac{f(t)}{\xi - t}\,dt.$$

Suppose first that $f(t) \geqq 0$. Then $\Omega(\xi, x)$ is an increasing function of ξ for $x - m(x) < \xi < x + m(x)$. Hence

$$m(x)\,|\,\Omega(x, x)\,|^p \leqq \int_{x-m(x)}^{x+m(x)} |\,\Omega(\xi, x)\,|^p\,d\xi.$$

Now

$$\int_{x-m(x)}^{x+m(x)} |\,\Omega(\xi, x)|^p\,d\xi \leqq 2^{p-1} \int_{x-m(x)}^{x+m(x)} |\Phi(\xi)|^p\,d\xi + 2^{p-1} \int_{x-m(x)}^{x+m(x)} |\Psi(\xi, x)|^p\,d\xi$$

and

$$\int_{x-m(x)}^{x+m(x)} |\Psi(\xi, x)|^p\,d\xi \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\xi, x)|^p\,d\xi \leqq \pi^p N_p^p \int_{x-m(x)}^{x+m(x)} |f(t)|^p\,dt.$$

Hence

$$m(x)\,|\,\Omega(x, x)\,|^p \leqq 2^{p-1} \int_{x-m(x)}^{x+m(x)} |\Phi(\xi)|^p\,d\xi + 2^{p-1}\pi^p N_p^p \int_{x-m(x)}^{x+m(x)} |f(t)|^p\,dt.$$

Hence if $x_1, x_2, \ldots$ is a set of points for which the intervals $x - m(x)$, $x + m(x)$ do not overlap

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(x_n)\,|\,\Omega(x_n, x_n)\,|^p \leqq 2^{p-1} \int_a^b |\,\Phi(\xi)\,|^p\,d\xi + 2^{p-1}\pi^p N_p^p \int_a^b |f(t)|^p\,dt$$

$$\leqq (2\pi N_p)^p \int_a^b |f(t)|^p\,dt.$$

Let H be the set where $|\,\Omega(x, x)\,| > R$. By Lemma β we can choose two sequences of points x_n, x_n', such that each sequence gives a non-overlapping set of intervals $x - m(x)$, $x + m(x)$, and these intervals contain H except for a set of measure ε.

Now

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(x_n) < R^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} m(x_n)\,|\,\Omega(x_n, x_n)\,|^p < (2\pi N_p)^p R^{-p} \int_a^b |\,f(t)\,|^p\,dt$$

and similarly for $m(x_n')$; and it follows that

$$m(H) \leqq 2(2\pi N_p)^p R^{-p} \int_a^b |f(t)|^p\,dt.$$

Now at every point of E we have either $|\Omega(x,x)| > \frac{1}{2}R$ or $|\Phi(x)| > \frac{1}{2}R$. The former can only happen in a set of measure

$$2(4\pi N_p)^p R^{-p} \int_a^b |f(t)|^p dt$$

and since

$$\int_a^b |\Phi(x)|^p dx \leqq \pi^p N_p^p \int_a^b |f(t)|^p dt$$

the latter can only happen in a set of measure

$$(2\pi N_p)^p R^{-p} \int_a^b |f(t)|^p dt.$$

Hence

$$m(E) < 3(4\pi N_p)^p R^{-p} \int_a^b |f(t)|^p dt.$$

If $f(t)$ is not positive, let $f_1(t) = f(t)$ $(f(t) \geqq 0)$, $= 0$ $(f(t) < 0)$ and $f_2(t) = f_1(t) - f(t)$. Then

$$\Psi(x,x) = \int_{x-m(x)}^{x+m(x)} \frac{f_1(t)}{t-x} dt - \int_{x-m(x)}^{x+m(x)} \frac{f_2(t)}{t-x} dt = \Psi_1(x,x) - \Psi_2(x,x).$$

The measure of the set where $|\Psi_1(x,x)| > \frac{1}{2}R$ is less than

$$3(8\pi N_p)^p R^{-p} \int_a^b |f_1(t)|^p dt$$

and the measure of the set where $|\Psi_2(x,x)| > \frac{1}{2}R$ is less than

$$3(8\pi N_p)^p R^{-p} \int_a^b |f_2(t)|^p dt.$$

Since $|f_1(t)|^p + |f_2(t)|^p = |f(t)|^p$ the general result now follows.

3.6. Lemma δ. *If $f_n(t)$ satisfies the conditions of § 3.2 for all values of n, and*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^p dt = 0 \tag{3.61}$$

then the principal value of

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt \tag{3.62}$$

exists for almost all values of x, and

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f_n(t)}{t-x} dt = \int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt. \tag{3.63}$$

In Lemma γ take $m(x)$ so that

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(t)}{t-x}\, dt \right|$$

is a maximum for $\delta = m(x)$. Then it follows that the measure of the set where

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f_m(t)-f_n(t)}{t-x}\, dt \right| > X^{-r}$$

is less than

$$3(8\pi N_p X^r)^p \int_a^b |f_m(t)-f_n(t)|^p dt.$$

Choosing n_r so large that

$$\int_a^b |f_m(t)-f_n(t)|^p dt < X^{-2pr} \qquad (m, n, > n_r)$$

it follows that

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f_m(t)-f_n(t)}{t-x}\, dt \right| < X^{-r} \qquad (m, n > n_r)$$

for all values of δ, except in a set of measure less than $3(8\pi N_p)^p/X^{pr}$. Hence

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f_m(t)-f_n(t)}{t-x}\, dt < X^{-r} \qquad (m, n > n_r)$$

for all values of r and δ, except in a set of measure $3(8\pi N_p)^p/(X^p-1)$. Since X may be as large as we please it follows that, for almost all values of x

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f_m(t)-f_n(t)}{t-x}\, dt \right| < \varepsilon \qquad (m, n > n_0 = n_0(\varepsilon, x)) \tag{3.64}$$

for all values of δ. Hence with the same conditions

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f_m(t)-f_n(t)}{t-x}\, dt - \int_{x-\delta'}^{x+\delta'} \frac{f_m(t)-f_n(t)}{t-x}\, dt \right| < 2\varepsilon$$

$$\left| \int_{\delta}^{\delta'} \frac{f_m(x+\alpha)-f_m(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha - \int_{\delta}^{\delta'} \frac{f_n(x+\alpha)-f_n(x-\alpha)}{\alpha}\, dx \right| < 2\varepsilon.$$

But for fixed $\delta, \delta' > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\delta'} \frac{f_n(x+\alpha)-f_n(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \int_{\delta}^{\delta'} \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha. \tag{3.65}$$

Hence

$$(3.66)\qquad \left|\int_{\delta}^{\delta'} \frac{f_m(x+\alpha)-f_m(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha - \int_{\delta}^{\delta'} \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right| < 2\varepsilon.$$

Now if m is fixed we can choose Δ so small that

$$\left|\int_{\delta}^{\delta'} \frac{f_m(x+\alpha)-f_m(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right| < \varepsilon \qquad (\delta, \delta' < \Delta).$$

Hence

$$\left|\int_{\delta}^{\delta'} \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right| < 3\varepsilon \qquad (\delta, \delta' < \Delta)$$

which proves the existence of the principal value. And now (3.66) gives

$$\left|\int_{0}^{\delta} \frac{f_m(x+\alpha)-f_m(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha - \int_{0}^{\delta} \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right| < 2\varepsilon$$

for $m > n_0$ and all δ, and (3.63) follows.

3.7. *Proof of* (3b) *in the general case.* We have

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_m(t)}{t-x}\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(t)}{t-x}\,dt\right|^p dx \leqq \pi^p N_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(t) - f_n(t)|^p\,dt$$

which tends to zero when m and n tend to infinity. Hence there is a function $F(x)$ whose p^{th} power is integrable over $(-\infty, \infty)$, such that

$$(3.71)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(t)}{t-x}\,dt\right|^p dx = 0.$$

But it follows from Lemma δ that for almost all values of x

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(t)}{t-x}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt.$$

Hence

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt$$

for almost all values of x, i. e. $F(x)$ is the function so designated in Theorem B. Also it follows from (3.71) that

$$(3.72)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(t)}{t-x}\,dt\right|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p\,dx.$$

But since (3b) holds for $f_n(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_n(t)}{t-x}dt\right|^p dx \leqq N_p^p\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(t)|^p dt.$$

Hence

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^p dx \leqq N_p^p \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(t)|^p dt = N_p^p\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p dt. \tag{3.73}$$

3.8. *Proof of* (4b) *in the general case.* We have

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)}{t-x}dx\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_n(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_n(t)}{t-x}dt\Big|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)-F_n(t)}{t-x}dt\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

where

$$F_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_n(t)}{t-x}dt.$$

By hypothesis the first term on the right tends to zero when $n\to\infty$; and by the case of (4b) already obtained the second term is zero for all values of n. Also since the p^{th} power of $F(t)-F_n(t)$ is integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)-F_n(t)}{t-x}dt\right|^p dx \leqq N_p^p\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)-F_n(t)|^p dt$$

$$\leqq N_p^{2p}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-f_n(t)|^p dt$$

which tends to zero. Hence

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)}{t-x}dt\right|^p dx=0$$

and the result follows

3.9. *Proof of* (5b) *in the general case.* We have

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(t)g(t)-f_n(t)g_n(t)\right\}dt\right|$$

$$\leqq\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-f_n(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)-g_n(t)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

which tends to zero. Hence

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)g_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt$$

and similarly

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(t)G_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)\,dt.$$

Since we have already proved (5b) for $f_n(t)$, $g_n(t)$, the general result follows.

4. Proof of Theorem C.

Suppose that the least possible value of the constant in (3a) is N_p, and that the least possible value in (3b) is N_p'. Then it follows from the way in which (3b) was obtained that

$$N_p' \leqq N_p.$$

On the other hand it follows from (3b) that if $|f(x)|^p$ and $|g(x)|^{p/(p-1)}$ are integrable

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x-y}\,dx\,dy\right| \leqq \pi N_p'\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}.$$

Put $f(x)=\lambda a_n$ $(n<x<n+1/\lambda)$ and $f(x)=0$ elsewhere, and $g(x)=\lambda\alpha_n(n+\frac{1}{2}<x<n+\frac{1}{2}+1/\lambda)$ and $g(x)=0$ elsewhere, it being supposed that the series

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^p, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^{\frac{p}{p-1}}$$

are convergent. Making $\lambda\to\infty$ we easily obtain

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_m\alpha_n}{m-n-\frac{1}{2}}\right| \leqq \pi N_p'\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

or

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n b_{-n}\right| \leqq N_p'\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{1-\frac{1}{p}}.$$

Now we may put

$$\alpha_n = \operatorname{sign} b_{-n}\,|b_{-n}|^{p-1} \quad (|n|\leqq k), \qquad = 0 \quad (|n|>k).$$

This gives

$$\sum_{n=-k}^{k}|b_n|^p \leqq N_p'\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=-k}^{k}|b_n|^p\right\}^{1-\frac{1}{p}},$$

$$\left\{\sum_{n=-k}^{k}|b_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq N_p'\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Since this is true for all values of k, it follows that

$$N_p \leqq N_p'.$$

Hence actually $N_p = N_p'$.

It follows from (6a) that $N_2 = 2$. Also putting $q = p$, $r = p/(p-1)$ in (2.46) we have

$$N_{p/(p-1)}^{p+p/(p-1)} \leqq N_p^p N_{p/(p-1)}^{p/(p-1)}$$

or

$$N_{p/(p-1)} \leqq N_p.$$

Similarly putting $q = p/(p-1)$, $r = p$, we obtain

$$N_p \leqq N_{p/(p-1)}.$$

Hence

$$N_{p/(p-1)} = N_p. \tag{4.1}$$

The fact that N_p increases steadily for $p > 2$ follows from (2.47), since in § 2.4 p may now be taken to have any value. To prove that N_p is continuous, write $q/(q-1)$ for q in (2.46). Then

$$N_{1+r-r/q}^{q/(q-1)+r} \leqq N_{q/(q-1)}^{q/(q-1)} N_r^r = N_q^{q/(q-1)} N_r^r.$$

Put $q = p - \varepsilon^2$, $r = p + \varepsilon$. Then

$$1 + r - \frac{r}{q} = p + \varepsilon \frac{p - 1 - \varepsilon - \varepsilon^2}{p - \varepsilon^2} > p$$

if ε is small enough. Hence making $\varepsilon \to 0$ we get

$$N_{p+0}^{p/(p-1)+p} \leqq N_{p-0}^{p/(p-1)} N_{p+0}^p$$

or

$$N_{p+0} \leqq N_{p-0}.$$

Since N_p is increasing for $p > 2$ it follows that it is continuous for $p > 2$, and so by (4.1) for all values of p.

To obtain an upper bound for N_p, suppose that for a certain value of p

$$N_p < K p^\alpha \qquad (\alpha > 1).$$

Then it follows from (2.37) that

$$N_{2p} < K p^\alpha + \left\{ \frac{2}{\pi} (5p + 3) K p^\alpha + 2 K^2 p^{2\alpha} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Hence

$$N_{2p} < K (2p)^\alpha$$

if

$$1 + 2^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{5p + 3}{\pi K p^\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} < 2^\alpha.$$

This is true if p is sufficiently large, provided that

$$1 + 2^{\frac{1}{2}} < 2^\alpha$$

which is true if $\alpha = \frac{4}{3}$, since $\left(1+2^{\frac{1}{3}}\right)^3 < 2^4$. Repeating the argument we have generally

$$N_{2^k p} < K(2^k p)^{\frac{1}{3}}$$

or since N_p is steadily increasing

$$N_p < 2^{\frac{1}{3}} K p^{\frac{1}{3}} \qquad (p > p_0).$$

To obtain a lower bound for N_p, let $a_0 = 1$, $a_n = 0$ $(n \neq 0)$. Then $b_n = 1/\pi(n+\frac{1}{2})$. Hence

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p = 1$$

and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^p = \frac{2}{\pi^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^p} > \frac{2}{\pi^p} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dt}{t^p} = \frac{2^p}{\pi^p (p-1)}.$$

Hence

$$N_p^p > \frac{2^p}{\pi^p (p-1)}$$

or

$$N_{p/(p-1)}^p > \frac{2^p}{\pi^p (p-1)}.$$

Writing $p = q/(q-1)$ this gives

$$N_q > \frac{2}{\pi}(q-1)^{1-\frac{1}{q}} > \frac{q-1}{\pi} \qquad (q > q_0).$$

(Eingegangen am 8. Juni 1925.)

Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung als Ausgangspunkt für die Umkehrung des Variationsproblems und ihre damit zusammenhängende Bedeutung für die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Franz Paulus in Graz.

D. Hilbert hat in einer Vorlesung über Variationsrechnung im Sommer 1915 gezeigt, wie der aus einem Variationsproblem entspringende Minimalwert eines bestimmten Integrals als Ortsfunktion $J(x, y)$ berechnet werden kann, ohne daß man die Minimalkurven kennt: Es genügt dazu eine Lösung J der Hamiltonschen Differentialgleichung zu finden.

Mit der Aufstellung dieser partiellen Differentialgleichung erster Ordnung hat man aber bekanntlich außerdem noch wesentliche Vorteile sowohl in bezug auf die Lösung des eigentlichen Variationsproblems, d. i. für die Integration der Lagrangeschen[1]) Differentialgleichung, als auch für diejenige der Hamiltonschen selbst gewonnen. Denn man braucht statt des allgemeinen Integrals der letzteren nur eine Lösung $J(x, y, \alpha)$, die einen willkürlichen Parameter α enthält, zu kennen, um unmittelbar das vollständige Integral der Lagrangeschen angeben zu können. Man erhält es in der Form: $\frac{\partial J}{\partial \alpha} =$ konst. Aber mehr noch: man kann umgekehrt bereits aus einem intermediären Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung leicht auch ein partikuläres der Hamiltonschen bestimmen. Wenn hierbei das erstere einen Parameter α enthält, dann wird ihn auch das partikuläre enthalten, und mit diesem läßt sich dann nicht nur wieder das vollständige Integral der Lagrangeschen[2]) (mit zwei

[1]) Richtiger wäre die Bezeichnung „Eulersche" Differentialgleichung, vgl. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, 1908, S. 24, Anm. 3.

[2]) Über eine andere Art, die Lagrangesche mittels einer intermediären vollständig zu integrieren, vgl. S. 361, letzter Abschnitt.

willkürlichen Konstanten), sondern vor allem auch das allgemeine Integral der Hamiltonschen (mit einer willkürlichen Funktion von einer Veränderlichen) ableiten.

Dieser interessante und für die Integration jeder der beiden Differentialgleichungen äußerst wichtige Zusammenhang zwischen der Lagrangeschen und der Hamiltonschen besteht natürlich nicht allgemein zwischen einer beliebigen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer irgendwie zugeordneten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, es ist vielmehr dazu wesentlich, daß sie gerade durch ein Variationsproblem aufeinander bezogen sind. Bezüglich der Lagrangeschen hat nun schon Darboux gezeigt, daß sie trotz ihres besonderen Baues jede beliebige gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung sein kann, und weiteres auch, wie man dazu das Variationsproblem wirklich findet[3]). Wie steht es nun mit der Hamiltonschen? Wenn, wie in der oben erwähnten Vorlesung ohne näheren Beweis behauptet wurde, auch die Hamiltonsche vor der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung nichts weiter voraus hat, als daß die unbekannte Funktion in ihr selbst nicht auftritt, dann müßte sich auch jede solche partielle Differentialgleichung[4]) als Hamiltonsche auffassen lassen, also dazu ein Variationsproblem gehören und daraus weiter eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung als zugehörige Lagrangesche ableitbar sein, auf die man nach dem vorhergehenden die Integration der partiellen zurückführen könnte. In der Tat läßt sich dies, wie im folgenden gezeigt werden soll, immer ausführen, wenn nur die vorgelegte Differentialgleichung nicht linear ist, beide Ableitungen wirklich enthält und von der unbekannten Funktion selbst frei ist. Damit wird dann nicht nur bewiesen sein, daß die Hamiltonsche eine partielle Differentialgleichung allgemeinster Art ist, sondern man wird in dem Verfahren auch eine selbständige Integrationstheorie der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen erblicken können, da man ja hierbei den Standpunkt einnimmt, daß alle gewöhnlichen integrierbar sind.

Um eine Grundlage zu schaffen, auf die wir uns beim Rückweg leicht beziehen können, wird es angezeigt sein, aus der erwähnten Vorlesung

[3]) Darboux, Théorie des surfaces 8, Nr. 604–606. Diese Umformung, d. i. die Ermittlung des Integranden F, erfordert aber die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung. Einen anderen Weg findet man auf S. 360 der vorliegenden Arbeit.

[4]) Daß ohne diese Einschränkung zu jeder partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ein gewisses, allerdings allgemeineres Variationsproblem gehört, dessen Extremalen mit den Charakteristikon der vorgegebenen Gleichung übereinstimmen, hat schon Kneser gezeigt, Jahresbericht d. deutschen Math.-Ver. 24, S. 123. Vgl. auch von demselben Verfasser, Archiv der Math. u. Phys. (3). 24, S. 26.

kurz den Gedankengang zu wiederholen, der von einem vorgegebenen Variationsproblem auf die Betrachtung der Hamiltonschen Differentialgleichung führt. Das Hauptmittel dabei ist der Hilbertsche Unabhängigkeitssatz.

Es soll also von der Aufgabe ausgegangen werden, y so als Funktion von x zu bestimmen, daß das Integral

$$(1) \qquad \int_{a,A}^{x,y} F(y', y, x) \cdot dx = \text{Min.}$$

ein Minimum wird. Als seine obere Grenze nehmen wir bereits den veränderlichen Punkt x, y, da wir ja diesen Minimalwert als Ortsfunktion $J(x, y)$ ohne den Umweg über die Extremalen ermitteln wollen. Es sei nun p eine noch unbekannte Funktion von x und y; wir ersetzen dann die Veränderliche y' in $F(y', y, x)$ durch p und betrachten das Integral:

$$(2) \qquad \int_{a,A}^{x,y} [F(p, y, x) + (y' - p) \cdot F_p(p, y, x)] \cdot dx,$$

wobei wir p als Funktion von x und y so zu wählen suchen, daß das Integral überhaupt vom Wege unabhängig wird, also für alle Kurven $y = y(x)$ denselben Wert annimmt. Dadurch wird es ja zu einer bloßen Funktion des Ortes: $C(x, y)$. Da der Integrand bereits eine lineare Funktion von y' ist von der Form: $F - p \cdot F_p + y' \cdot F_p$, so ist nach der Lagrangeschen Gleichung, die abweichend vom gewöhnlichen Fall jetzt identisch, d. i. für alle Funktionen y von x erfüllt sein muß, dazu nur notwendig:

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial x} \cdot F_p = \frac{\partial}{\partial y}(F - p \cdot F_p),$$

was natürlich als Bedingung für die zu suchende Funktion $p(x, y)$ aufzufassen ist. Die Beziehung (3) ist aber auch hinreichend, denn als Identität gewährleistet sie zugleich das Vorhandensein einer Funktion $C(x, y)$ so beschaffen, daß

$$(4) \qquad F_p = \frac{\partial C}{\partial y}, \qquad F - p F_p = \frac{\partial C}{\partial x},$$

und wenn wir dies in unser Integral (2) einsetzen, so erweist es sich ohne weiteres vom Wege unabhängig; denn es folgt:

$$\int_{a,A}^{x,y} [F + (y' - p) \cdot F_p] dx = \int_{a,A}^{x,y} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \cdot y' \right) dx = \int_{a,A}^{x,y} \frac{dC}{dx} dx = C(x, y) + \text{konst.}$$

Nun lautet die Bedingung (3) ausführlich geschrieben:

$$(5) \qquad F_{pp}(p_x + p_y \cdot p) + p \cdot F_{py} + F_{px} - F_y = 0,$$

wobei die Indizes bei F die partiellen Ableitungen nach diesen Argumenten bedeuten sollen.

Diese partielle Differentialgleichung erster Ordnung für p steht in engster Beziehung zur Lagrangeschen Variationsableitung:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0,$$

oder ebenfalls ausgeführt:

$$F_{y'y'} \cdot y'' + F_{y'y} \cdot y' + F_{y'x} - F_y = 0. \tag{6}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die von den Minimalkurven $y = y(x)$ des Integrals (1) erfüllt werden muß.

Um nicht zu sehr aufgehalten zu werden, soll dieser Zusammenhang hier nur ohne Beweis erwähnt werden:

a) Wenn p ein Integral der partiellen Differentialgleichung (5) ist, dann ist jedes Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung: $y' = p(x, y)$ auch ein solches der Lagrangeschen Differentialgleichung zweiter Ordnung (6) oder es ist, wie man sagt, $y' = p(x, y)$ eine intermediäre Differentialgleichung der Lagrangeschen.

b) Umgekehrt: Wenn $y' = p(x, y)$ ein intermediäres Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung ist, dann genügt die Funktion $p(x, y)$ der zwei unabhängigen Veränderlichen x und y der partiellen Differentialgleichung (5).

Hinsichtlich unseres eigentlichen Zieles, der Bestimmung von $J(x, y)$, steht nun die Sache so: Das Integral (2) $C(x, y) = \int_{a,A}^{x,y} [F + (y' - p) \cdot F_p] \cdot dx$ ist, wenn wir für p ein Integral der partiellen Differentialgleichung (5) einsetzen, vom Wege unabhängig. Wählen wir aber insbesondere für y eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung: $y' = p(x, y)$, so geht, weil nach dem früheren eine solche Lösung auch der Lagrangeschen Differentialgleichung (6) genügt, unser Integral gerade in den Minimalwert $J(x, y)$ des Integrals (1) über. Somit liefert das Integral (2) für alle Funktionen y von x die Minimalfunktion $J(x, y)$, es ist identisch: $C(x, y) = J(x, y)$, und es kann daher auch in den Gleichungen (4) C durch J ersetzt werden:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = F - p F_p, \quad \frac{\partial J}{\partial y} = F_p. \tag{7}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind Funktionen von x, y und p, und wenn wir hieraus die Veränderliche p eliminieren, so gewinnen wir die Hamiltonsche Gleichung:

$$H(J_x, J_y, x, y) = 0 \tag{8}$$

zur Bestimmung der Ortsfunktion J.

Hierzu sei nur noch bemerkt, daß sich die Aufstellung der Hamiltonschen Differentialgleichung in einem besonderen Fall insoweit einfacher gestaltet, als man sich dabei um die partielle Differentialgleichung (5) gar nicht zu kümmern braucht. Man faßt einfach in dem Integranden von (1), d. i. in der gegebenen Funktion $F(y', y, x)$, y' als selbständige Veränderliche p auf, bildet die Gleichungen (7) und eliminiert aus ihnen das p.

Nun will ich zeigen, daß die Hamiltonsche Differentialgleichung bis auf den Umstand, daß darin die unbekannte Funktion J selbst nicht explizit vorkommt, keine besondere partielle Differentialgleichung erster Ordnung darstellt, sondern eine solche allgemeinster Art ist. Dann wird es doch möglich sein zu jeder solchen Differentialgleichung umgekehrt ein Variationsproblem zu konstruieren so beschaffen, daß man auf dem eben angegebenen Weg gerade auf die vorgegebene als Hamiltonsche Gleichung wieder zurückkommt.

Es sei also eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben von der Form (8): $H(J_x, J_y, x, y) = 0$.

Wenn wir annehmen, wir hätten eine Lösung $J(x, y)$ gefunden, so können wir mit den daraus zu bildenden Ableitungen J_x und J_y sofort den Gleichungen (7) entsprechend eine Funktion F bilden, nämlich: $F = J_x + p \cdot J_y$, worin wir zunächst für y' die Bezeichnung p beibehalten wollen. Aber diese Funktion würde uns, wenn die Veränderliche p nur in der angegebenen Form explizit auftritt, kein eigentliches Variationsproblem liefern, sondern es wäre vielmehr das Integral (1), d. i. hier $\int F dx = \int (J_x + p \cdot J_y) dx$ einfach vom Wege unabhängig. Nun wissen wir zwar, daß wir aus einem Integral $J(x, y, \alpha)$ der vorgelegten Differentialgleichung, sobald wir sie nämlich als Hamiltonsche auffassen dürfen, sofort, ohne die Funktion F überhaupt zu kennen, die allgemeine Lösung der Lagrangeschen Differentialgleichung und somit weiter auch, und zwar in ziemlich willkürlicher Weise, ein intermediäres Integral $y' = p(x, y)$ dieser letzteren ableiten können. Vermittels der Gleichung $p = p(x, y)$ oder besser, vermittels der daraus folgenden: $x = x(y, p)$ und $y = y(x, p)$ ließe sich nun in $J_x(x, y)$ und $J_y(x, y)$ x oder y ganz oder teilweise durch p und die andere Koordinate ausdrücken. Aber die auf diese willkürliche Weise erhaltenen Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ werden im allgemeinen weder den Gleichungen (7) genügen, noch wird durch Elimination von p aus diesen Gleichungen die gegebene Gleichung (8) hervorgehen. Es fiele nicht schwer, einer dieser Bedingungen zu genügen, aber wie entspricht man beiden gleichzeitig?

Die Antwort hierauf ergibt sich fast ohne jede Schwierigkeit so: Es sei jetzt wieder p eine selbständige Veränderliche, jedenfalls wollen wir

sie zunächst weder als Funktion von x, y auffassen, noch in irgendwelche Beziehung zur Lagrangeschen Gleichung (6) bringen. Ferner sollen jetzt $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ noch passend zu bestimmende, willkürliche Funktionen von x, y, p bedeuten, die unmittelbar, d. i. solange über p als Funktion von x, y nicht verfügt ist, nicht als partielle Ableitungen einer und derselben Funktion $J(x, y, p)$ vorausgesetzt werden. Sie sind nur eine kurze Bezeichnung für die auf der rechten Seite der Gleichungen (7) zu stehen kommenden Funktionen von x, y, p. Angenommen, diese wären uns bekannt, dann ergibt sich hieraus für den gesuchten Integranden $F(p, y, x)$ sofort die Form:

$$F(p, y, x) = J_x(x, y, p) + p \cdot J_y(x, y, p). \tag{9}$$

Aber dieser Ansatz führt von dem zugehörigen Variationsproblem $\int F(y', y, x) \cdot dx = \text{Min.}$, wo für p wieder y' gesetzt ist, dann und nur dann auf die vorgegebene Gleichung als Hamiltonsche, wenn erstens die rechten Seiten von (7) sich auf $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ reduzieren, und zweitens aus diesen Gleichungen durch Elimination von p die gegebene Gleichung erhalten wird. Bildet man die Ausdrücke: $F_p = \frac{\partial J_x}{\partial p} + J_y + p \frac{\partial J_y}{\partial p}$ und $F - p F_p = J_x + p \cdot J_y - p \left(\frac{\partial J_x}{\partial p} + J_y + p \frac{\partial J_y}{\partial p} \right) = J_x - p \left(\frac{\partial J_x}{\partial p} + p \frac{\partial J_y}{\partial p} \right)$, worin unter J_x und J_y durchweg die Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ zu verstehen sind, so sieht man, daß diese der ersten Forderung dann und nur dann entsprechen, wenn

$$\frac{\partial J_x(x, y, p)}{\partial p} + p \frac{\partial J_y(x, y, p)}{\partial p} = 0. \tag{10}$$

Die zweite Forderung ist gleichbedeutend damit, daß die Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ die gegebene Differentialgleichung identisch in x, y und p erfüllen[5]). Um sie demgemäß zu bestimmen, lösen wir diese einfach nach einer der Ableitungen, z. B. nach J_x auf, schreiben sie also in der Form

$$J_x = f(J_y, x, y). \tag{11}$$

Betrachten wir jetzt J_y als irgendeine Funktion von x, y, p, so wird durch (11) auch J_x als Funktion dieser Argumente definiert, und nun ist natürlich kein Zweifel, daß diese beiden Funktionen J_x und J_y die Glei-

[5]) Ganz allgemein kann man nämlich bemerken, daß die durch Elimination von p aus den Gleichungen $J_x = J_x(x, y, p)$ und $J_y = J_y(x, y, p)$ gewonnene Beziehung zwischen J_x, J_y, x, y von den Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ immer identisch erfüllt werden muß, nicht nur in x und y, sondern auch in p. Umgekehrt stellt eine solche Gleichung zwischen $J_x(x, y, p)$, $J_y(x, y, p)$ und x, y, die in x, y und p identisch erfüllt wird, von vornherein schon das Resultat der Elimination von p aus den Gleichungen $J_x = J_x(x, y, p)$ und $J_y = J_y(x, y, p)$ dar.

chung (8) identisch in x, y und p erfüllen, da ja (11) nur eine andere Form dieser Gleichung ist. Um es noch deutlicher zu sehen, kann man bemerken, daß die Gleichung, die durch Einsetzen von (11) in (8) entsteht, nämlich:

$$H[f(J_y, x, y), J_y, x, y] = 0, \tag{12}$$

eine Identität in J_y, x, y ist. Sie muß also, wenn für J_y eine Funktion von x, y, p eingesetzt wird, auch eine solche in x, y und p sein. Andererseits verwandelt sich dadurch das erste Argument $f(J_y, x, y)$ gerade in unsere Funktion $J_x(x, y, p)$.

Die Funktion $J_y(x, y, p)$ steht noch zu unserer Verfügung, und wir wollen sie jetzt so wählen, daß auch die Gleichung (10) besteht. Dazu haben wir nur zu beachten, daß $\frac{\partial J_x(x, y, p)}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial J_y} \cdot \frac{\partial J_y(x, y, p)}{\partial p}$ ist, wodurch diese Gleichung die Form erhält:

$$\frac{\partial J_y(x, y, p)}{\partial p} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial J_y} + p\right) = 0. \tag{13}$$

Die Annahme: $\frac{\partial J_y}{\partial p} = 0$ hat zur Folge, daß auch $\frac{\partial J_x}{\partial p} = 0$, es sind dann beide Funktionen von p unabhängig, und wir kommen auf den früheren, bereits als trivial erkannten Fall zurück. Übrigens würde er auf die Voraussetzung hinauslaufen, daß wir ein Integral der gegebenen Differentialgleichung kennen, was wir als überflüssig natürlich nicht annehmen wollen. Schließen wir ihn daher aus, so muß

$$\frac{\partial f}{\partial J_y} = -p, \tag{14}$$

und da die linke Seite eine bekannte Funktion von J_y, x, y ist, so erhält man durch Auflösen dieser Gleichung in der Tat J_y als Funktion von x, y und p.

Dieser Schluß setzt allerdings voraus, daß die Form (11) der gegebenen Differentialgleichung in J_y nicht linear ist. Da sie es in J_x bereits ist, so wäre andernfalls die gegebene Differentialgleichung überhaupt eine lineare. Wenn wir sie daher als nicht linear voraussetzen, so sind wir sicher, daß die Bestimmung der Funktion J_y nach der Gleichung (14) nicht versagen kann. Selbstverständlich müssen schon mit Rücksicht auf die früheren, an die Gleichung (11) geknüpften Schlüsse beide Ableitungen in der gegebenen Differentialgleichung wirklich vorkommen. Auf Differentialgleichungen, die nur eine der Ableitungen enthalten, und auf lineare wäre unser Verfahren also nicht anwendbar. Das kann auch nicht anders sein, weil es überhaupt keine Variationsprobleme gibt, die solche Gleichungen als Hamiltonsche bedingen würden. Ist nämlich der Integrand F von y'

unabhängig, dann kann der Minimalwert des Integrals $\int F dx$ von vornherein nicht mehr als Ortsfunktion von *zwei* unabhängigen Veränderlichen aufgefaßt werden. Denn die Lagrangesche Gleichung geht in eine gewöhnliche zwischen x und y über, so daß es nicht mehr eine zwei-parametrige Schar, sondern überhaupt nur eine ganz bestimmte Minimalkurve gibt. Ist aber der Integrand eine lineare Funktion von y': $F = A(x, y) + y' \cdot B(x, y)$, so muß nach der Lagrangeschen Gleichung: $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$; diese Gleichung ist entweder eine Bestimmungsgleichung für y als Funktion von x, dann schließen wir wie im ersten Fall; oder aber sie ist eine Identität, dann ist das Integral $\int F dx$ selbst vom Wege unabhängig und daher eine Ortsfunktion $J(x, y)$. Die Gleichungen (7), nämlich $J_x = A(x, y)$, $J_y = B(x, y)$, gestatten jetzt zwar die Bestimmung von J durch einfache Quadraturen, können aber nie auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung führen, weil das allgemeine Integral einer solchen eine willkürliche Funktion von einer Veränderlichen enthält, wohingegen das durch Quadraturen bestimmte J davon frei ist.

In diesen beiden ersten Fällen kann also von einer Hamiltonschen Gleichung überhaupt nicht die Rede sein.

Wenn schließlich F in y', d. i. bei anderer Bezeichnung, in p *nicht* linear ist, dann wird p auch in F_p noch vorkommen, also $F_{pp} \gtrless 0$ sein. Die Elimination von p aus den beiden Gleichungen (7) können wir uns so vorgenommen denken, daß wir p aus der zweiten als Funktion von J_y, x, y bestimmen und in die rechte Seite der ersten einsetzen. Die entstehende Gleichung ist bereits die Hamiltonsche, und sie wird gewiß weder linear noch von einer Ableitung frei sein können, wenn die partielle Ableitung der rechts stehenden Funktion von J_y, x, y nach J_y dieses noch enthält. Für diese Ableitung erhalten wir nun:

$$\frac{\partial}{\partial J_y}(F - p F_p) = \frac{\partial}{\partial p}(F - p F_p) \cdot \frac{\partial p}{\partial J_y},$$

oder, da:

$$\frac{\partial}{\partial p}(F - p F_p) = - p \cdot F_{pp}$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial J_y} = \frac{1}{\frac{\partial J_y}{\partial p}} = \frac{1}{F_{pp}};$$

$$\frac{\partial}{\partial J_y}(F - p \cdot F_p) = - p.$$

(Vgl. Gl. (14)!)

Die durch die zweite Gleichung (7) definierte Funktion p von J_y, x, y enthält aber J_y, weil $\frac{\partial p}{\partial J_y} = \frac{1}{F_{pp}} \gtrless 0$.

Zur Gleichung (14) sei noch bemerkt, daß wir natürlich ebensogut die gegebene Gleichung (8) nach J_y auflösen können, etwa in der Form:

$$J_y = g(J_x, x, y). \tag{11a}$$

An Stelle von (14) hätten wir dann zur Bestimmung der Funktion $J_x(x, y, p)$ eine etwas andere Gleichung erhalten, nämlich:

$$\frac{\partial q}{\partial J_x} = -\frac{1}{p}. \tag{14a}$$

Damit können wir nun den Integranden F unseres Variationsintegral endgültig in der früher angegebenen Art zusammenstellen:

$$F(p, y, x) = J_x(x, y, p) + p \cdot J_y(x, y, p). \tag{9}$$

Die Gleichungen (7) nehmen jetzt wegen (10) in der Tat die Form an:

$$J_x = J_x(x, y, p), \quad J_y = J_y(x, y, p), \tag{15}$$

wobei z. B. in der ersten Gleichung das J_x links natürlich ein Name für eine Veränderliche, rechts dagegen ein Funktionszeichen ist. Wir haben nur noch zu zeigen[6]), daß durch Elimination von p aus diesen beiden Gleichungen wirklich die gegebene Differentialgleichung (8) erhalten wird. Wenn wir z. B. aus der zweiten p als Funktion von J_y, x, y berechnen und in die erste einsetzen, so müßte sich also zwischen den Veränderlichen J_x, J_y, x, y genau der Zusammenhang (11) ergeben. Nun wird die Gleichung (11) der Voraussetzung nach auch erfüllt von den Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$, d. h. es ist:

$$J_x(x, y, p) = f[J_y(x, y, p), x, y]. \tag{16}$$

Die durch Auflösen der Gleichung $J_y = J_y(x\,y\,p)$ gewonnene Funktion p J_y, x, y hat aber der Natur der Sache nach die Eigenschaft, daß sie, in die Funktion $J_y(x, y, p)$ eingesetzt, diese identisch in die Veränderliche J_y überführt. Vermöge der Gleichung (16), wo ja p auf der rechten Seite nur in der Funktion J_y auftritt, und der ersten Gleichung (15) besteht somit tatsächlich zwischen den Veränderlichen J_x, J_y, x, y der durch die gegebene Differentialgleichung geforderte Zusammenhang.

Unsere Hauptaufgabe, zu einer beliebigen vorgegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (8) das zugehörige Variationsproblem aufzustellen, ist damit vollständig gelöst: der Übergang erfordert nur die Ausführung von Eliminationen und Differentiationen, und es zeigt sich insbesondere, daß es zu jeder solchen nicht linearen Differential-

[6]) Da wir bereits wissen, daß die Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ die Gleichnng (11) identisch in x, y und p erfüllen, so folgt die Behauptung auch nach Anm. 5, S. 353.

gleichung, in der nur beide Ableitungen wirklich auftreten[7]), immer ein einziges, nicht triviales Variationsproblem gibt. Kurz zusammengefaßt stellt sich das Verfahren in einem besonderen Fall folgendermaßen dar: Man löst zunächst die gegebene Differentialgleichung entsprechend der Gleichung (11) nach einer der Ableitungen, z. B. nach J_x auf, bestimmt sodann nach Gleichung (14) J_y als Funktion von x, y, p und dazu aus Gleichung (11) auch J_x als Funktion derselben Argumente, und hat bereits in der Formel (9) den gesuchten Integranden des zugehörigen Variationsproblems. Offenbar kann man mit dieser Funktion F jetzt auch die Lagrangesche Variationsgleichung aufstellen, und somit kommen alle Integrationsvorteile der eingangs erwähnten Beziehung zwischen der Lagrangeschen und der Hamiltonschen Differentialgleichung auch der willkürlich vorgegebenen zugute. Hinsichtlich der Gültigkeit irgendwelcher Schlüsse besteht absolut kein Unterschied gegenüber dem Falle, daß das Variationsproblem das ursprünglich Gegebene wäre, und man erst hieraus unsere Differentialgleichung als Hamiltonsche abgeleitet hätte.

Auf diese letztere Bemerkung könnten wir uns z. B. berufen bei der Frage, ob dann, wenn zufällig ein partikuläres Integral $J(x, y)$ von (8) bekannt ist, erstens durch jede der Gleichungen: $J_x(x, y) = J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y) = J_y(x, y, p)$ p notwendig als dieselbe Funktion von x und y definiert wird, und zweitens, ob dieses $p(x, y)$ dann wirklich ein intermediäres Integral der Lagrangeschen ist. Denn diese Fragen können natürlich ebensogut aufgeworfen werden, wenn das Variationsproblem den Ausgangspunkt bildet. Die Antwort auf die erste gibt eine ganz ähnliche Überlegung wie die bei Gelegeuheit der Gleichung (16) angestellte, wobei man nur zu beachten hat, daß ja für die partiellen Ableitungen $J_x(x, y)$ und $J_y(x, y)$ eines jeden Integrals $J(x, y)$ der Zusammenhang (11) eine Identität in x und y wird. Faßt man jetzt die Gleichung (16) wieder als Definitionsgleichung für die Funktion $J_x(x, y, p)$ auf und berücksichtigt, daß die durch Auflösen der Gleichung $J_y(x, y) = J_y(x, y, p)$ gefundene Funktion $p(x, y)$, in die rechte Seite dieser Gleichung eingesetzt, sie identisch in die linke verwandelt, so entsteht doch aus der rechten Seite von (16) die rechte der Identität (11), und somit müssen auch die linken Seiten dieser beiden Gleichungen übereinstimmen, d. h. es führt dasselbe $p(x, y)$ auch die Funktion $J_x(x, y, p)$ identisch in $J_x(x, y)$ über.

Bezüglich der zweiten Frage läßt sich behaupten, daß diese Funktion $p(x, y)$ zunächst der partiellen Differentialgleichung (5) genügen muß; denn diese ist ja, als andere Form der Gleichung (3), die notwendige Bedingung für alle Funktionen $p(x, y)$, für die aus den rechten Seiten

[7]) Die erste Voraussetzung enthält eigentlich schon die zweite.

der Gleichungen (7), d. i. aus $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$, Funktionen von x und y hervorgehen, die, wie $J_x(x, y)$ und $J_y(x, y)$, die partiellen Ableitungen einer und derselben Funktion sind. Nach dem früheren ist dann aber $y' = p(x, y)$ eine intermediäre Differentialgleichung der Lagrangeschen.

Schließlich soll noch ein einfaches Beispiel hierzu betrachtet werden, das sämtliche Eliminationen und Integrationen vollständig auszuführen gestattet und vielleicht auch an sich ein gewisses Interesse bietet. Wie es in den Anwendungen meistens der Fall ist, läßt sich auch hier umgekehrt die Hamiltonsche Gleichung viel leichter integrieren als die Lagrangesche.

Es sei gegeben die partielle Differentialgleichung erster Ordnung: $J_x^2 + J_y^2 = x^2 + y^2$. Wir wollen sie zunächst nicht integrieren, sondern vorerst nach dem allgemein angegebenen Verfahren das zugehörige Variationsproblem aufsuchen. Man findet der Reihe nach: $J_x = \sqrt{x^2 + y^2 - J_y^2}$; $\frac{\partial J_x}{\partial J_y} = -\frac{J_y}{\sqrt{x^2+y^2-J_y^2}} = -p$ und hieraus: $J_y = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$. Dazu erhält man noch: $J_x = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$. Somit ist der gesuchte Integrand F: $F(p, y, x) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{1+p^2}$, und das Variationsproblem lautet, es soll das Integral: $\int_{a,A}^{b,B} F(y', y, x)\, dx = \int_{a,A}^{b,B} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{1+y'^2}\, dx = \text{Min.}$ zu einem Minimum gemacht werden.

Geometrisch bedeutet dies die Aufgabe, zwei gegebene Punkte a, A und b, B durch eine Kurve so zu verbinden, daß die Integration über das Produkt: Abstand des jeweiligen Kurvenpunktes vom Koordinatenursprung in das Bogenelement an dieser Stelle (das Linienintegral des Radiusvektors) ein Minimum ergibt.

Als nächsten Schritt bilden wir aus unserem Integranden:

$$F(y', y, x) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{1+y'^2}$$

die Lagrangesche Differentialgleichung: $\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0$, wofür wir nach einiger Rechnung erhalten: $(x^2+y^2)y'' + (xy' - y)(1+y'^2) = 0$.

Eine direkte Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung bietet schon nicht geringe Schwierigkeiten; wir wollen uns daher ein Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung zu verschaffen suchen.

Mit der auf den ersten Blick sich ergebenden Lösung $J = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ läßt sich nicht viel beginnen; um ein Integral zu bekommen, das noch einen Parameter enthält, setzen wir $J_x = \sqrt{x^2 - \alpha}$, $J_y = \sqrt{y^2 + \alpha}$. Dieser Ansatz befriedigt nicht nur die gegebene Differentialgleichung, sondern

auch die Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial J_x}{\partial y} = \frac{\partial J_y}{\partial x}$. In der Tat erhalten wir daraus durch bloße Quadraturen ein Integral:

$$J(x, y, \alpha) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 - \alpha} - \frac{\alpha}{2} l(x + \sqrt{x^2 - \alpha}) + \frac{y}{2} \sqrt{y^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} l(y + \sqrt{y^2 + \alpha}) + C.$$

Wie bereits erwähnt, gewinnt man aus diesem auch das allgemeine Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Konstanten α und β, wenn man $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$ gleich einer Konstanten c setzt. Bei Ausführung der Differentiation reduziert sich die Ableitung auf: $-l(x + \sqrt{x^2 - \alpha}) + l(y + \sqrt{y^2 + \alpha})$, so daß wir, wenn noch $c = \log \beta$ gesetzt wird, erhalten: $y + \sqrt{y^2 + \alpha} = \beta \cdot (x + \sqrt{x^2 - \alpha})$. Mittels Quadrieren kann diese Gleichung noch umgeformt werden in:

$$x^2 + \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \cdot xy - y^2 = \alpha \cdot \left[\frac{\beta^2 + 1}{2\beta}\right]^2.$$

Das allgemeine Integral der Lagrangeschen ist also eine gleichseitige Hyperbel, die allerdings auch zerfallen kann.

Vergleichen wir die Funktionen $J_x = \sqrt{x^2 - \alpha}$, $J_y = \sqrt{y^2 + \alpha}$ mit den früher dafür gefundenen Ausdrücken durch x, y, p, so ergibt sich aus beiden übereinstimmend p mit $p = \sqrt{\frac{y^2 + \alpha}{x^2 - \alpha}}$; die Differentialgleichung $y' = \sqrt{\frac{y^2 + \alpha}{x^2 - \alpha}}$ oder nach Trennung der Veränderlichen: $\frac{dy}{\sqrt{y^2 + \alpha}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \alpha}}$ gibt einerseits integriert offenbar dasselbe Resultat wie früher; andererseits läßt sich aus ihr eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten, indem man sie noch einmal nach x differenziert: $y'' = -\frac{x}{x^2 - \alpha} \cdot y' + \frac{y}{x^2 - \alpha}$, und aus beiden den Parameter α eliminiert. Man bekommt so aber genau die früher angeschriebene Lagrangesche Differentialgleichung zurück. Damit ist nicht nur sehr einfach bestätigt, daß unsere gleichseitige Hyperbel das allgemeine Integral der Lagrangeschen darstellt, sondern zugleich auch die Differentialgleichung $y' = \sqrt{\frac{y^2 + \alpha}{x^2 - \alpha}}$ als intermediäre dieser letzteren nachgewiesen.

Anhang.

Das erhaltene Resultat läßt sich noch auf die sehr übersichtliche und einfache Form bringen: Ist $J_x = H(J_y, x, y)$ die Hamiltonsche Gleichung, so ist der Integrand $F(p, y, x)$ des Minimumintegrals: $F(p, y, x) = H(J_y, x, y) + p \cdot J_y$, worin für J_y jene Funktion von x, y, p einzusetzen ist, für die die Gleichung: $\frac{\partial F}{\partial J_y} = 0$ identisch in x, y, p erfüllt wird.

Außerdem gestattet unser Verfahren noch folgende Anwendung: Nach Fußnote [3]), S. 349 können wir jede beliebig vorgegebene gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung als Lagrangesche eines gewissen Variationsproblems vom Typus $\int F(y', y, x)\,dx = \text{Min.}$ ansehen. Die Bestimmung des Integranden F aus einer linearen partiellen Differentialgleichung ist aber durch eine wesentlich einfachere ersetzbar in dem Falle, wo man die gegebene Differentialgleichung vollständig integrieren kann, und zwar dadurch, daß man nicht mit Darboux von der Differentialgleichung, sondern vielmehr von ihrem allgemeinen Integral ausgeht und daraus zunächst wieder die Hamiltonsche Differentialgleichung ermittelt. Die Aufgabe kann jetzt von vornherein so gestellt werden, es soll eine willkürlich gegebene zweiparametrige Kurvenschar $y = y(x, a, b)$ als Extremalenschar eines noch unbekannten Variationsproblems aufgefaßt werden, und hier hat man es überhaupt nicht mehr nötig, die Differentialgleichung dieser Kurvenschar abzuleiten. Der Übergang zur Hamiltonschen Gleichung ergibt sich sehr einfach aus der schon öfter erwähnten Tatsache, daß $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta$ das allgemeine Integral der Lagrangeschen ist, also dieselbe Kurvenschar darstellen muß wie $y = y(x, a, b)$. Nun bemerkt man gleich, daß man statt a und b zwei willkürliche, nur voneinander unabhängige Funktionen zweier weiteren Konstanten α und β einführen kann: $a = w(\alpha, \beta)$, $b = v(\alpha, \beta)$, und daß je nach Wahl dieser Funktionen auch die Auflösung von $y = y[x, w(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)]$ nach der Konstanten β in der Form: $\beta = \beta(y, x, \alpha)$ verschiedene Funktionen β ergeben wird. Aus der Identität: $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta(y, x, \alpha)$ bestimmt sich nun durch eine einfache Quadratur eine Funktion $J(x, y, \alpha)$, nämlich: $J(x, y, \alpha) = \int \beta(x, y, \alpha) \cdot d\alpha + W(x, y)$, worin $W(x, y)$ eine willkürliche Funktion der beiden Argumente bedeutet. Die Funktion $J(x, y, \alpha)$ muß als Integral der Hamiltonschen Differentialgleichung partielle Ableitungen nach x und y haben, die diese Gleichung identisch in x, y, α erfüllen; folglich wird sie nach Fußnote [5]), S. 353 erhalten, wenn man aus den Gleichungen $J_x = J_x(x, y, \alpha)$ und $J_y = J_y(x, y, \alpha)$ den Parameter α eliminiert. Damit sind wir auf den unserer früheren Betrachtung zugrunde gelegten Ausgangspunkt zurückgekommen. Auch hier sieht man, daß die Hamiltonsche Differentialgleichung für verschiedene Funktionen $W(x, y)$ verschieden ausfallen wird. Es zeigt sich also in Übereinstimmung mit der Methode von Darboux, daß der Übergang von einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung oder von ihrem allgemeinen Integral zum Integranden F des Variationsintegrals nicht mehr eindeutig ist, sondern unendlich viele verschiedene Lösungen zuläßt.

Es liegt noch die Frage nahe, ob nicht auch dann, wenn eine vorgelegte gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung als intermediäre einer Lagrangeschen[8]) aufgefaßt werden soll, eine Vereinfachung in der Bestimmung des Integranden F gegeben ist. Die Antwort hierauf hängt wesentlich davon ab, ob in der gegebenen Differentialgleichung eine Konstante als willkürlicher Parameter anzusehen ist oder nicht. Im letzteren Falle gelingt die Aufstellung des zugehörigen Variationsproblems direkt in willkürlichster Weise durch bloße Differentiationen und Quadraturen, sie bietet aber kein besonderes Interesse, weil damit für die Integration dieser Differentialgleichung nichts gewonnen ist. Im ersteren hingegen ist mit der Bestimmung von F zugleich auch die Integration der gegebenen $y' = p(x, y, a)$ geleistet, denn man weiß, daß der Multiplikator die Form hat: $F_{pp} \cdot p_a$, aber hier stellen sich auch dem gewünschten Ziele scheinbar dieselben Schwierigkeiten entgegen wie bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Graz-Waltendorf, Ende Januar 1923.

---

[8]) Die Lagrangesche Differentialgleichung kann zwar ausnahmsweise in eine gewöhnliche Gleichung zwischen y und x ausarten, aber niemals selbst von der ersten Ordnung sein.

(Eingegangen am 20. November 1924.)

Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen.

Von

Hellmuth Kneser in Greifswald.

Im folgenden gebe ich einen Beweisansatz für Deformationssätze, der vor anderen die Eigenschaft voraus hat, daß die gesuchte Deformation eindeutig und stetig von der gegebenen Abbildung abhängt. Diese Eigenschaft erlaubt es, genauere Aussagen über die Struktur der Gruppe aller Deformationen der betrachteten Fläche zu machen. Zur Vorbereitung stelle ich in § 1 im wesentlichen bekannte Definitionen und Bemerkungen über allgemeine Konvergenzräume zusammen, nicht so sehr weil sich schon bei diesen die hierher gehörigen Begriffe einführen, die Fragen stellen lassen, vielmehr weil sich die Struktur der Deformationsgruppe besonders in der Eigenschaft äußert, ein Konvergenzraum zu sein und die topologischen Eigenschaften dieses Konvergenzraumes ohne weiteres Eigenschaften jener Gruppe sind.

§ 1.

Konvergenzräume und ihre Abbildungen.

Eine Menge $\mathfrak{R}$ von Elementen p, die Punkte genannt werden, heißt ein *Konvergenzraum*, wenn jeder Punktfolge p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ein Punkt $p = \lim_n p_n$ oder kein Punkt zugeordnet ist. Im ersten Falle „konvergiert“ die Folge „gegen p“, im zweiten „divergiert“ sie. Dabei sollen die folgenden Axiome gelten.

1. Ist $p_n = p$ für alle n, so ist $\lim_n p_n = p$.
2. Ist $\lim_\nu n_\nu = \infty$ und $\lim_n p_n = p$, so ist $\lim_\nu p_{n_\nu} = p$.
3. Ist $\lim_n p_{n+1} = p$, so ist $\lim_n p_n = p$. (D. h. Hinzufügen eines Elementes stört die Konvergenz nicht.)

Eine eindeutige Abbildung $p \to p'$ eines Konvergenzraumes auf sich oder einen anderen Konvergenzraum oder eine Teilmenge heißt *stetig*, wenn aus $\lim_n p_n = p$ folgt $\lim_n p_n' = p'$. Sie heißt *topologisch*, wenn sie stetig und eindeutig umkehrbar, und auch die Umkehrabbildung stetig ist. Die topologischen Abbildungen eines Konvergenzraumes auf sich bilden eine Gruppe.

Ein eindeutiges stetiges Bild der Strecke $0 \leqq t \leqq 1$ (die selbst ein Konvergenzraum ist) in einem Konvergenzraum $\mathfrak{R}$ heißt eine *stetige Kurve* in $\mathfrak{R}$, die Bilder von $t = 0$ und $t = 1$ ihre Endpunkte. Man kann sie darstellen durch eine Funktion $p = f(t)$, deren „Wert" ein Punkt in $\mathfrak{R}$ ist, und die stetig ist in dem Sinne, daß aus $\lim t_n = t$ folgt $\lim f(t_n) = f(t)$. Zwei stetige Kurven $p = f(t)$ und $p = g(t)$ sollen als nicht verschieden gelten, wenn mit einer monotonen, stetigen, auf keiner Strecke konstanten Funktion $k(t)$, die die Strecke $(0, 1)$ auf sich abbildet, gilt: $f(t) = g(k(t))$. Genauer ist also unter einer stetigen Kurve die Gesamtheit der Funktionen $g(k(t))$ mit in den angegebenen Grenzen willkürlichem $k(t)$ zu verstehen. Beschränken wir uns auf monoton steigende $k(t)$, so heiße diese Gesamtheit eine gerichtete stetige Kurve. Einer stetigen Kurve entsprechen zwei gerichtete stetige Kurven.

Zwei Punkte p und q von $\mathfrak{R}$ heißen verbindbar, wenn es eine stetige Kurve mit p und q als Endpunkten gibt. Verbindbarkeit ist eine reziproke, symmetrische und transitive Eigenschaft; also sind die Punkte von $\mathfrak{R}$ in Klassen miteinander verbindbarer einzuteilen.

Ein Konvergenzraum, in dem je zwei beliebige Punkte verbindbar sind, heißt *stetig zusammenhängend*. Faßt man eine Klasse miteinander verbindbarer Punkte eines beliebigen Konvergenzraumes $\mathfrak{R}$ für sich als Konvergenzraum auf, so ist dieser stetig zusammenhängend; man kann keine Teilmenge von $\mathfrak{R}$ hinzufügen, ohne daß diese Eigenschaft verloren geht. Wir nennen daher die Klassen größte stetig zusammenhängende Teilräume.

In einem stetig zusammenhängenden Konvergenzraum $\mathfrak{R}$ wählen wir einen Punkt o und betrachten die Gesamtheit der gerichteten stetigen Kurven, deren Endpunkte beide in o zusammenfallen ($f(0) = f(1) = o$), kurz gesagt der Wege von o nach o. Zwei Wege von o nach o, dargestellt durch $p = f(t)$ und $p = g(t)$, heißen ineinander verschiebbar, wenn es eine im Quadrat $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq \tau \leqq 1$ stetige Funktion $p = \varphi(t, \tau)$ gibt mit den Eigenschaften $\varphi(0, \tau) = \varphi(1, \tau) = o$, $\varphi(t, 0) = f(t)$, $\varphi(t, 1) = g(t)$. Die Verschiebbarkeit ist zunächst eine Beziehung zwischen den Darstellungen $p = f(t)$, $p = g(t)$ der beiden Wege. Sie ist aber von der besonderen Darstellung unabhängig. Sie ist nämlich, wie man sofort

sieht, transitiv, und $p = f(t)$ ist in $p = f(k(t))$ verschiebbar durch $\varphi(t, \tau) = f((1-\tau)t + \tau k(t))$. Da die Verschiebbarkeit überdies eine reziproke und symmetrische Beziehung ist — das zeigen die Verschiebungsfunktionen $\varphi(t, \tau) = f(t)$, $\psi(t, \tau) = \varphi(t, 1-\tau)$ —, so sind die Wege von o nach o in Klassen ineinander verschiebbarer eingeteilt[1]).

Die Wegeklassen bilden eine Gruppe $\mathfrak{F}$, die *Fundamentalgruppe* von $\mathfrak{R}$. Ordnet man nämlich den Wegen u und v ($p = f(t)$ bzw. $g(t)$) als ihr „Produkt" den Weg $w = uv$ $\left(p = h(t) = f(2t)\right.$ für $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$, $= g(2t-1)$ für $\left.\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$ zu, so ist die Klasse von w schon durch die Klassen von u und v bestimmt. Einer Verschiebung von u in u' ($\varphi(t, \tau)$) entspricht eine von w in $w' = u'v$ ($\psi(t, \tau) = \varphi(2t, \tau)$ für $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$, $= h(t)$ für $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$); ebenso entspricht einer Verschiebung von v in v'' eine von v in $w'' = uv''$. Man bestätigt leicht das assoziative Gesetz bei dieser Zusammensetzung der Wegeklassen, sowie daß die Klasse des Weges $f(t) = o$ das Einheitselement und die Klasse des Weges $f(t) = g(1-t)$ das reziproke Element der Klasse von $g(t)$ ist.

Die Gruppe $\mathfrak{F}$ ist von der Wahl von o unabhängig, d. h. die mit zwei Punkten o und o' gebildeten Gruppen $\mathfrak{F}_o$ und $\mathfrak{F}_{o'}$ sind isomorph. Da nämlich $\mathfrak{R}$ stetig zusammenhängt — nur an dieser Stelle wird die Voraussetzung benutzt —, lassen sich o und o' durch eine stetige Kurve $p = l(t)$ ($l(0) = o$, $l(1) = o'$) verbinden. Ordnen wir jedem Weg u von o nach o ($p = f(t)$, $f(0) = f(1) = o$) den durch $f'(t) = l(1-3t)$ für $0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$, $= f(3t-1)$ für $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{2}{3}$, $= l(3t-2)$ für $\frac{2}{3} \leqq t \leqq 1$ definierten Weg u' von o' nach o', jeden Weg v von o' nach o' ($p = g(t)$, $g(0) = g(1) = o'$) den durch $'g(t) = l(3t)$ für $0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$, $= g(3t-1)$ für $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{2}{3}$, $= l(3-3t)$ für $\frac{2}{3} \leqq t \leqq 1$ definierten Weg $'v$ zu, so bestätigt man: 1. Eine Verschiebung von u bzw. v gibt eine Verschiebung von u' bzw. $'v$, d. h. der Klasse von u (bzw. v) ist die Klasse von $u'('v)$, jedem Element von $\mathfrak{F}_o(\mathfrak{F}_{o'})$ ein Element von $\mathfrak{F}_{o'}(\mathfrak{F}_o)$ zugeordnet. 2. Der Weg $'(u')$ gehört zu derselben Klasse wie u, d. h. die Abbildung von $\mathfrak{F}_{o'}$ auf $\mathfrak{F}_o$ ist die Umkehrung der von $\mathfrak{F}_o$ auf $\mathfrak{F}_{o'}$; beide sind daher eineindeutig. 3. Der Weg $u'v'$ gehört zu derselben Klasse wie $(uv)'$, d. h. die Abbildung von $\mathfrak{F}_o$ und $\mathfrak{F}_{o'}$ aufeinander ist ein Isomorphismus. Die Fundamentalgruppe ist eine topologische Invariante, d. h. zwei topologisch aufeinander abbildbare stetig zusammenhängende Konvergenzräume haben isomorphe Fundamentalgruppen.

[1]) Man könnte dies auch so aussprechen: Macht man die Gesamtheit der stetigen Funktionen $p = f(t)$ mit $f(0) = f(1) = o$ zu einem Konvergenzraum durch die Festsetzung $\lim f_n = f$, wenn aus $\lim t_n = t$ immer $\lim f_n(t_n) = f(t)$ folgt, so zerlegt man diesen Raum in seine größten zusammenhängenden Teile. Zwei Darstellungen desselben Weges gehören demselben Teil an.

Zwecks späterer Anwendung formulieren wir den folgenden

Hilfssatz. *Ist jeder Punkt p des Konvergenzraumes $\mathfrak{R}$ durch eine eindeutig und stetig von p abhängige stetige Kurve mit einem Punkte eines gewissen Teilraumes $\mathfrak{R}'$ verbunden, d. h. hängt der Punkt $q = f(p, \tau)$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ eindeutig und stetig* (*d. h.* $\lim f(p_n, \tau_n) = f(p, \tau)$, *wenn* $\lim p_n = p$, $\lim \tau_n = \tau$) *von p und τ ab, und ist $f(p, 0) = p$ und $f(p, 1)$ ein Punkt von $\mathfrak{R}'$, so haben*

1. *$\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ gleich viele größte stetig zusammenhängende Teile, und in jedem Teil von $\mathfrak{R}$ liegt genau einer von $\mathfrak{R}'$;*

2. *ist $\mathfrak{R}$, und daher nach* 1. *auch $\mathfrak{R}'$ stetig zusammenhängend, so sind ihre Fundamentalgruppen isomorph.*

Sind nämlich zwei Punkte p_1 und p_2 in $\mathfrak{R}$ durch eine stetige Kurve $p = g(t)$ verbunden, so verbindet die ganz zu $\mathfrak{R}'$ gehörige Kurve $p = f(g(t), 1)$ die „Projektionen“ $f(p_1, 1)$ und $f(p_2, 1)$. Sind aber die Projektionen durch eine Kurve $p = h(t)$ verbunden, so verbindet die Kurve $p = f(p_1, 3t)$ für $0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$, $= h(3t - 1)$ für $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{2}{3}$, $= f(p_2, 3 - 3t)$ für $\frac{2}{3} \leqq t \leqq 1$ die Punkte p_1 und p_2. Jeder größte stetig zusammenhängende Teil von $\mathfrak{R}$ besteht also aus allen den Punkten, deren Projektionen mit der Projektion eines von ihnen demselben größten zusammenhängenden Teil von $\mathfrak{R}'$ angehören. Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ stetig zusammenhängend, so wählen wir den Punkt o für beide Fundamentalgruppen in $\mathfrak{R}'$. Zu jedem Wege $p = g(t)$, $g(0) = g(1) = o$ in $\mathfrak{R}$ gehört ein Weg $p = f(g(t), 1)$ in $\mathfrak{R}'$, seine Projektion; beide sind vermöge $f(g(t), \tau)$ ineinander verschiebbar. Ist der Weg $g(t)$ in $g'(t)$ verschiebbar durch $p = \varphi(t, \sigma)$ $(\varphi(0, \sigma) = \varphi(1, \sigma) = o$, $\varphi(t, 0) = g(t)$, $\varphi(t, 1) = g'(t))$, so wird der Weg $p = f(g(t), 1)$ durch $f(\varphi(t, \sigma), 1)$ in $p = f(g'(t), 1)$ verschoben. Sind umgekehrt die Projektionen zweier Wege ineinander verschiebbar, so sind sie es auch selbst, da jeder in seine Projektion verschiebbar ist. Jeder Wegeklasse in $\mathfrak{R}$ entspricht also genau eine in $\mathfrak{R}'$, und das umgekehrte gilt ebenfalls, da jeder Weg in $\mathfrak{R}'$ schon ein Weg in $\mathfrak{R}$ ist. Die Fundamentalgruppen von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ sind also eindeutig aufeinander abgebildet, und die Abbildung ist offenbar ein Isomorphismus.

Der Hilfssatz dient dazu, die Frage nach der Fundamentalgruppe an sich schwer zu behandelnder Konvergenzräume auf dieselbe Frage bei übersichtlicheren, nämlich solchen von endlich viel Dimensionen zurückzuführen.

Die Gesamtheit der stetigen Abbildungen eines Konvergenzraumes $\mathfrak{R}$ auf Teilmengen eines anderen oder eine beliebige Teilmenge dieser Gesamtheit läßt sich wiederum als Konvergenzraum auffassen durch die

Festsetzung: eine Folge von Abbildungen A_n $(p \to A_n(p))$ konvergiert gegen die Abbildung A $(p \to A(p))$, wenn für jede konvergente Punktfolge p_n (mit $\lim p_n = p$) von $\mathfrak{R}$ gilt $\lim A_n(p_n) = A(p)$. Wir wenden dies auf die Gruppe $\mathfrak{A}$ aller topologischen Abbildungen von $\mathfrak{R}$ auf sich oder gewisse Untergruppen derselben an. Die betreffende Gruppe hat Gruppen- und Stetigkeitseigenschaften. Beide stehen insofern im Einklang, als aus $\lim A_n = A$ und $\lim B_n = B$ immer $\lim A_n B_n = AB$ folgt[2])[3]). Aus $\lim p_n = p$ folgt nämlich $\lim B_n(p_n) = B(p)$ und daher $\lim A_n(B_n(p_n))$ $= A(\lim B_n(p_n)) = A(B(p))$.

Insbesondere sind die Abbildungen $A \to AB$ und $A \to BA$ bei festem B und infolgedessen z. B. die inneren Isomorphismen $A \to B^{-1}AB$ topologische Abbildungen von $\mathfrak{A}$ auf sich.

Uns beschäftigen hier nur die topologischen Eigenschaften von $\mathfrak{A}$[4]), nämlich die Frage nach dem stetigen Zusammenhang und der Fundamentalgruppe der größten stetig zusammenhängenden Teile. Der das Einheitselement (die identische Abbildung) E enthaltende größte zusammenhängende Teil von $\mathfrak{A}$ heißt die Deformationsgruppe $\mathfrak{D}$, seine Elemente Deformationsabbildungen (zum Unterschied von den Deformationen, worunter wir stetige Kurven in $\mathfrak{A}$ mit einem Endpunkt in E, d. h. von einem Parameter stetig abhängende Abbildungsscharen verstehen, die mit der identischen beginnen). $\mathfrak{D}$ ist nämlich eine Gruppe. Sind B und C Elemente von $\mathfrak{D}$, also mit E durch je eine stetige Kurve verbunden, so macht die Abbildung $A \to BA$, wie vorher gesagt eine topologische Abbildung, aus der stetigen Kurve von E nach C eine von B nach BC. BC gehört also auch zu $\mathfrak{D}$. Die topologische Abbildung $A \to H^{-1}AH$ führt E und daher auch den E enthaltenden größten zusammenhängenden Teil $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A}$ in sich über; $\mathfrak{D}$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{A}$.[5])

Ein Deformationssatz ist nun ein Satz, der für die Zugehörigkeit einer Abbildung A zu $\mathfrak{D}$ Kriterien angibt, die nur auf A selbst, nicht auf die Gesamtheit aller Abbildungen Bezug nehmen.

---

[2]) AB bezeichne die Abbildung $p \to A(B(p))$, also diejenige, die man durch die Ausübung erst von B und dann von A erhält.

[3]) $\mathfrak{A}$ ist eine stetige Gruppe im Sinne von O. Schreier (Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg **4** (1925), S. 15—32), bis auf die Forderung, daß aus $\lim A_n = A$ immer $\lim A_n^{-1} = A^{-1}$ folgen soll. Diese Forderung ist nicht bei jedem Konvergenzraum $\mathfrak{R}$ erfüllt, wohl aber, wenn er sich als „metrischer Raum" auffassen läßt, insbesondere bei den Beispielen des § 2.

[4]) Eine rein gruppentheoretische Frage ist z. B. die nach den endlichen Untergruppen.

[5]) Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten (Monatsh. f. Math. u. Phys. **19** (1907), S. 1—118), § 16.

§ 2.

Deformationssätze.

1. $\mathfrak{R}$ sei die n-dimensionale Vollkugel $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1$, $\bar{\mathfrak{R}}$ ihr Rand $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Ein Punkt p von $\mathfrak{R}$ ist bestimmt durch seine Entfernung r vom Mittelpunkt und, wenn $r \neq 0$, den auf demselben Radius gelegenen Punkt $\bar{p}$ von $\bar{\mathfrak{R}}$. Eine topologische Abbildung A von $\mathfrak{R}$ auf sich führt nach dem Satz von der Invarianz des Gebietes $\bar{\mathfrak{R}}$ in sich über, definiert also eine topologische Abbildung $\bar{A}$ von $\bar{\mathfrak{R}}$ auf sich. Jeder solchen Abbildung entspricht eine „radiale" Abbildung A': $(r, \bar{p}) \to (r, \bar{A}(\bar{p}))$ von $\mathfrak{R}$ auf sich. Die Zuordnung der Gruppe $\bar{\mathfrak{A}}$ der topologischen Abbildungen von $\bar{\mathfrak{R}}$ auf sich und der Gruppe $\mathfrak{A}'$ der radialen Abbildungen ist topologisch (und isomorph). Wir reduzieren $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ nach dem Verfahren des § 1. Der Abbildung A wird die folgende stetige Kurve in $\mathfrak{A}$ zugeordnet: $A(t)$ ist identisch mit A' für $r \geqq 1 - t$, für $r \leqq 1 - t$ führe $A(t)$ den Punkt $(r, \bar{p})$ über in $((1-t)r', \bar{p}')$, wenn $(r', \bar{p}')$ der Bildpunkt von $\left(\frac{r}{1-t}, \bar{p}\right)$ bei A ist. Das ist der Beweis von Alexander[6]). Aus ihm ergibt sich nach dem Hilfssatz, daß $\mathfrak{A}$ ebenso viele größte zusammenhängende Teile hat wie $\mathfrak{A}'$ und daher wie $\bar{\mathfrak{A}}$, und daß die Fundamentalgruppen dieser Teile bezüglich isomorph sind. Diese Fragen bezüglich $\mathfrak{A}$ sind also auf die entsprechenden bei $\bar{\mathfrak{A}}$, d. h. den Abbildungen der Kugelfläche von $n-1$ Dimensionen zurückgeführt. Beschränkt man sich auf die Gruppe $\mathfrak{B}$ der Abbildungen, die jeden Punkt von $\bar{\mathfrak{R}}$ in Ruhe lassen, so besteht $\bar{\mathfrak{B}}$ nur aus der Identität; $\mathfrak{B}$ ist daher stetig zusammenhängend, d. h. jede Abbildung aus $\mathfrak{B}$ läßt sich in die identische deformieren, und die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{B}$ besteht nur aus dem Einheitselement, d. h. jede mit der Identität beginnende und endende stetige Folge von Abbildungen aus $\mathfrak{B}$ läßt sich stetig in die Folge überführen, die für jeden Wert ihres Parameters in der Identität besteht.

Trotz ihrer Trivialität seien noch die Deformationssätze der offenen und geschlossenen Kurve abgeleitet. Die Kurve sei dargestellt durch $-\infty < x < +\infty$ bzw. die Werte von x mod 1. Eine topologische Abbildung wird gegeben durch eine monotone stetige auf keiner Strecke konstante Funktion $f(x)$, die im Falle der geschlossenen Kurve noch die Periodizitätseigenschaft $f(x+1) = f(x) \pm 1$ haben muß, worin, wie auch weiterhin, das obere Vorzeichen sich auf den Fall einer wachsenden, das untere sich auf den einer abnehmenden Funktion f bezieht. Setzen wir $f(x, t) = (1-t)f(x) \pm tx + tf(0)$, so haben wir eine stetig von $f(x)$

[6]) On the deformation of a n-cell (Proc. Nat. Ac. of Sc. 9 (1923), S. 406—407).

und von t abhängige Schar von Abbildungen, die die gegebene mit einer Abbildung $x \to \pm x + \alpha$ verbindet. Die Gruppe $\mathfrak{A}'$ dieser Abbildungen zerfällt in zwei stetig zusammenhängende Teile nach dem Vorzeichen $\pm$; jeder Teil ist topologisch vom Typus der Geraden bzw. der geschlossenen Kurve, da im Falle der geschlossenen Kurve $(x \bmod 1)$ verschiedene α mit ganzzahliger Differenz dieselbe Abbildung geben. Die Fundamentalgruppe jedes Teiles von $\mathfrak{A}'$ und daher die der Deformationsgruppe ist also die Identität bzw. die zyklische Gruppe unendlicher Ordnung. Das Kriterium für die Zugehörigkeit einer Abbildung zu $\mathfrak{D}$ ist die Erhaltung des Durchlaufungssinnes.

Das die geschlossene Kurve betreffende Ergebnis überträgt sich vermöge des Alexanderschen Beweises sofort auf die Abbildungen der abgeschlossenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leqq 1$ auf sich.

2. Der Alexandersche Beweis läßt sich nicht bei der offenen Kreisscheibe oder, was gleichbedeutend ist, der ganzen Ebene anwenden, weil bei ihm die gegebene Abbildung des Randes wesentlich benutzt wird. Doch gelingt es, die gesuchte Deformation vom Inneren statt vom Rande ausgehen zu lassen, wenn man sich nicht scheut, konforme Abbildungen heranzuziehen. Das geschieht am besten[7]) mit Hilfe des folgenden Satzes.

Der Bereich zwischen zwei einander nicht treffenden einfach geschlossenen Kurven, von denen eine innerhalb der anderen liegt, läßt sich mit Einschluß des Randes topologisch (und im Inneren konform) auf einen bestimmten Kreisring $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq R$ abbilden, so daß die innere Randkurve in den inneren Randkreis $x^2 + y^2 = 1$ übergeht. Die Abbildung ist eindeutig bestimmt, wenn wir bei einem Randpunkt den Bildpunkt und bei einer Randkurve den Umlaufssinn vorschreiben. Hängen die gegebenen Stücke stetig von einer oder mehreren Veränderlichen ab — das soll bei den Randkurven besagen, daß in ihrer Parameterdarstellung noch die genannten Veränderlichen auftreten und die darstellenden Funktionen stetig sind —, so hängt auch die Abbildung stetig von ihnen ab[8]).

Die konforme Beschaffenheit der Abbildung ist für unseren Zweck gleichgültig. Üben wir auf den Kreisring $(1, R)$ noch die Abbildung $(r, \varphi) \to \left(1 + \frac{r-1}{R-1}, \varphi\right)$ aus, so können wir den Kreisring $(1, R)$ durch $(1, 2)$ ersetzen; die Konformität geht verloren, sonst bleibt alles bestehen.

---

[7]) Die Verwendung der Ringbereiche rührt von Herrn H. Bohr her. Sie vereinfacht die Beweise gegenüber einem ursprünglichen Verfahren mit einfach zusammenhängenden Bereichen und führt auch in anderer Richtung weiter.

[8]) R. Courant, Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung (Nachr. v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1914 S. 101—109).

Weiter seien für die Randlinien die Abbildungen vorgeschrieben, und zwar so, daß die positiven Umläufe beide in die positiven oder beide in die negativen übergehen. Wollen wir dies erreichen, so haben wir noch eine topologische Abbildung des Kreisringes $(1, 2)$ auf sich anzugeben, die auf den Rändern mit je einer gegebenen, den Umlaufssinn beide Male erhaltenden oder beide Male umkehrenden Abbildung übereinstimmt. Sind diese gegeben durch $\varphi \to f_1(\varphi)$ bzw. $\varphi \to f_2(\varphi)$ $(f_\nu(\varphi + 2\pi) = f_\nu(\varphi) \pm 2\pi)$, so leistet die Abbildung

$$(r, \varphi) \to \big(r, (2 - r)\,(f_1(\varphi) + 2n_1\pi) + (r - 1)\,(f_2(\varphi) + 2n_2\pi)\big)$$

das gewünschte. Sie hängt nur noch von der Differenz der willkürlichen ganzen Zahlen n_1 und n_2 ab. Diese Willkür können wir bei den hier zu betrachtenden Abbildungen auf natürliche Weise beseitigen. Ist uns eine stetige Kurve $\mathfrak{C}$ gegeben, die die beiden Ränder des Ringbereiches verbindet, so ist die Änderung des Winkels φ längs des Bildes von $\mathfrak{C}$ durch die Bilder der Endpunkte bis auf Vielfache von 2π bestimmt, also vollkommen bestimmt, wenn wir einen unter diesen Werten auswählen. Hängen die Stücke, mit deren Hilfe wir die Abbildung eindeutig festgelegt haben, d. h. der Ringbereich, die Randabbildungen, die Kurve $\mathfrak{C}$ und der Wert der Winkeländerung längs $\mathfrak{C}$, stetig von einer Veränderlichen t ab, so tut es auch die Abbildung. Den Wert der Winkeländerung brauchen wir dabei nur für einen Wert von t festzusetzen; für die anderen ist er dann schon durch die Stetigkeitsforderung bestimmt.

Bilden wir zwei verschiedene Ringbereiche so auf den Kreisring a^b, so ergibt sich eine topologische Abbildung beider Ringbereiche, die durch die Randabbildung, die Kurve $\mathfrak{C}$ und die Änderung des Polarwinkels in bezug auf einen Punkt des inneren Restgebietes eindeutig und in stetiger Abhängigkeit von den gegebenen Stücken bestimmt ist.

3. Es sei nun in den Bezeichnungen von § 1 $\mathfrak{R}$ die x-y-Ebene, $\mathfrak{A}$ die Gruppe ihrer topologischen Abbildungen auf sich. Jede Abbildung können wir durch eine gleichförmige Translation in eine solche verwandeln, die den Nullpunkt O $(x = y = 0)$ in Ruhe läßt. Die Gruppe dieser Abbildungen heiße $\mathfrak{A}_1$. Nach dem Hilfssatz in § 1 hat $\mathfrak{A}_1$ ebenso viele größte zusammenhängende Teile wie $\mathfrak{A}$, und jeder hat dieselbe Fundamentalgruppe wie der entsprechende.

Ebenso führen wir $\mathfrak{A}_1$ zurück auf die Gruppe $\mathfrak{A}_2$ der kongruenten Abbildungen, die O in Ruhe lassen. Wir haben zu jeder Abbildung A $(p \to A(p))$ eine von A und t $(0 \leqq t \leqq 1)$ eindeutig und stetig abhängende Abbildung $B(p \to B(A, t, p))$ zu suchen, derart, daß $B(A, 0, p) = A(p)$ ist und $p \to B(A, 1, p)$ eine kongruente Abbildung ist. Es sei $0 < t < 1$, $u(t) = t/(1 - t)$. $k_1(t)$ sei der Kreis $x^2 + y^2 = u^2$, $s(t)$ der

Abstand des Nullpunktes O von der ihn umfahrenden Kurve $A(k_1(t))$, $k_2(t)$ der Kreis $x^2+y^2=\frac{1}{4}s(t)^2$, $G_1(t)$ das Äußere von k_1 mit Rand: $x^2+y^2 \geqq u^2$, $G_2(t)$ der Ring zwischen k_1 und k_2: $\frac{1}{4}s^2 \leqq x^2+y^2 \leqq u^2$, $G_3(t)$ die von k_2 begrenzte Scheibe $x^2+y^2 \leqq \frac{1}{4}s^2$. u und s gehen monoton und stetig von 0 bis ∞, wenn t von 0 bis 1 geht. Liegt p in $G_1(t)$, so sei $B(A,t,p)=A(p)$. Wegen der Definition von s sind $G_3(t)$ und $B(A,t,G_1(t))$ punktfremd und durch einen Ringbereich getrennt. Liegt p in $G_3(t)$, so sei B diejenige kongruente Abbildung der Scheibe G_3 auf sich, die dem Randkreis k_2 den mit dem von $A(k_1)$ übereinstimmenden Umlaufssinn erteilt und den Randpunkt $x=\frac{1}{2}s$, $y=0$ auf den Strahl von O nach dem Bildpunkt $A(p_1)$ des Punktes $p_1(x=1, y=0)$ zu liegen bringt. Nach 2. ist durch die hiermit gegebenen Abbildungen von $k_1(t)$ und $k_2(t)$ eine Abbildung von $G_2(t)$ bis auf die Willkür von n_1 und n_2 bestimmt. Für $t=\frac{1}{2}$, $u=1$ verlangen wir, daß die Winkeländerung längs der Bildkurve der Kurve $\mathfrak{C}$: $\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}) \leqq x \leqq 1$, $y=0$ gleich Null sei. $\mathfrak{C}$ verbindet nämlich die Ränder von $G_2(\frac{1}{2})$ und die Bilder der Endpunkte liegen auf demselben Strahl durch O. Für die übrigen Werte von t ist damit $B(A,t,p)$ durch die Forderung der Stetigkeit bestimmt; für $t=0$ sei $B=A$, für $t=1$ sei G_3 die ganze Ebene, und es gelte das vorherige.

Die Abbildung $p \to B(A,t,p)$ hängt stetig von A, t und p ab, d. h. ist $\lim A_n = A_0$, $\lim t_n = t_0$, $\lim p_n = p_0$, so ist $\lim B(A_n,t_n,p_n) = B(A_0,t_0,p_0)$. Liegt nämlich p_0 weder auf $k_1(t_0)$ noch auf $k_2(t)$, also im Inneren eines der Bereiche $G_\nu(t_0)$, so liegt p_n für genügend große n in $G_\nu(t_n)$, da k_1 und k_2 stetig von t abhängen. Die Abbildung von $G_\nu(t)$ hängt aber stetig von t ab; daraus folgt die Behauptung. Ist ferner $t_0 \neq 0$ und liegt p_0 auf $k_1(t_0)$ oder $k_2(t_0)$, so gehört p_n für genügend große n zu $G_1(t_n)$ oder $G_2(t_n)$ bzw. $G_2(t_n)$ oder $G_3(t_n)$. Zerlegen wir danach die Folge (A_n,t_n,p_n) in zwei Teilfolgen, so gilt für jede Teilfolge dasselbe wie vorher. Ist schließlich $t_0=0$, $p_0=O$, so zerlegen wir die Folge in zwei Teilfolgen, je nachdem ob p_n zu $G_1(t_n)$ gehört oder nicht. Im ersten Fall ist $B(A_n,t_n,p_n)=A_n(p_n)$, und wegen $\lim A_n = A_0$, $\lim p_n = p_0$ konvergiert diese Folge gegen p_0. Im zweiten Fall liegt p_n innerhalb von $k_1(t_n)$, $B(A_n,t_n,p_n)$ innerhalb von $A_n(k_1(t_n))$, und die Folge dieser Bereiche zieht sich wegen $\lim t_n = 0$ auf O zusammen.

Die Abbildungen von $\mathfrak{A}_2$ sind $(r,\varphi) \to (r, \pm\varphi+\alpha)$, wobei α nur mod 2π in Betracht kommt. $\mathfrak{A}_2$ ist also vom Typus zweier getrennter Kreislinien. Daraus folgt:

Jede topologische Abbildung der Ebene auf sich läßt sich deformieren in die identische oder die Spiegelung $(r,\varphi) \to (r,-\varphi)$. Die Fundamentalgruppe des Raumes $\mathfrak{D}$ der Deformationsabbildungen ist die unendliche zyklische.

4. Es sei $\mathfrak{R}$ die Kugelfläche, $\mathfrak{A}$ die Gruppe ihrer topologischen, $\mathfrak{A}_1$ die ihrer konformen, $\mathfrak{A}_2$ die ihrer kongruenten Abbildungen auf sich. Wir führen im Sinne des Hilfssatzes $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{A}_2$ zurück. Zum ersten Zweck wählen wir drei auf einem größten Kreise in Abständen von 120^0 gelegene Punkte a, b, c aus. Die Abbildung A aus $\mathfrak{A}$ führt sie in $A(a)$, $A(b)$, $A(c)$ über. Wir suchen eine von A und t stetig abhängende Abbildung $B(A, t)$, so daß $B(A, 0) = 1$ und $B(A, 1)$ eine konforme Abbildung ist, die a, b, c ebenso wie A selbst in $A(a), A(b), A(c)$ überführt. Vermöge derjenigen stereographischen Projektion, die $A(a)$ und $A(b)$ in die Punkte $(0, 0)$ und $(0, 1)$ einer Ebene und $A(c)$ ins Unendliche wirft, sehen wir, daß es auf dasselbe hinauskommt, eine Abbildung der Ebene auf sich mit den Fixpunkten $(0, 0)$ und $(0, 1)$ auf eindeutig und stetig von der Abbildung abhängendem Wege in eine der beiden kongruenten Abbildungen mit diesen beiden Fixpunkten überzuführen. Gerade das leistet aber die Konstruktion in Nr. 3. Hat dort nämlich A außer O noch den Fixpunkt $(0, 1)$, so hat auch die Abbildung $B(A, t)$ diesen Fixpunkt, wenn nur t genügend nahe an 1 liegt, so daß $s(t) \geqq 2$ ist. Hiermit ist $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_1$ zurückgeführt. Die konformen Abbildungen der Kugel auf sich sind die linear gebrochenen Substitutionen der in üblicher Weise auf der Kugel ausgebreiteten komplexen Veränderlichen z, verbunden mit dem Übergang zum konjugierten Wert:

$$z \to \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad z \to \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Der Raum $\mathfrak{A}_1$ zerfällt also in zwei Teile, von denen jeder durch die sämtlichen Verhältniswertsysteme $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ dargestellt werden kann, d. h. durch den komplexen projektiven Raum, aus dem die Punkte einer nichtsingulären Fläche zweiter Ordnung entfernt sind. Man könnte schon den stetigen Zusammenhang und die Fundamentalgruppe dieser (offenen sechsdimensionalen) Mannigfaltigkeit untersuchen; bequemer ist es aber, $\mathfrak{A}_1$ noch auf $\mathfrak{A}_2$ zurückzuführen. Dazu brauchen wir nur die drei Punkte $A(a), A(b), A(c)$ auf einem Wege, der eindeutig und stetig von ihrer Anfangslage abhängt und auf dem sie nicht zusammenfallen, überzuführen in drei Punkte eines größten Kreises mit Abständen von 120^0. Wir drehen z. B. zuerst die Ebene durch $A(a), A(b), A(c)$ um die Tangente ihres Schnittkreises mit der Kugel in $A(a)$ und lassen $A(b)$ und $A(c)$ dabei auf den diese Tangente senkrecht schneidenden Kreisen durch $A(a)$ und $A(b)$ bzw. $A(c)$ wandern. So kommen die drei Punkte auf einen größten Kreis zu liegen. Auf diesem mögen dann $A(b)$ und $A(c)$ gleichförmig nach den beiden um 120^0 von $A(a)$ entfernten Punkten wandern, und zwar $A(b)$ nach β, $A(c)$ nach γ, wenn $A(a), \beta, \gamma$ in dem-

selben Umlaufssinn liegen wie $A(a)$, $A(b)$, $A(c)$. Damit ist $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_2$ zurückgeführt. Die kongruenten Abbildungen der Kugelfläche auf sich mit Erhaltung der Indikatrix lassen sich durch vier nicht sämtlich verschwindende, bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmte Parameter darstellen; sie entsprechen topologisch den Punkten des dreidimensionalen (reellen) projektiven Raumes. Die die Indikatrix umkehrenden Abbildungen erhält man, indem man eine bestimmte von ihnen nach einer beliebigen jener Abbildungen ausübt; die umkehrenden Abbildungen bilden also einen zweiten projektiven Raum. Die Fundamentalgruppe des projektiven Raumes ist die Gruppe von zwei Elementen. Zusammenfassend ergibt sich also:

Die Gesamtheit der topologischen Abbildungen der Kugelfläche auf sich zerfällt in zwei stetig zusammenhängende Teile, nämlich die die Indikatrix erhaltenden und die sie umkehrenden Abbildungen. Jeder dieser Teile hat zur Fundamentalgruppe die Gruppe von zwei Elementen.

(Eingegangen am 16. Juli 1925.)

Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen.

Von

Konrad Knopp und Robert Schmidt in Königsberg.

Ein wichtiger und für viele Gebiete der Analysis grundlegender Satz, zuerst von Jacobi ausgesprochen, lautet:

„*Die stetig differenzierbaren Funktionen*

$$u = u(x, y) \quad \text{und} \quad v = v(x, y)$$

sind dann und nur dann voneinander abhängig, wenn die Funktionaldeterminante

$$J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet.“

Bei der Darstellung dieses Satzes — und seiner Verallgemeinerung auf n Funktionen von n Veränderlichen — wird in allen uns bekannten Lehrbüchern einer scharfen Begriffsbestimmung dessen, was unter Abhängigkeit von Funktionen zu verstehen ist, vorsichtig aus dem Wege gegangen; sie bleibt dem Leser überlassen. Wir können daher zwar nicht behaupten, daß die uns bekannten Beweise jenes Satzes falsch seien; aber wir glauben feststellen zu können, daß das Ausmaß, in dem der genannte Satz bisher tatsächlich bewiesen wurde, durchaus unbefriedigend ist, und daß eine Klärung des wirklichen Sachverhalts in Hinblick auf die Bedeutung des Satzes erforderlich ist.

Es ist nicht schwer einzusehen, daß die Beweise des eingangs genannten Satzes nur das folgende Resultat — bei dessen Formulierung wir die Abhängigkeit zweier Funktionen in einem (abgeschlossenen) Gebiet $\mathfrak{B}$ so verstehen, wie es durch die Definition 1 dieser Arbeit erklärt wird — sicherstellen:

„*Wenn die stetig differenzierbaren Funktionen* $u = u(x, y)$ *und* $v = v(x, y)$ *in dem Gebiet* $\mathfrak{B}$ *abhängig sind, dann verschwindet die*

Funktionaldeterminante von u und v identisch in $\mathfrak{B}$. Wenn die Funktionaldeterminante von u und v in $\mathfrak{B}$ identisch verschwindet, dann gibt es in jeder Umgebung jedes Punktes x_0, y_0 von $\mathfrak{B}$ ein Teilgebiet $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{B}$, in dem die Funktionen u und v abhängig sind[1]).“

Die Frage, ob sich der zweite Teil der Behauptung nicht etwa doch zu einer vollständigen Umkehrung des ersten verschärfen läßt, bleibt offen. Denn die Beweise dieses zweiten Teils gehen darauf aus, eine Funktion $F(u, v)$ mit den verlangten Eigenschaften unmittelbar aus der Funktionaldeterminante herauszuziehen; aber dabei ist man eben gezwungen, sich auf Teilgebiete von $\mathfrak{B}$ zu beschränken. Statt dessen untersuchen wir — unter der Voraussetzung $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv 0$ in $\mathfrak{B}$ — die Struktur der Bildmenge von $\mathfrak{B}$, die durch die Funktionen u und v in der uv-Ebene erhalten wird, und weisen dann, ohne nochmals auf die Funktionaldeterminante zurückzugreifen, die Existenz einer Funktion $F(u, v)$ nach, die die Abhängigkeit von $u(x, y)$ und $v(x\ y)$ zum Ausdruck zu bringen geeignet ist. Auf diese Weise erhalten wir das zu erwartende Ergebnis:

„Die stetig differenzierbaren Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ sind dann und nur dann in $\mathfrak{B}$ abhängig, wenn ihre Funktionaldeterminante in $\mathfrak{B}$ identisch verschwindet.“

Zugleich wird die Gültigkeit der Verallgemeinerung dieses Satzes auf n Funktionen von n Veränderlichen in Evidenz gesetzt.

§ 1.

Abhängigkeit von Funktionen.

Wir bewegen uns vorläufig in der Ebene eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems u, v. Als *Gebiet* bezeichnen wir wie üblich eine Punktmenge, die nur innere Punkte besitzt; nach Hinzunahme der Randpunkte wird es abgeschlossen genannt.

Satz 1. *Wenn $\mathfrak{M}$ eine nirgendsdichte Punktmenge ist, so läßt sich eine Funktion $F(u, v)$ mit folgenden Eigenschaften angeben:*

1. *$F(u, v)$ ist in der ganzen uv-Ebene definiert und dort mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung F_u und F_v versehen;*

2. *in keinem Gebiet verschwindet $F(u, v)$ identisch;*

3. *es ist $F(u, v) \equiv 0$ in den Punkten von $\mathfrak{M}$.*

Um die Existenz einer solchen Funktion nachzuweisen, unterziehen wir die uv-Ebene einer quadratischen Teilung durch die Parallelen zur

[1]) Daß der Punkt x_0, y_0 dem Teilgebiet $\mathfrak{B}_1$ angehört, läßt sich noch nicht behaupten.

u-Achse und zur v-Achse mit ganzzahligen Ordinaten bzw. Abszissen. Die Quadrate dieser Teilung, die wir uns sämtlich abgeschlossen denken, bezeichnen wir kurz als die Quadrate $\mathfrak{Q}_1$. Wir konstruieren nun eine Funktion $f_1(u, v)$ nach folgender Vorschrift: In jedem Quadrat $\mathfrak{Q}_1$, in dem *kein* Punkt von $\mathfrak{M}$ liegt, soll

$$f_1(u, v) = \frac{1}{4} \sin^2 2\pi u \cdot \sin^2 2\pi v$$

sein; in allen übrigen Quadraten $\mathfrak{Q}_1$ dagegen $f_1(u, v) \equiv 0$. Damit ist $f_1(u, v)$ in der ganzen Ebene als eindeutige und stetig differenzierbare Funktion erklärt. Wir unterteilen jetzt die Quadrate $\mathfrak{Q}_1$, indem wir durch die Mitten ihrer Seiten Parallelen zu den Achsen ziehen. Die entstehenden Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}$ bezeichnen wir als die Quadrate $\mathfrak{Q}_2$ und konstruieren eine Funktion $f_2(u, v)$ nach folgender Vorschrift: In jedem Quadrat $\mathfrak{Q}_2$, in dem *kein* Punkt von $\mathfrak{M}$ liegt, und in dem $f_1(u, v) \equiv 0$ ist, soll

$$f_2(u, v) = \frac{1}{4^2} \sin^2 2^2 \pi u \cdot \sin^2 2^2 \pi v$$

sein; in allen übrigen Quadraten $\mathfrak{Q}_2$ dagegen $f_2(u, v) \equiv 0$. Allgemein: Nachdem mit Hilfe der Quadratteilung von der Seitenlänge $\frac{1}{2^{n-2}}$ die Funktion $f_{n-1}(u, v)$ definiert ist, konstruieren wir mit Hilfe der Quadratteilung von der Seitenlänge $\frac{1}{2^{n-1}}$, deren Quadrate wir als die Quadrate $\mathfrak{Q}_n$ bezeichnen, eine Funktion $f_n(u, v)$ nach folgender Vorschrift: In jedem Quadrat $\mathfrak{Q}_n$, in dem *kein* Punkt von $\mathfrak{M}$ liegt, und in dem $f_1(u, v) \equiv 0, \ldots, f_{n-1}(u, v) \equiv 0$ ist, soll

$$f_n(u, v) = \frac{1}{4^n} \sin^2 2^n \pi u \cdot \sin^2 2^n \pi v$$

sein; in allen übrigen Quadraten $\mathfrak{Q}_n$ dagegen $f_n(u, v) \equiv 0$.

Die so gewonnenen Funktionen

$$f_1(u, v), \; f_2(u, v), \; \ldots, \; f_n(u, v), \; \ldots$$

sind in der ganzen Ebene stetig, mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen, und nirgends negativ. Da $\mathfrak{M}$ nirgendsdicht ist, so gibt es in jedem Gebiet Punkte, in denen wenigstens eine der Funktionen $f_n(u, v)$ *positiv* ist. Ferner ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(u, v) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}.$$

Folglich ist die Funktion

$$F(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(u, v)$$

in der ganzen Ebene stetig und verschwindet in keinem Gebiet identisch. Da alle Funktionen $f_n(u, v)$ in den Punkten von $\mathfrak{M}$ verschwinden, so ist $F(u, v) = 0$ in den Punkten von $\mathfrak{M}$. Endlich ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial u} \ll 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial v} \ll 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Die partiellen Ableitungen

$$F_u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial u} \quad \text{und} \quad F_v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial v}$$

sind also vorhanden und stetig. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Man übersieht sofort: Konstruiert man analog die Funktionen

$$f_n(u, v) = \frac{1}{2^{(k+1)n}} \sin^{2k} 2^n \pi u \cdot \sin^{2k} 2^n \pi v \quad \text{bzw.} = 0,$$

so erhält man eine Funktion $F(u, v)$, die mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung versehen ist, und die im übrigen dasselbe leistet. — Schließlich kann man, indem man

$$f_n(u, v) = \frac{1}{n^n} e^{-(\sin 2^n \pi u \cdot \sin 2^n \pi v)^{-2}} \quad \text{bzw.} = 0$$

wählt, sogar eine Funktion $F(u, v)$ erzielen, die mit stetigen partiellen Ableitungen jeder beliebigen Ordnung versehen ist, und die im übrigen den Bedingungen des Satzes 1 genügt.

Wir erklären jetzt die Abhängigkeit zweier Funktionen zunächst für beschränkte abgeschlossene Gebiete.

Definition 1. *Die Funktionen*

$$u = u(x, y) \quad \textit{und} \quad v = v(x, y),$$

die in dem beschränkten abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{B}$ der xy-Ebene definiert sind, heißen in diesem Gebiet abhängig, wenn es eine Funktion $F(u, v)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. *$F(u, v)$ ist in der ganzen uv-Ebene definiert und dort mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung F_u und F_v versehen;*

2. *in keinem Gebiet verschwindet $F(u, v)$ identisch;*

3. *$F(u(x, y), v(x, y)) = \Phi(x, y)$ verschwindet identisch in $\mathfrak{B}$.*

Wir haben nun sofort den

Satz 2. *Die in dem beschränkten abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{B}$ definierten Funktionen*

$$u = u(x, y) \quad \textit{und} \quad v = v(x, y)$$

sind dann und nur dann abhängig in $\mathfrak{B}$, wenn das durch sie vermittelte Bild $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ in der uv-Ebene nirgendsdicht ist.

Wenn nämlich $\mathfrak{B}'$ nirgendsdicht ist, so besagt Satz 1 unmittelbar, daß es eine Funktion $F(u, v)$ mit den durch die Definition 1 geforderten Eigenschaften gibt. Wenn aber $\mathfrak{B}'$ in einem gewissen Gebiet dicht ist, so verschwindet *jede* stetige Funktion $F(u, v)$, die in allen Punkten von $\mathfrak{B}'$ den Wert 0 hat, notwendig identisch in jenem Gebiet; die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ sind dann also *nicht* abhängig in $\mathfrak{B}$.

Überleitend zu der sogleich folgenden Definition 2 bemerken wir: Wenn die Funktionen u und v in dem beschränkten abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{B}$ abhängig sind, so sind sie auch in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{B}$ abhängig. In der Tat leistet ja die Funktion $F(u, v)$, die unter Zugrundelegung von $\mathfrak{B}$ konstruiert wird, auch für jedes abgeschlossene Teilgebiet von $\mathfrak{B}$ das Verlangte.

Definition 2. *Die Funktionen*

$$u = u(x, y) \quad \text{und} \quad v = v(x, y),$$

die in dem (offenen) Gebiet $\mathfrak{G}$ definiert sind, heißen abhängig in $\mathfrak{G}$, wenn sie in jedem beschränkten abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ abhängig sind.

Die Existenz *einer* Funktion $F(u, v)$, die für *alle* beschränkten abgeschlossenen Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ im obigen Sinne geeignet wäre, die also für das ganze Gebiet $\mathfrak{G}$ die funktionale Abhängigkeit von u und v zum Ausdruck bringen würde, läßt sich aber im allgemeinen nicht behaupten.

Einer Verallgemeinerung der bisherigen Definitionen und Sätze steht ersichtlich nichts im Wege.

Satz 1*. *Wenn $\mathfrak{M}$ eine nirgendsdichte Punktmenge im n-dimensionalen Raume ist, so läßt sich eine Funktion $F(u_1, \ldots, u_n)$ mit folgenden Eigenschaften angeben:*

1. *$F(u_1, \ldots, u_n)$ ist im ganzen Raume definiert und dort mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_n}$ versehen;*

2. *in keinem Gebiet verschwindet $F(u_1, \ldots, u_n)$ identisch;*

3. *es ist $F(u_1, \ldots, u_n) = 0$ in den Punkten von $\mathfrak{M}$.*

Definition 1*. *Die Funktionen*

$$u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ u_n = u_n(x_1, \ldots, x_n),$$

die in dem beschränkten abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{B}$ des x-Raumes definiert sind, heißen in diesem Gebiet abhängig, wenn es eine Funktion $F(u_1, \ldots, u_n)$ im u-Raume mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. *$F(u_1, \ldots, u_n)$ ist im ganzen u-Raume definiert und dort mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_n}$ versehen;*

2. *in keinem Gebiet verschwindet* $F(u_1, \ldots, u_n)$ *identisch*;

3. $F(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n)) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *verschwindet identisch in* $\mathfrak{B}$.

Satz 2*. *Die in dem beschränkten abgeschlossenen Gebiet* $\mathfrak{B}$ *definierten Funktionen*

$$u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ u_n = u_n(x_1, \ldots, x_n)$$

sind dann und nur dann abhängig in $\mathfrak{B}$, *wenn das durch sie vermittelte Bild* $\mathfrak{B}'$ *von* $\mathfrak{B}$ *im u-Raume nirgendsdicht ist.*

Definition 2*. *Die Funktionen*

$$u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ u_n = u_n(x_1, \ldots, x_n),$$

die in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ *definiert sind, heißen abhängig in* $\mathfrak{G}$, *wenn sie in jedem beschränkten abgeschlossenen Teilgebiet von* $\mathfrak{G}$ *abhängig sind.*

§ 2.

Differenzierbare Funktionen und Funktionaldeterminanten.

Wir beweisen jetzt den

Satz 3 (Hauptsatz). *Zwei Funktionen*

$$(*) \qquad u = u(x, y) \quad \text{und} \quad v = v(x, y),$$

die in dem (offenen) Gebiet $\mathfrak{G}$ *definiert sind und dort stetige partielle Ableitungen erster Ordnung* u_x, u_y, v_x, v_y *besitzen, sind dann und nur dann in* $\mathfrak{G}$ *abhängig, wenn ihre Funktionaldeterminante*

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

in $\mathfrak{G}$ *identisch verschwindet*:

$$J(x, y) \equiv 0 \quad \text{in } \mathfrak{G}.$$

1. Wenn $J(x, y)$ in $\mathfrak{G}$ nicht identisch verschwindet, so ist $J(x_0, y_0) \neq 0$ für einen Punkt x_0, y_0 in $\mathfrak{G}$. Bekanntlich wird dann unter den Voraussetzungen des Satzes eine gewisse Umgebung von x_0, y_0 durch (*) auf eine volle Umgebung des Bildpunktes $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$ abgebildet. Der Punkt u_0, v_0 ist also innerer Punkt der Bildmenge $\mathfrak{B}'$ eines gewissen beschränkten abgeschlossenen Teilgebiets $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$, nnd nach Satz 2 kann keine Abhängigkeit in $\mathfrak{G}$ bestehen. $J \equiv 0$ in $\mathfrak{G}$ ist also eine *notwendige* Bedingung für die Abhängigkeit von u und v in $\mathfrak{G}$.

2. Es bleibt zu zeigen, daß $J \equiv 0$ in $\mathfrak{G}$ auch *hinreichend* für die Abhängigkeit von u und v in $\mathfrak{G}$ ist. Es sei $\mathfrak{B}$ ein beliebiges abgeschlossenes Teilgebiet von $\mathfrak{G}$; nach Satz 2 genügt es zu zeigen, daß die durch (*) erzeugte Bildmenge $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ in der uv-Ebene nirgendsdicht ist. Diesen

Nachweis erbringen wir dadurch, daß wir etwas weitergehend zeigen: *Wenn die Funktionen u und v den Bedingungen des Satzes 3 genügen, und wenn ihre Funktionaldeterminante in den Punkten einer beschränkten abgeschlossenen Teilmenge $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ identisch verschwindet, dann hat das durch (*) vermittelte Bild $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ in der uv-Ebene (im Jordan-Peanoschen Sinne) den Inhalt 0.*

Wir schließen $\mathfrak{B}$ in ein achsenparalleles Quadrat $\mathfrak{Q}$ mit der Seitenlänge L ein. Das Quadrat $\mathfrak{Q}$ unterziehen wir einer quadratischen Teilung mit der Seitenlänge $l = \frac{L}{2^n}$, und wählen die natürliche Zahl n von vornherein so groß, daß alle Teilquadrate[2]), die mindestens einen Punkt von $\mathfrak{B}$ enthalten — jedes solche Quadrat nennen wir ein Quadrat $\mathfrak{q}$ —, ganz in $\mathfrak{G}$ liegen. Dann gibt es eine Konstante K, so daß

$$(\dagger) \qquad |u_x| < K, \quad |u_y| < K, \quad |v_x| < K, \quad |v_y| < K$$

ist für alle Punkte x, y aller Quadrate $\mathfrak{q}$. Die Abschätzungen (†) bleiben mit derselben Konstante K um so mehr richtig, wenn die Unterteilung von $\mathfrak{Q}$ beliebig verfeinert wird. Wir können nun, nach beliebiger Wahl von $\varepsilon > 0$, n so groß wählen, daß — außer (†) — die Schwankung jeder der vier Ableitungen $u_x, \ldots, v_y$ in jedem Quadrat $\mathfrak{q}$ kleiner als ε ist.

Wir fassen jetzt ein bestimmtes Quadrat $\mathfrak{q}$ ins Auge. In $\mathfrak{q}$ wählen wir ein beliebiges Punkttripel $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3$. Mit x_0, y_0 bezeichnen wir einen zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Punkt von $\mathfrak{q}$, für den also

$$J(x_0, y_0) = 0$$

ist. Der Inhalt $\triangle$ des durch das Punkttripel

$$u_1 = u(x_1, y_1), \quad v_1 = v(x_1, y_1); \quad \ldots; \quad u_3 = u(x_3, y_3), v_3 = v(x_3, y_3)$$

bestimmten Dreiecks — die Numerierung sei so, daß $\triangle \geqq 0$ wird — ist

$$\triangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 & v_1 - v_0 \\ 1 & u_2 - u_0 & v_2 - v_0 \\ 1 & u_3 - u_0 & v_3 - v_0 \end{vmatrix}.$$

Nun ist, wenn ξ, η einen geeigneten, jedenfalls in $\mathfrak{q}$ gelegenen Punkt bedeutet,

$$u_1 - u_0 = (x_1 - x_0)\, u_x(\xi, \eta) + (y_1 - y_0)\, u_y(\xi, \eta).$$

Setzt man

$$u_1 - u_0 = (x_1 - x_0)\{u_x(x_0, y_0) + \varrho\} + (y_1 - y_0)\{u_y(x_0, y_0) + \sigma\},$$

[2]) Jedem Teilquadrat wird wieder sein Rand hinzugerechnet.

so sind die Beträge von ϱ und σ nicht größer als die Schwankung von u_x bzw. u_y in $\mathfrak{q}$, also $|\varrho| < \varepsilon$, $|\sigma| < \varepsilon$. Es ist daher

$$u_1 - u_0 = (x_1 - x_0)\,u_x + (y_1 - y_0)\,u_y + \delta_1,$$

wenn $u_x, \ldots, v_y$ zur Abkürzung die Werte der vier partiellen Ableitungen an der Stelle x_0, y_0 bezeichnen, und δ_1 eine Größe bedeutet, deren Betrag $< 2\varepsilon l$ ist. Da entsprechendes für die übrigen Elemente der obigen Determinante gilt, so können wir schreiben

$$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & (x_1 - x_0)\,u_x + (y_1 - y_0)\,u_y + \delta_1 & (x_1 - x_0)\,v_x + (y_1 - y_0)\,v_y + \delta_1' \\ 1 & (x_2 - x_0)\,u_x + (y_2 - y_0)\,u_y + \delta_2 & (x_2 - x_0)\,v_x + (y_2 - y_0)\,v_y + \delta_2' \\ 1 & (x_3 - x_0)\,u_x + (y_3 - y_0)\,u_y + \delta_3 & (x_3 - x_0)\,v_x + (y_3 - y_0)\,v_y + \delta_3' \end{vmatrix},$$

wobei die Beträge von $\delta_1, \ldots, \delta_3'$ durch

$$(\dagger\dagger) \qquad |\delta_1| < 2\varepsilon l, \ \ldots, \ |\delta_3'| < 2\varepsilon l$$

abgeschätzt werden. Weiter ist, wenn wir in den folgenden Determinanten nur die λ-te Zeile hinschreiben ($\lambda = 1, 2, 3$),

$$\triangle = \frac{1}{2}\,|\,1 \quad (x_\lambda - x_0)\,u_x + (y_\lambda - y_0)\,u_y \quad (x_\lambda - x_0)\,v_x + (y_\lambda - y_0)\,v_y\,|$$

$$+ \frac{1}{2}\,|\,1 \quad (x_\lambda - x_0)\,u_x + (y_\lambda - y_0)\,u_y \quad \delta_\lambda'\,|$$

$$+ \frac{1}{2}\,|\,1 \quad \delta_\lambda \quad (x_\lambda - x_0)\,v_x + (y_\lambda - y_0)\,v_y\,| + \frac{1}{2}\,|\,1 \quad \delta_\lambda \quad \delta_\lambda'\,|$$

$$= \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{2}D_2 + \frac{1}{2}D_3 + \frac{1}{2}D_4.$$

Es folgt

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ 1 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \\ 1 & x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & u_y \\ 0 & v_x & v_y \end{vmatrix} = 0,$$

und wegen (†) und (††)

$$|D_2| < 6 \cdot 2\varepsilon l \cdot 2Kl, \qquad |D_3| < 6 \cdot 2\varepsilon l \cdot 2Kl, \qquad |D_4| < 6 \cdot 2\varepsilon l \cdot 2\varepsilon l;$$

daher, wenn schon $\varepsilon < K$ ist.

$$(**) \qquad \triangle < 36\,\varepsilon K \cdot l^2.$$

Die obere Grenze der Dreiecksinhalte $\triangle$ sei $\overline{\triangle}$. Diese obere Grenze wird, weil $\mathfrak{q}$ abgeschlossen und beschränkt ist und die abbildenden Funktionen u und v stetig sind, für das Bildpunkttripel u_ν, v_ν ($\nu = 1, 2, 3$) eines gewissen Punkttripels x_ν, y_ν ($\nu = 1, 2, 3$) aus $\mathfrak{q}$ wirklich erreicht. Ferner ist nach (**)

$$\overline{\triangle} < 36\,\varepsilon K \cdot l^2.$$

Es ist stets $\overline{\triangle} \geqq 0$. Wir nehmen zunächst $\overline{\triangle} > 0$ an; dann können wir durch jeden Punkt des Tripels u_ν, v_ν die Parallele zur Verbindungslinie der beiden anderen Punkte des Tripels ziehen. Diese drei Parallelen bestimmen ein beschränktes (abgeschlossenes) Dreieck $\overline{\overline{\triangle}}$, und *in diesem Dreieck liegen offenbar sämtliche Bildpunkte des Quadrates* q. Für den Inhalt $\overline{\overline{\triangle}}$ dieses Dreiecks hat man

$$\overline{\overline{\triangle}} = 4\,\overline{\triangle},$$

also

$$(\triangle) \qquad \overline{\overline{\triangle}} < 144\,\varepsilon K \cdot l^2.$$

Wenn zufällig $\overline{\triangle} = 0$ ist, dann ist das Bild von q eine beschränkte lineare Menge, und man kann daher auch in diesem Falle ein Dreieck $\overline{\overline{\triangle}}$ wählen, in dem sämtliche Bildpunkte von q liegen, und für welches $(\triangle)$ erfüllt ist.

Die endlich vielen Quadrate q bedecken die Menge $\mathfrak{B}$, daher bedecken die zugehörigen endlich vielen Dreiecke $\overline{\overline{\triangle}}$ die Bildmenge $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$. Für die Summe der Dreiecksinhalte $\overline{\overline{\triangle}}$ folgt aus $(\triangle)$, weil $\Sigma l^2 \leqq L^2$ ist,

$$\Sigma\,\overline{\overline{\triangle}} < 144\,\varepsilon K L^2,$$

und da K fest, ε beliebig war, so ist in der Tat der Inhalt

$$I(\mathfrak{B}') = 0, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Der Satz 3 und sein Beweis lassen sich ohne weiteres auf n Funktionen von n Veränderlichen übertragen. Wir können auf die Ausführung des Beweises für diesen allgemeinen Fall verzichten.

Satz 3* (Hauptsatz). *Die Funktionen*

$$u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad u_n = u_n(x_1, \ldots, x_n),$$

die in dem (offenen) Gebiet $\mathfrak{G}$ *definiert sind und dort stetige partielle Ableitungen erster Ordnung* $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$ *besitzen, sind dann und nur dann in* $\mathfrak{G}$ *abhängig, wenn ihre Funktionaldeterminante*

$$J(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

in $\mathfrak{G}$ *identisch verschwindet*:

$$J(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \quad \text{in } \mathfrak{G}.$$

(Eingegangen am 31. Juli 1925.)

Zur Korrespondenz zweier Klassen von Limitierungsverfahren[1]).

Von

Egon Ullrich in Graz.

---

1. Einleitung. Ich sage: Zwei Limitierungsverfahren U, V *korrespondieren* für eine Folge (c_n), wenn sie ihr den gleichen verallgemeinerten Grenzwert zuordnen,

$$c_U = c_V.$$

Unter dem *Korrespondenzfeld* $\mathfrak{K}(U, V)$ verstehe ich die Gesamtheit aller Folgen, für die U, V korrespondieren. Sind beide Verfahren regulär, so umfaßt das Korrespondenzfeld mindestens alle konvergenten Folgen oder „das Konvergenzfeld $\mathfrak{J}_c$ der identischen Transformation J“; anderseits höchstens den Durchschnitt $\mathfrak{D}(\mathfrak{U}_c, \mathfrak{V}_c)$ der Konvergenzfelder von U und V. Um widerspruchsfrei arbeiten zu können, *verlangen wir, daß* $\mathfrak{K}(U, V)$ *diese seine obere Grenze wirklich erreicht*[2]) (*Korrespondenzforderung*).

Es ist uns von zwei Klassen von Limitierungsverfahren (vgl. 2, 3) schon lange bekannt, daß je zwei Verfahren derselben Klasse die Korrespondenzforderung befriedigen.

In dieser Arbeit wird die Frage aufgeworfen, wie sich zwei Verfahren aus verschiedenen Klassen zueinander verhalten. Sie wird teilweise gelöst, indem wir zeigen, daß die beiden Klassen genau die C_k-Verfahren $(k \geqq 0)$ gemein haben, wodurch ein Übergang aus der einen in die andre Klasse ermöglicht wird. Wir können so die C_k-Limitierbarkeit einer Folge als eine *hinreichende* Bedingung dafür ansehen, daß je zwei beliebige Verfahren der beiden Klassen, die die Folge *überhaupt* limitieren, für sie auch korrespondieren.

---

[1]) Diese Arbeit bildet einen Teil meiner Dissertation. Sie ist zuerst im Juni 1925 handschriftlich der Philosophischen Fakultät in Graz vorgelegt worden.

[2]) K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 2. Aufl., Berlin 1924, S. 463, III.

2. Die Hausdorffsche Klasse.[3]) Sei m irgendeine Diagonalmatrix

$$m = \left\| \begin{matrix} \mu_0 & 0 & 0 & .. \\ 0 & \mu_1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & \mu_2 & .. \\ : & : & : & : \end{matrix} \right\|.$$

Ferner ϱ die feste Matrix

$$\varrho = \left\| (-1)^s \binom{z}{s} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & .. \\ 1 & -1 & 0 & .. \\ 1 & -2 & 1 & .. \\ : & : & : & : \end{matrix} \right\|,$$

wo z die Zeile, s die Spalte kennzeichne. Man sieht leicht ein, daß diese Matrix gleich ihrer Reziproken ist, also

$$\varrho = \varrho^{-1} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 = 1.$$

Wir bilden die Gesamtheit aller Matrizen, die „durch ϱ" einer Diagonalmatrix m ähnlich sind. Diese haben die Gestalt (l. c. [3]))

$$M = \varrho^{-1} m \varrho = \varrho m \varrho = \left\| \binom{z}{s} \mu_{s, z-s} \right\|.$$

Hier bedeuten, wie üblich, die $\mu_{\tau,\sigma}$ die σ-ten Differenzen der Folge (μ_t) vom festen Element μ_τ ab genommen, also

$$\mu_{\tau,\sigma} = \sum_{\nu=0}^{\sigma} (-1)^\nu \binom{\sigma}{\nu} \mu_{\tau+\nu}.$$

Durch geeignete Monotonievoraussetzungen über die Folge (μ_t) können wir erreichen, daß M ein *reguläres* Limitierungsverfahren wird.

Die Gesamtheit aller regulären Matrizen dieser Art nennen wir die Hausdorffsche Klasse $\mathfrak{H}$ von Limitierungsverfahren.

Nun gilt für Matrizen, die vermöge *derselben* transformierenden Matrix Diagonalmatrizen ähnlich sind, ebenso wie für Diagonalmatrizen selbst, das kommutative Gesetz der Multiplikation. Halten wir diese Tatsache mit der Regularität zusammen, so folgt, daß für je zwei Angehörige von $\mathfrak{H}$ die Korrespondenzforderung voll erfüllt ist[4]).

3. Die Klasse $\mathfrak{L}$. Es sei $(q_0, q_1, \ldots)$, $q_0 > 0$, eine Folge *nichtnegativer* Zahlen, $(Q_0, Q_1, \ldots)$ die Folge der daraus abgeleiteten Teilsummen, $Q_n = q_0 + q_1 + \ldots + q_n$. Wir setzen voraus, es strebe

$$\frac{q_n}{Q_n} \to 0.$$

---

[3]) F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen I. Math. Zeitschr. 9, S. 74 ff.

[4]) Vgl. die letzte Seite der Arbeit von K. Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren I. Math. Zeitschr. 15, S. 253.

Dann ist die Matrix (rechts von der Hauptdiagonale lauter 0)

$$Q = \left\| \frac{q_{z-s}}{Q_z} \right\|$$

ein *reguläres* Limitierungsverfahren[5]). Die Matrix Q bleibt ungeändert, wenn alle q_n mit einem Faktor $\neq 0$ versehen werden. Wir können daher, ohne an Allgemeinheit einzubüßen, $q_0 = 1$ annehmen.

Die Gesamtheit aller Folgen (q_n) liefert eine zweite Klasse regulärer Limitierungsverfahren, die mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnet werde. Für je zwei Individuen dieser Klasse ist die Korrespondenzforderung voll erfüllt, wie loc. cit.[5]) bewiesen.

4. Fragestellung. Beide Klassen enthalten handliche und wichtige Verfahren. Keine von beiden ist Teilmenge der anderen. Denn einerseits enthält $\mathfrak{H}$ die Eulerschen E_p- und die Hölderschen H_p-Verfahren, die aber nicht zu $\mathfrak{Q}$ gehören. Anderseits läßt sich ein Verfahren mühelos angeben, das nur in $\mathfrak{Q}$, nicht in $\mathfrak{H}$, enthalten ist. Ein solches entsteht, wenn wir etwa

$$(q_0, q_1, q_2, \ldots) = (1, 2, 1, 2, \ldots)$$

wählen. Am leichtesten sieht man das auf Grund des Ergebnisses dieser Note ein. Jede der Klassen erfüllt für sich die Korrespondenzforderung. Wie steht es aber, wenn wir irgendein Verfahren H aus $\mathfrak{H}$ mit irgendeinem Q aus $\mathfrak{Q}$ zusammenhalten?

5. Teilweise Lösung. Wir betrachten den Durchschnitt $\mathfrak{D}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Q})$, die Gesamtheit aller Verfahren, die sowohl zu $\mathfrak{H}$ als auch zu $\mathfrak{Q}$ gehören. Gibt es in $\mathfrak{D}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Q})$ überhaupt ein Verfahren D, das imstande ist, eine vorgelegte spezielle Folge (c_n) zu limitieren, so muß — wegen des Erfülltseins der Korrespondenzforderung innerhalb jeder der Klassen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{Q}$ — für alle H und Q, die (c_n) überhaupt limitieren, die Gleichung[6]) bestehen

$$c_H = c_D = c_Q.$$

Auf die Frage nach dem verallgemeinerten Grenzwert der oszillierenden[7]) Folge geben in unserm Falle die Verfahren Q und H dieselbe Antwort: sie korrespondieren.

---

[5]) Beweis z. B. bei Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze I, Berlin 1925, S. 11 und 165. Übrigens auch N. E. Nörlund, wie bei Pólya-Szegö zitiert. Verfahren dieser Art verwendet schon K. Knopp 1911, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32, u. a. m.

[6]) Der V-Limes einer Folge (c_n) ist kurz als c_V bezeichnet.

[7]) Dem Gebrauche der englischen Literatur folgend bezeichne ich als *oszillierend* jene Folgen, die weder konvergieren noch bestimmt divergieren.

Satz 1. *Jede Folge, die der Vereinigung der Konvergenzfelder aller Verfahren aus* $\mathfrak{D}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Q})$ *angehört, wird von zwei beliebigen Verfahren der Klassen* $\mathfrak{H}, \mathfrak{Q}$ *— wenn überhaupt — stets zum gleichen Werte limitiert.*

6. Eine Matrizengleichung. Dieser Satz gewinnt erst dadurch seine Bedeutung, daß der Durchschnitt $\mathfrak{D}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Q})$ leicht angegeben werden kann. Wir haben dazu nur die Matrizengleichung

$$\text{(A)} \qquad \left\| \binom{z}{s} \mu_{s, z-s} \right\| = \left\| \frac{q_{z-s}}{Q_z} \right\|$$

auszuwerten. (Vgl. Nr. 2, 3.) Je zwei entsprechende Elemente müssen einander gleich sein, daher

$$\text{(B)} \qquad \mu_{s, z-s} = \binom{z}{s}^{-1} \frac{q_{z-s}}{Q_z} \qquad \binom{z = 0, 1, 2, \ldots}{s = 0, 1, \ldots, z.}$$

Wie haben wir eine Folge

$$(q_0 = 1, q_1, q_2, \ldots)$$

zu wählen, damit die Elemente von Q genau Binomialvielfache der Differenzen aus (μ_n) werden? Es ist zweckmäßig, zur Lösung des Gleichungssystems (B) nach Schrägreihen der Matrizen (A), das ist $z - s =$ konst., schrittweise vorzugehen.

7. $z - s = 0$. Für die nullten Differenzen — d. i. für die Ausgangsfolgen $(\mu_s = \mu_{s0})$ und $(1, q_1, q_2, \ldots)$ — folgt aus Gleichung (6B) der Zusammenhang

$$\mu_{s,0} = \frac{q_0}{Q_s} = \frac{1}{1 + q_1 + \ldots + q_s}.$$

D. h. wählen wir die eine der beiden Folgen, so können wir die andre berechnen. Hier erhalten wir keine innere Bindung der einzelnen Folge; eine solche ergibt sich sofort in Nr. 8.

8. $z - s = n$. n-te Differenzen. Bekanntlich gilt für Differenzen die Rekursionsformel

$$\text{(C)} \qquad \mu_{s,n} = \mu_{s,n-1} - \mu_{s+1,n-1} \qquad \binom{s \geqq 0}{n - 1 \geqq 0}.$$

Das gibt mit Rücksicht auf (6B)

$$\frac{1}{\binom{s+n}{n}} \cdot \frac{q_n}{Q_{s+n}} = \frac{1}{\binom{s+n-1}{n-1}} \frac{q_{n-1}}{Q_{s+n-1}} - \frac{1}{\binom{s+n}{n-1}} \cdot \frac{q_{n-1}}{Q_{s+n}}.$$

Ersetzen wir darin

$$\binom{s+n}{n} = \frac{(s+n) \ldots (s+1)}{n!}$$

nach seiner Definition (die übrigen Binomialkoeffizienten analog) und stellen den gemeinsamen Hauptnenner her, so ergibt sich

$$\text{(D)} \qquad n q_n = q_{n-1} \left[\frac{(s+n) q_{s+n}}{Q_{s+n-1}} + n - 1 \right].$$

Speziell für $n=1$ folgt daraus — wegen $q_0=1$ —

$$\text{(E)} \qquad q_1=\frac{(s+1)\,q_{s+1}}{Q_s} \quad \text{oder} \quad q_{s+1}=\frac{1}{(s+1)}q_1\cdot Q_s.$$

Dieses Ergebnis können wir zur Vereinfachung von (D) benützen und erhalten

$$\text{(F)} \qquad q_n=\frac{1}{n}q_{n-1}(q_1+n-1).$$

Mit (E) und (F) haben wir zwei Rekursionsformeln gewonnen, die der Folge $(1, q_1, q_2, \ldots)$ eine innere Bindung auferlegen: indem wir q_1 wählen, legen wir schon die ganze Folge fest.

9. Die beiden Formeln (8E) und (8F) erweisen sich leicht als identisch. Denn es ist nach (8E)

$$nq_n=q_1+q_1q_2+q_1q_3+\cdots+q_1q_{n-1};$$

addieren wir beiderseits q_1q_n, so folgt

$$q_n(n+q_1)=q_1(1+\ldots+q_n).$$

Nach (8E) ist die rechte Seite gleich $(n+1)q_{n+1}$, daher folgt

$$q_{n+1}=\frac{1}{n+1}q_n(n+q_1), \quad \text{w. z. b. w.}$$

10. Bereich des Parameters q_1. Die Formeln (8E, F) zeigen, daß wir *nicht mehr* als q_1 willkürlich wählen dürfen, wenn unserer Matrizengleichung Genüge geleistet sein soll. Es soll noch gezeigt werden, *daß q_1 keiner weiteren Einschränkung unterliegt.* Eine solche könnte nur aus den Voraussetzungen folgen, die in Nr. 3 über Q gemacht wurden. Es mußte

$$\frac{q_n}{1+\ldots+q_n}\to 0$$

streben, damit Q regulär sei. Diesen Quotienten können wir explizit darstellen. Die Rekursionsformeln liefern

$$(n+1)\cdot q_{n+1}=q_1(1+\ldots+q_n)=q_n(n+q_1)$$

oder also

$$\frac{q_n}{1+\ldots+q_n}=\frac{q_1}{n+q_1}.$$

Das strebt für jedes beliebige q_1 nach Null, bedeutet daher keine Einschränkung. So bleibt noch die zweite Voraussetzung zu beachten: q_n sollte eine *nicht-negative* Folge bilden. Dazu ist, wie aus (8E) unmittelbar abzulesen, $q_1\geqq 0$ notwendig und hinreichend.

11. Die Verfahren aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Q})$. $q_1=0$ liefert die Identität, $q_1=1$ das C_1-Verfahren. Die Rekursionsformel (8F) zeigt

$$q_{n+1}=\frac{n+q_1}{n+1}\cdot q_n=\frac{(n+q_1)(n+q_1-1)\ldots(q_1+1)\,q_1}{(n+1)\cdot\quad n\quad\cdot\ldots\quad 2\quad\cdot 1}=\binom{n+q_1}{n+1}.$$

Nach der bekannten Summenformel für Binomialkoeffizienten gilt

$$Q_{n+1} = 1 + \ldots + q_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{\nu - 1 + q_1}{\nu} = \binom{n + q_1 + 1}{n+1}.$$

Daher mit Rücksicht auf die Gleichung in Nr. 7

$$\mu_{n+1} = \mu_{n+1,0} = \frac{1}{Q_{n+1}} = \frac{1}{\binom{n + q_1 + 1}{n+1}}.$$

Das sind genau die Elemente der Hausdorffschen Diagonalmatrix für das Cesàrosche Verfahren von der Ordnung q_1 (vgl. l. c.[3]).

12. Ich darf jetzt das Ergebnis zusammenfassen als

Satz 2. *Der Durchschnitt der Hausdorffschen Klasse* $\mathfrak{H}$ *und der Klasse* $\mathfrak{L}$ *von Limitierungsverfahren umfaßt genau die Cesàroschen Verfahren aller nicht-negativen Ordnungen.*

Satz 1 und 2 können wir auch zusammenfassen und sagen:

Satz 3. *Die Cesàro-Limitierbarkeit einer Folge* (c_n) *von irgendeiner nicht-negativen Ordnung ist ein hinreichendes Kriterium dafür, daß zwei beliebige Verfahren aus den Klassen* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{L}$ *für die Folge korrespondieren.*

Graz, am 21. Oktober 1925.

(Eingegangen am 28. Oktober 1925.)

Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II: Zahlentheoretische Anwendungen.

Von

G. Szegö in Berlin.

In der vorliegenden zweiten Mitteilung[1]) sollen die Ergebnisse der ersten auf die Abschätzung der Gitterpunktanzahl innerhalb eines Kreises, bzw. auf verwandte Probleme angewendet werden. Es wird dabei hauptsächlich die in § 3 der ersten Mitteilung abgeleitete Erweiterung einer von Herrn Fejér stammenden asymptotischen Formel der Laguerreschen Polynome benutzt.

Es sei m ganz und $r_2(m) = r(m)$ bezeichne die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung $m = a^2 + b^2$. Die summatorische Funktion der $r(m)$, d. h. $\sum_{0 \leqq m \leqq x} r(m) = A(x)$ (Anzahl der Gitterpunkte im Kreise $u^2 + v^2 \leqq x$) ist bekanntlich asymptotisch gleich πx; in der analytischen Zahlentheorie handelt es sich um die Abschätzung der Differenz

$$A(x) - \pi x = \mathsf{P}(x). \tag{1}$$

In der Richtung der oberen Abschätzung stammt das bis heute bekannte beste Resultat von den Herren J. E. Littlewood und A. Walfisz[2]) und lautet:

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{37}{112}+\varepsilon}\right) \qquad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig}), \tag{2}$$

eine Abschätzung, die von E. Landau[3]) zu

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{37}{112}} \log^{\frac{5}{56}} x\right) \tag{2'}$$

verschärft worden ist.

---

[1]) Vgl. die erste Mitteilung: Entwicklungssätze, Mathematische Zeitschrift 25 (1926), S. 87–115; im folgenden mit E zitiert.

[2]) Proceedings of the Royal Society, A, 106 (1924), S. 478–488.

[3]) A. a. O. [2]): Note on the preceding paper.

Andererseits hat E. Landau [4]) gezeigt, daß

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}\right) \qquad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig}), \tag{3}$$

wo ε eine beliebig kleine, feste positive Zahl bedeutet. Nach G. H. Hardy [5]) gilt darüber hinaus

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}}\right). \tag{3'}$$

Ebenfalls Hardy [6]) hat eine Beweisskizze für den mehr besagenden Satz

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x\right), \tag{4}$$

sogar für

$$P(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x\right) \tag{4'}$$

gegeben [7]).

Bezeichnet also θ die kleinste Zahl, für welche

$$P(x) = O(x^{\theta+\varepsilon}) \qquad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig})$$

gilt, so ist

$$\frac{1}{4} \leqq \theta \leqq \frac{37}{112}.$$

Während die Abschätzung der Größe $P(x)$ auf die größten Schwierigkeiten stößt, können gewisse *Mittelwerte* derselben erheblich leichter abgeschätzt werden. Es ist z. B.

$$\frac{1}{x}\int_0^x |P(t)|\,dt = O\left(x^{\frac{1}{4}}\right) \tag{5}$$

bekannt [8]).

---

[4]) Göttinger Nachrichten 1915, S. 161–171.

[5]) Quarterly Journal **46** (1915), S. 263–283. Hardy beweist sogar

$$P(x) = \Omega_R\left(x^{\frac{1}{4}}\right), \quad P(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{1}{4}}\right). \quad \text{(Vgl. die Fußnote 7).)}$$

[6]) Proceedings of the London Mathematical Society (2) **15** (1916), S. 1–25; vgl. insbesondere S. 23–25.

[7]) Es bedeutet, wie üblich, $f(x) = \Omega(\varphi(x))$ $(\varphi(x) > 0)$ die Negation von $f(x) = o(\varphi(x))$. Ferner bedeutet $f(x) = \Omega_R(\varphi(x))$ bzw. $f(x) = \Omega_L(\varphi(x))$, daß es beliebig große x gibt, für welche $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ oberhalb K bzw. unterhalb $-K$ gelegen ist, wo K eine feste positive Zahl bezeichnet. Die drei Aussagen

$$f(x) = \Omega(\varphi(x)), \quad f(x) = \Omega_R(\varphi(x)), \quad f(x) = \Omega_L(\varphi(x))$$

können also auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)} > 0, \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0, \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0.$$

[8]) G. H. Hardy, Proceedings of the London Mathematical Society (2) **15** (1916), S. 192–213; H. Cramér, Mathematische Zeitschrift **15** (1922), S. 201–210; E. Landau, Göttinger Nachrichten 1924, S. 58–65.

Der Zusammenhang dieser Fragen mit der Theorie der Laguerreschen Polynome besteht nun darin, daß man den Mittelwert

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathsf{P}(t)dt, \tag{6}$$

oder allgemeiner den Ausdruck

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathsf{P}(\xi t)dt \qquad (\xi>0) \tag{6'}$$

durch die Laguerreschen Polynome $L_n^{(1)}(x)$ [9]) in einfacher Weise ausdrücken (§ 1) und für große Werte von n asymptotisch sehr genau abschätzen kann (§ 2). Es ergibt sich z. B. für das erste Integral

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathsf{P}(t)dt = O\left(n^{\frac{1}{4}}\right). \tag{7}$$

Aus der entsprechenden Abschätzung des zweiten Integrals (6') bei passendem, von n abhängigem ξ, läßt sich ein verhältnismäßig einfacher, innerhalb der reellen Analysis verlaufender Beweis für das Hardysche Ω-Theorem (4') herleiten (§ 3), dessen (von Hardy nur angedeuteter) Originalbeweis nicht ganz einfache Hilfsmittel aus der komplexen Funktionentheorie benötigte.

Es sei bemerkt, daß die Ergebnisse von § 2 auch für das O-Problem einen Zugang liefern, wenn auch das Resultat

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{1}{8}}\log^{\frac{1}{6}}x\right),$$

das sich dabei mit den naheliegendsten Hilfsmitteln ergibt, nach unserem heutigen Wissen stark überholt ist. Auf diese Deduktion soll demnach in der vorliegenden Arbeit verzichtet werden.

§ 4 beschäftigt sich mit der Übertragung der Betrachtungen von §§ 1—3 auf das Gitterpunktproblem für Kugeln in drei- bzw. in mehrdimensionalen Räumen.

---

[9]) Ich erinnere an die Definition dieser Polynome. Es ist für beliebiges α

$$\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x)z + L_2^{(\alpha)}(x)z^2 + \ldots + L_n^{(\alpha)}(x)z^n + \ldots.$$

§ 1.

Berechnung des Mittelwertes (6′).

Für $\lambda > 0$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-t} A(\lambda t)\,dt = \sum_{m=0}^{\infty}(r(0)+r(1)+\ldots+r(m))\int_{\frac{m}{\lambda}}^{\frac{m+1}{\lambda}} e^{-t}\,dt$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} r(m)\int_{\frac{m}{\lambda}}^{\infty} e^{-t}\,dt = \sum_{m=0}^{\infty} r(m)\,e^{-\frac{m}{\lambda}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\vartheta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi m^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\vartheta\left(\frac{1}{s}\right), \qquad \Re s > 0,$$

also

$$\sum_{m=0}^{\infty} r(m)\,e^{-\pi m s} = (\vartheta(s))^2 = \frac{1}{s}\left(\vartheta\left(\frac{1}{s}\right)\right)^2 = \frac{1}{s}\sum_{m=0}^{\infty} r(m)\,e^{-\frac{\pi m}{s}}.$$

Wir erhalten somit für $s = \frac{1}{\pi\lambda}$

$$\int_0^\infty e^{-t} A(\lambda t)\,dt = \pi\lambda \sum_{m=0}^{\infty} r(m)\,e^{-\pi^2 m\lambda} = \pi\lambda + \pi\lambda \sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\pi^2 m\lambda}.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^\infty e^{-t}\,\mathsf{P}(\lambda t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} A(\lambda t)\,dt - \int_0^\infty e^{-t}\,\pi\lambda\,dt = \pi\lambda \sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\pi^2 m\lambda}.$$

Es sei nun $\xi > 0$, $z < 1$. Aus der letzten Formel ergibt sich, indem man t durch $t(1-z)$ ersetzt und $\lambda = \frac{\xi}{1-z}$ setzt,

$$\int_0^\infty e^{-t(1-z)}\,\mathsf{P}(\xi t)\,dt = \pi\xi \sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,\frac{e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{1-z}}}{(1-z)^2}$$

und durch Vergleichen der Koeffizienten von z^n

$$(6') \qquad \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^n\,\mathsf{P}(\xi t)\,dt = \pi\xi \sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\pi^2 m\xi}\,L_n^{(1)}(\pi^2 m\xi),$$

wo die $L_n^{(1)}(x)$ die zum Parameter $\alpha = 1$ gehörigen Laguerreschen Polynome sind (vgl. Fußnote [9])[10]). Für $\xi = 1$ gilt z. B.

$$(6) \qquad \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^n\,\mathsf{P}(t)\,dt = \pi \sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\pi^2 m}\,L_n^{(1)}(\pi^2 m).$$

---

[10]) Herr Remak hat dieselbe Formel unabhängig von mir durch Fouriersche Reihen erhalten.

§ 2.

Asymptotischer Ausdruck des Mittelwertes (6′).

1. Hilfssatz I. *Es sei $f(x)$ für $x \geqq 0$ positiv und monoton abnehmend. Es gibt zwei absolute positive Konstanten C_1 und C_2 derart, daß*

$$C_1 \sum_{m=1}^{M} f(m) < \sum_{m=0}^{M} r(m) f(m) < C_2 \sum_{m=0}^{M} f(m) \qquad (M = 1, 2, 3, \ldots).$$

Beweis. Die mittlere Summe kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sum_{m=0}^{M} (A(m) - A(m-1)) f(m) = \sum_{m=0}^{M} A(m)(f(m) - f(m+1)) + A(M) f(M+1),$$

wo $A(-1) = 0$ zu setzen ist. Nun gilt für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$C_1 m < A(m) < C_2 m \qquad (C_1 > 0,\ C_2 > 1),$$

woraus wegen $A(0) = 1$ und $0 < f(0) - f(1) < C_2 f(0)$, ferner wegen

$$\sum_{m=1}^{M} m(f(m) - f(m+1)) + M f(M+1) = \sum_{m=1}^{M} f(m)$$

die Behauptung folgt.

Hilfssatz II. *Es sei $f(x)$ für $x \geqq 0$ positiv und monoton abnehmend; ferner sei die Reihe*

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(m) + \ldots$$

konvergent. Dann konvergiert auch

$$r(0) f(0) + r(1) f(1) + r(2) f(2) + \ldots + r(m) f(m) + \ldots$$

und es gilt $(M \geqq 1)$

$$\Big| \sum_{m=M}^{\infty} r(m) f(m) - \pi \sum_{m=M}^{\infty} f(m) \Big| < \eta(M) \Big(\sum_{m=M}^{\infty} f(m) + 2(M-1) f(M) \Big),$$

wo $\eta(M)$ eine von $f(x)$ unabhängige Nullfolge bedeutet.

Beweis. Aus Hilfssatz I schließen wir, daß $\sum_{m=0}^{\infty} r(m) f(m)$ konvergiert. Es ist

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \sum_{m=M}^{\infty} r(m) f(m) &= \sum_{m=M}^{\infty} (A(m) - A(m-1)) f(m) \\ &= \sum_{m=M}^{\infty} A(m)(f(m) - f(m+1)) - A(M-1) f(M). \end{aligned}$$

(Die rechtsstehende Reihe konvergiert und die Umordnung ist zulässig, weil $\lim_{m \to \infty} A(m) f(m) = 0$ ist mit Rücksicht auf $A(m) = O(m)$ und $\lim_{m \to \infty} m f(m) = 0$.) Anderseits gilt, wie man ähnlich zeigt,

(b) $$\pi \sum_{m=M}^{\infty} f(m) = \sum_{m=M}^{\infty} \pi m (f(m) - f(m+1)) - \pi (M-1) f(M)$$

und $|A(m) - \pi m| < m\,\eta(M)$ für $m \geqq M-1$, wo $\eta(M)$ für $M \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Die Differenz der beiden Ausdrücke (a), (b) ist somit absolut genommen kleiner als

$$\eta(M)\Big(\sum_{m=M}^{\infty} m(f(m) - f(m+1)) + (M-1) f(M)\Big)$$
$$= \eta(M)\Big(\sum_{m=M}^{\infty} f(m) + 2(M-1) f(M)\Big).$$

2. Auf Grund der asymptotischen Formel E (9′) berechnen wir nun den asymptotischen Ausdruck von (6′) für $n \to \infty$, wobei ξ auch mit n variieren darf, jedoch so, daß

(8) $$c n^{-\delta} < \xi < \xi_0 \quad (0 < \delta < 1;\ c > 0,\ \xi_0 > 0 \text{ fest})$$

bleibt.

Für $\pi^2 m \xi \leqq n^{\varepsilon}$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{3};\ \varkappa > \frac{3\varepsilon}{2}\right)$ gilt zunächst

$$e^{-\pi^2 m \xi} L_n^{(1)}(\pi^2 m \xi) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} (\pi^2 m \xi)^{-\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{4}} \cos\left(2\pi\sqrt{n m \xi} - \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$+ (\pi^2 m \xi)^{-\frac{5}{4}} O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right) + (\pi^2 m \xi)^{-\frac{3}{4}} O\left(n^{-\frac{1}{4}+\varkappa}\right),$$

d. h.

$$\pi \xi r(m) e^{-\pi^2 m \xi} L_n^{(1)}(\pi^2 m \xi)$$
$$= \pi^{-1} n^{\frac{1}{4}} \xi^{\frac{1}{4}} r(m) e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} m^{-\frac{5}{4}} \cos\left(2\pi\sqrt{n m \xi} - \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$+ r(m) m^{-\frac{5}{4}} \xi^{-\frac{1}{4}} O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right) + r(m) m^{-\frac{3}{4}} \xi^{\frac{1}{4}} O\left(n^{-\frac{1}{4}+\varkappa}\right).$$

Für $\pi^2 m \xi > n^{\varepsilon}$ gilt ferner nach E (4)

$$\pi \xi r(m) e^{-\pi^2 m \xi} L_n^{(1)}(\pi^2 m \xi) = \xi r(m) e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} O(n^2).$$

Nun ist (vgl. die Hilfssätze I und II) $\sum_{m=1}^{\infty} r(m) m^{-\frac{5}{4}}$ konvergent; ferner hat man für $x \to +\infty$

$$\sum_{1 \leqq m \leqq x} r(m) m^{-\frac{3}{4}} = O\Big(\sum_{1 \leqq m \leqq x} m^{-\frac{3}{4}}\Big) = O\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$$

und

$$\sum_{m > x} r(m) e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} = O\Big(\sum_{m > x} e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}}\Big) + o\left(x e^{-\frac{\pi^2 x \xi}{2}}\right)$$
$$= O\left(\xi^{-1} e^{-\frac{\pi^2 x \xi}{2}}\right) + o\left(x e^{-\frac{\pi^2 x \xi}{2}}\right).$$

(Die letzten O- bzw. o-Glieder sind gleichmäßig in ξ gemeint.) Wir erhalten also, indem wir $x=(\pi^3\xi)^{-1}n^\varepsilon$ setzen,

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathsf{P}(\xi t)\,dt=\pi^{-1}n^{\frac{1}{4}}\xi^{\frac{1}{4}}\sum_{\pi^3 m\xi\leqq n^\varepsilon} r(m)e^{-\frac{\pi^3 m\xi}{2}}m^{-\frac{3}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{nm\xi}-\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$+\xi^{-\frac{1}{4}}O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)+O\left(n^{\frac{\varepsilon}{4}-\frac{1}{4}+\varkappa}\right)+o\left(n^{\varepsilon+2}e^{-\frac{1}{2}n^\varepsilon}\right).$$

Beachtet man schließlich, daß

$$\pi^{-1}n^{\frac{1}{4}}\xi^{\frac{1}{4}}\sum_{\pi^3 m\xi>n^\varepsilon} r(m)e^{-\frac{\pi^3 m\xi}{2}}m^{-\frac{3}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{nm\xi}-\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$=n^{\frac{1}{4}}\xi^{\frac{1}{4}}O\left((\xi^{-1}n^\varepsilon)^{-\frac{3}{4}}\sum_{\pi^3 m\xi>n^\varepsilon} r(m)e^{-\frac{\pi^3 m\xi}{2}}\right)=n^{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\varepsilon}o\left(n^\varepsilon e^{-\frac{1}{2}n^\varepsilon}\right),$$

daß ferner ε und $\varkappa$ beliebig klein wählbar sind, so ergibt sich für $n\to\infty$

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathsf{P}(\xi t)\,dt=\pi^{-1}n^{\frac{1}{4}}\xi^{\frac{1}{4}}\sum_{m=1}^\infty r(m)\,e^{-\frac{\pi^3 m\xi}{2}}m^{-\frac{3}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{nm\xi}-\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$+\xi^{-\frac{1}{4}}O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)+O\left(n^{-\frac{1}{4}+\eta}\right), \tag{9}$$

wobei η eine beliebig kleine, feste positive Zahl bezeichnet. Es sei wiederholt, daß der Parameter ξ auch von n abhängen darf, jedoch so, daß er beschränkt und der Größenordnung nach größer als $n^{-\delta}$ bleibt, wo $0<\delta<1$.

3. Aus (9) folgt für $\xi=1$

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathsf{P}(t)\,dt=\pi^{-1}n^{\frac{1}{4}}\sum_{m=1}^\infty r(m)e^{-\frac{\pi^3 m}{2}}m^{-\frac{3}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{nm}-\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$+O\left(n^{-\frac{1}{4}+\eta}\right), \tag{10}$$

wo η positiv und beliebig klein ist, so daß z. B.

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathsf{P}(t)\,dt=O\left(n^{\frac{1}{4}}\right) \tag{7}$$

gilt[11]).

[11]) Aus (10) folgt durch eine in der Theorie der Dirichletschen Reihen geläufige Schlußweise, daß

$$S=\limsup_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac{1}{4}}}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathsf{P}(t)\,dt>0,$$

$$J=\liminf_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac{1}{4}}}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathsf{P}(t)\,dt<0.$$

(Fortsetzung der Fußnote 11 auf nächster Seite.)

§ 3.

Anwendung auf das Ω-Problem.

1. Wir wollen nun den Hardyschen Satz (4′) beweisen, indem wir zeigen, daß die Ungleichung $-\mathsf{P}(x) > K x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x$ beliebig große Lösungen in x besitzt, sobald die positive Konstante K genügend klein ist. D. h. die Annahme der Ungleichung

$$(*) \qquad -\mathsf{P}(x) < K x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x \quad (K>0 \text{ fest}, x \text{ genügend groß}),$$

führt auf einen Widerspruch, sobald K klein genug ist.

Wir setzen $\xi = \xi(n) = \frac{g}{\log n}$, wobei über die positive Konstante g später verfügt wird. Aus der Annahme (*) folgt dann für genügend große n

$$-\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^n \mathsf{P}(\xi t)\,dt = -\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^n \mathsf{P}\left(\frac{g}{\log n} t\right) dt < O(1) +$$

$$+ K \xi^{\frac{1}{4}} \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{1}{4}} \left(\log t + \log \frac{g}{\log n}\right)^{\frac{1}{4}} dt \sim K n^{\frac{1}{4}} \xi^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} n,$$

d. h. wegen (9)

$$(11) \qquad -\sum_{m=1}^{\infty} r(m) e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} m^{-\frac{3}{4}} \cos\left(2\pi\sqrt{n m \xi} - \frac{3\pi}{4}\right) < \pi(K+\varepsilon_n) \log^{\frac{1}{4}} n,$$

wo $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

2. In der Ungleichung (11) ist n zunächst ganz. Man sieht aber sofort, daß eine ähnliche Ungleichung auch für unbeschränkt variables positives n gültig ist. Zu diesem Zwecke genügt es offenbar zu zeigen,

---

Zu diesem Zwecke genügt es zu beachten, daß, wie man leicht zeigt, die Zahlen $\sqrt{\nu}$, wobei ν die Gesamtheit aller quadratfreien Zahlen durchläuft, $\nu = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, \ldots$, *rational unabhängig* sind. Die durch die Reihe

$$\pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty}{}' r(\nu k^2) e^{-\frac{\pi^2 \nu k^2}{2}} (\nu k^2)^{-\frac{3}{4}} \cos\left(k x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

dargestellte stetige Funktion besitzt ferner wegen des Fehlens des Absolutgliedes ein positives Maximum M_ν und ein negatives Minimum $-m_\nu$. Es ist

$$S = \sum_{(\nu)} M_\nu, \quad J = -\sum_{(\nu)} m_\nu.$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$\limsup_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{4}} \mathsf{P}(x) \geqq S, \quad \liminf_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{4}} \mathsf{P}(x) \leqq J,$$

d. h. (3′), sogar $\mathsf{P}(x) = \Omega_R\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$, $\mathsf{P}(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$. (Vgl. die Fußnote [5].)

daß die Ableitung der linken Seite nach n gleich $o\left(\log^{\frac{1}{4}} n\right)$ ist. Diese Ableitung ist aber gleich

$$\frac{\pi^2}{2}\xi'(n)\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}}\,m^{\frac{1}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{n\,m\,\xi}-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$+2\pi\left(\sqrt{n\xi(n)}\right)'\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}}\,m^{-\frac{1}{4}}\sin\left(2\pi\sqrt{n\,m\,\xi}-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=O\left(\frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{n}\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}}\,m^{\frac{1}{4}}\right)+O\left(\frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}}\,m^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$=O\left(\frac{\xi^{\frac{3}{4}}}{n}\right)+O\left(\frac{\xi^{-\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{2}}}\right)=O\left(\frac{\log^{\frac{1}{4}} n}{\sqrt{n}}\right)=o\left(\log^{\frac{1}{4}} n\right),$$

da doch

$$\lim_{\xi\to 0}\xi\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}}\,(m\xi)^{\frac{1}{4}}=\lim_{\xi\to 0}\xi\sum_{a,\,b=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(a^2+b^2)\xi}{2}}\,[(a^2+b^2)\xi]^{\frac{1}{4}}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(u^2+v^2)}{2}}\,(u^2+v^2)^{\frac{1}{4}}\,du\,dv$$

und ähnlich

$$\lim_{\xi\to 0}\xi\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\,e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}}\,(m\xi)^{-\frac{1}{4}}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(u^2+v^2)}{2}}\,(u^2+v^2)^{-\frac{1}{4}}\,du\,dv.\ ^{12})$$

3. Man kann jetzt den von Dirichlet stammenden Spezialfall des Kroneckerschen Approximationssatzes anwenden[13]). Es sei M positiv ganz. Zu jedem $\lambda>0$, $N>0$ gibt es ein t mit

$$N<t<\left(\frac{1}{\lambda}\right)^M N,$$

derart, daß

$$-\lambda<\left\{t\sqrt{m}\right\}<\lambda \qquad (m=1,2,3,\ldots,M)$$

besteht. Hierbei ist $\{x\}$ die Differenz zwischen x und der nächstgelegenen ganzen Zahl. (Für $x-\frac{1}{2}=$ ganz setze man $\{x\}=0$.) Man wähle z. B. $\lambda=\frac{1}{16}$ und $N>\sqrt{g}\,e$. Da $n\xi=n\xi(n)=g\frac{n}{\log n}$ für $n>e$ monoton wächst, so entspricht, wenn man $t=\sqrt{n\xi(n)}$ setzt, jedem Wert von t, $t>N$, ein eindeutig bestimmter Wert n, $n>e$. Zu jedem M gibt es also ein n, so daß

$$-\cos\left(2\pi\sqrt{n\,m}\,\xi(n)-\frac{3\pi}{4}\right)>\cos\frac{\pi}{8}>\frac{1}{2} \qquad (m=1,2,3,\ldots,M)$$

---

[12]) Vgl. § 4, 3. — [13]) Vgl. a. a. O. [6]).

gilt, d. h.

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} r(m)e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} m^{-\frac{3}{4}} - \sum_{m=M+1}^{\infty} r(m)e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} m^{-\frac{3}{4}} < \pi(K+\varepsilon_n)\log^{\frac{1}{4}} n.$$

Setzt man der Einfachheit halber $N = M$ und wählt man der Reihe nach $M = 1, 2, 3, \ldots$, so hat also die letzte Ungleichung stets eine Lösung $n = n(M)$ in n. Diese n-Werte wachsen wegen $\sqrt{n\xi(n)} > N$ ebenfalls über alle Grenzen. Es gilt ferner

$$M\log 16 + \log M > \frac{1}{2}\log(n\xi(n)) = \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log\xi(n),$$

so daß

$$\liminf_{M\to\infty} M\xi(n) \geqq \frac{g}{2\log 16} = \gamma \tag{12}$$

ist.

Wegen der Hilfssätze in § 2 folgt hieraus mit den dortigen Größen C_1, C_2, $\eta(M)$

$$\frac{C_1}{2}\sum_{m=1}^{M} e^{-\frac{\pi^2 m\xi(n)}{2}} m^{-\frac{3}{4}} - \pi\sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 m\xi(n)}{2}} m^{-\frac{3}{4}}$$

$$-\eta(M+1)\left(\sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 m\xi(n)}{2}} m^{-\frac{3}{4}} + 2M(M+1)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{\pi^2(M+1)\xi(n)}{2}}\right)$$

$$< \pi(K+\varepsilon_n)\log^{\frac{1}{4}} n.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\xi^{\frac{1}{4}}$ und geht zur Grenze $M\to\infty$ (also $n\to\infty$, $\xi\to 0$) über, so wird wegen (12)

$$\liminf_{M\to\infty} \xi^{\frac{1}{4}}\sum_{m=1}^{M} e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} m^{-\frac{3}{4}} \geqq \int_0^{\gamma} e^{-\frac{\pi^2 t}{2}} t^{-\frac{3}{4}}\,dt,$$

$$\limsup_{M\to\infty} \xi^{\frac{1}{4}}\sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} m^{-\frac{3}{4}} \leqq \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 t}{2}} t^{-\frac{3}{4}}\,dt,$$

ferner

$$\lim_{M\to\infty} \eta(M+1)(M\xi)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi^2(M+1)\xi}{2}} = 0.$$

$\left(x^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi^2 x}{2}}\right.$ ist nämlich für $x > 0$ beschränkt.$)$ Es gilt somit

$$\frac{C_1}{2}\int_0^{\gamma} e^{-\frac{\pi^2 t}{2}} t^{-\frac{3}{4}}\,dt - \pi\int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 t}{2}} t^{-\frac{3}{4}}\,dt \leqq \pi K g^{\frac{1}{4}}.$$

Hierbei ist C_1 die in Hilfssatz I auftretende absolute positive Konstante und g eine beliebige positive Zahl; γ ist durch (12) erklärt. Wir wählen g so groß, daß die linke Seite positiv ausfällt. Dann enthält diese Ungleichung für genügend kleine Werte von K einen Widerspruch, womit die Unhaltbarkeit der Annahme (*) für die betreffenden K erwiesen ist.

§ 4.

Verallgemeinerung.

1. Die Ergebnisse der vorigen Paragraphen lassen sich ohne größere Schwierigkeit auf das entsprechende Problem in mehreren Dimensionen übertragen[14]). Es ergibt sich hierbei der folgende

Satz: *Es sei* $k \geqq 3$ *und* $r_k(m)$ *bezeichne die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung*

$$m = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2.$$

Setzt man die summatorische Funktion der $r_k(m)$

$$\sum_{0 \leqq m \leqq x} r_k(m) = A_k(x) = \frac{(\pi x)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} + \mathsf{P}_k(x) \tag{13}$$

(*Anzahl der Gitterpunkte in der k-dimensionalen Kugel* $u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2 \leqq x$), *dann gilt für das Restglied* $\mathsf{P}_k(x)$ *die Mittelwertabschätzung*:

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^n \mathsf{P}_k(t)\,dt = O\left(n^{\frac{k-1}{4}}\right). \tag{14}$$

Es ist ferner

$$\mathsf{P}_k(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{k-1}{4}} \log^{\frac{k-1}{4}} x\right), \tag{15}$$

wenn $k \equiv 2, 3, 4 \pmod 8$ *und*

$$\mathsf{P}_k(x) = \Omega_R\left(x^{\frac{k-1}{4}} \log^{\frac{k-1}{4}} x\right), \tag{16}$$

wenn $k \equiv 6, 7, 8 \pmod 8$ *ist.*

Für $k \geqq 4$ war durch Herrn E. Landau[15]) $\mathsf{P}_k(x) = \Omega_R\left(x^{\frac{k-1}{4}}\right)$, $\mathsf{P}_k(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{k-1}{4}}\right)$ bekannt. Darüber hinaus zeigt Herr Ch. H. Müntz

[14]) Bezüglich der Literatur vgl. A. Walfisz, Mathematische Zeitschrift **19** (1924), S. 300–307; s. ferner E. Landau, ebenda **21** (1924), S. 121–132, **24** (1925), S. 299–310.

[15]) Göttinger Nachrichten 1924, S. 137–150.

in einer neuerdings veröffentlichten Arbeit[16]), daß ebenfalls für $k \geqq 4$ sogar $P_k(x) = \Omega_R\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$, $P_k(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$ gilt. Die Gleichung $P_k(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$ ist schon früher bekannt gewesen[17]). Aus dem obigen Satz dürfte also außer der Mittelwertabschätzung (14) lediglich $P_3(x) = \Omega_L(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} x)$ neu sein. Es empfiehlt sich jedoch, die nachfolgende Rechnung mit allgemeinem k durchzuführen.

2. Der Beweis des obigen Satzes gestaltet sich ganz ähnlich wie der des Spezialfalles $k = 2$; er soll daher im folgenden nur kurz skizziert werden. Es wird dabei lediglich von der elementar beweisbaren Tatsache

$$A_k(x) \sim \frac{(\pi x)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \qquad (x \to \infty) \tag{17}$$

Gebrauch gemacht.

Man erhält zunächst, indem man

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_k(m)\, e^{-\pi m s} = (\vartheta(s))^k$$

und die Transformationsformel beachtet,

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t} t^n P_k(\xi t)\, dt = (\pi\xi)^{\frac{k}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} r_k(m)\, e^{-\pi^2 m \xi} L_n^{\left(\frac{k}{2}\right)}(\pi^2 m \xi) \quad (\xi > 0), \tag{18}$$

wo die $L_n^{\left(\frac{k}{2}\right)}(x)$ wiederum die Laguerreschen Polynome (diesmal mit dem Parameter $\frac{k}{2}$) sind.

Bevor die asymptotische Formel der Laguerreschen Polynome angewendet wird, ist es auch jetzt zweckmäßig, zwei Hilfssätze, die denen von § 2 analog sind, herzuleiten. Sie lauten:

Hilfssatz I'. *Es sei $f(x)$ für $x \geqq 0$ positiv und monoton abnehmend. Es gibt zwei nur von k abhängende positive Konstanten $C_1(k)$ und $C_2(k)$ derart, daß*

$$C_1(k) \sum_{m=1}^{M} m^{\frac{k}{2}-1} f(m) < \sum_{m=0}^{M} r_k(m)\, f(m) < C_2(k)\left(f(0) + \sum_{m=1}^{M} m^{\frac{k}{2}-1} f(m)\right)$$

$$(M = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

[16]) Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 24 (1925), S. 81–93. Die ausführliche Arbeit erscheint in der Mathematischen Zeitschrift.

[17]) S. die dritte, in der Fußnote [14]) angeführte Abhandlung, § 4. Die hierher gehörige Bemerkung stammt von Herrn Jarník.

Hilfssatz II'. *Es sei $f(x)$ für $x \geqq 0$ positiv und monoton abnehmend. Ferner sei die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{k}{2}-1} f(m)$ konvergent. Dann konvergiert auch*

$$r_k(0)f(0) + r_k(1)f(1) + r_k(2)f(2) + \ldots + r_k(m)f(m) + \ldots$$

und es gilt ($M \geqq 1$)

$$\left| \sum_{m=M}^{\infty} r_k(m) f(m) - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{m=M}^{\infty} m^{\frac{k}{2}-1} f(m) \right|$$

$$< \eta_k(M) \left(\frac{k}{2} \sum_{m=M}^{\infty} m^{\frac{k}{2}-1} f(m) + 2(M-1)^{\frac{k}{2}} f(M) \right),$$

wo $\eta_k(M)$ eine von $f(x)$ unabhängige (nur von k abhängige) Nullfolge bedeutet.

Die Beweise sind analog denen von Hilfssatz I und II mit Beachtung von (17) zu führen.

Es sei nun ξ der Bedingung (8) unterworfen. Wir erhalten für $\pi^2 m\xi \leqq n^{\varepsilon}$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{3};\ \varkappa > \frac{3\varepsilon}{2}\right)$

$$(\pi\xi)^{\frac{k}{2}} r_k(m) e^{-\pi^2 m\xi} L_n^{\left(\frac{k}{2}\right)}(\pi^2 m\xi)$$

$$= \pi^{-1} n^{\frac{k-1}{4}} \xi^{\frac{k-1}{4}} r_k(m) e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} m^{-\frac{k+1}{4}} \cos\left(2\pi\sqrt{nm\xi} - \frac{(k+1)\pi}{4}\right)$$

$$+ r_k(m) m^{-\frac{k+3}{4}} \xi^{\frac{k-3}{4}} O\left(n^{\frac{k-3}{4}}\right) + r_k(m) m^{-\frac{k+1}{4}} \xi^{\frac{k-1}{4}} O\left(n^{\frac{k-3}{4}+\varkappa}\right).$$

Für $\pi^2 m\xi > n^{\varepsilon}$ gilt ferner

$$(\pi\xi)^{\frac{k}{2}} r_k(m) e^{-\pi^2 m\xi} L_n^{\left(\frac{k}{2}\right)}(\pi^2 m\xi) = \xi^{\frac{k}{2}} r_k(m) e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} O\left(n^{\frac{k}{2}+1}\right).$$

Nun ist, wenn $x \to +\infty$

$$\sum_{1 \leqq m \leqq x} r_k(m) m^{-\frac{k+3}{4}} = O\left(\sum_{1 \leqq m \leqq x} m^{\frac{k}{2}-1} \cdot m^{-\frac{k+3}{4}} \right) = \begin{cases} O(\log x) & \text{für } k = 3, \\ O\left(x^{\frac{k-3}{4}}\right) & \text{„ } k > 3; \end{cases}$$

ferner

$$\sum_{1 \leqq m \leqq x} r_k(m) m^{-\frac{k+1}{4}} = O\left(\sum_{1 \leqq m \leqq x} m^{\frac{k}{2}-1} \cdot m^{-\frac{k+1}{4}} \right) = O\left(x^{\frac{k-1}{4}}\right)$$

und

$$\sum_{m>x} r_k(m) e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} = O\Big(\sum_{m>x} m^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}}\Big) + o\Big(x^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{\pi^2 x\xi}{2}}\Big)$$

$$= O\Big(x^{\frac{k}{2}-1} \xi^{-1} e^{-\frac{\pi^2 x\xi}{2}}\Big) + o\Big(x^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{\pi^2 x\xi}{2}}\Big).$$

(Die letzten O- bzw. o-Glieder sind gleichmäßig in ξ gemeint.) Setzt man also $x = (\pi^2\xi)^{-1} n^\varepsilon$, so ergibt sich, wie im Falle $k = 2$,

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^n \mathsf{P}_k(\xi t)\, dt$$

$$= \pi^{-1} n^{\frac{k-1}{4}} \xi^{\frac{k-1}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} r_k(m) e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} m^{-\frac{k+1}{4}} \cos\Big(2\pi\sqrt{nm\xi} - \frac{(k+1)\pi}{4}\Big)$$

$$+ O\Big(n^{\frac{k-3}{4}+\eta}\Big),$$

wo η eine beliebig kleine positive Zahl ist[18]). Hieraus folgt (14).

3. Bei dem Beweise von (15), (16) empfiehlt es sich zunächst folgende elementare Betrachtung einzuschalten.

Es sei $F(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ eine in jedem endlichen, den Anfangspunkt nicht enthaltenden Bereiche des k-dimensionalen Raumes eigentlich integrable Funktion, für welche in der Umgebung des Nullpunktes

$$|F(u_1, u_2, \ldots, u_k)| < A(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

und in der Umgebung des unendlich fernen Punktes

$$|F(u_1, u_2, \ldots, u_k)| < B(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2)^{-\frac{\beta}{2}}$$

gilt; $A > 0$, $B > 0$, $0 < \alpha < k$, $\beta > k$. Dann ist

$$\lim_{\delta \to +0} \delta^k \sum{}' F(a_1\delta, a_2\delta, \ldots, a_k\delta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1, u_2, \ldots, u_k)\, du_1\, du_2 \ldots du_k.$$

---

[18]) Es ist nämlich

$$O\Big(x^{\frac{k-3}{4}}\Big)\xi^{\frac{k-1}{4}} O\Big(n^{\frac{k-3}{4}}\Big) = O\Big(n^{\frac{k-3}{4}+\varepsilon\frac{k-3}{4}}\Big)$$

(für $k = 3$ ist diese Gleichung durch $O(\log x) = O(\log n)$ zu ersetzen) und

$$O\Big(x^{\frac{k-1}{4}}\Big)\xi^{\frac{k-1}{4}} O\Big(n^{\frac{k-3}{4}+\varkappa}\Big) = O\Big(n^{\frac{k-3}{4}+\varepsilon\frac{k-3}{4}+\varkappa}\Big).$$

Die Summation auf der linken Seite erstreckt sich über alle Gitterpunkte $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ des k-dimensionalen Raumes, mit Ausnahme des Anfangspunktes. Sowohl die linksstehende Reihe wie auch das rechtsstehende Integral konvergieren absolut.

Die absolute Konvergenz der linken Seite folgt aus der Konvergenz der k-fachen Reihe

$$\sum_{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2 \geqq c^2} (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)^{-\frac{\beta}{2}} = \sum_{m \geqq c^2} r_k(m)\, m^{-\frac{\beta}{2}} \qquad (c>0),$$

die wiederum eine Folge des Hilfssatzes II′ ist.

Die absolute Konvergenz des Integrals folgt sofort aus der bekannten Tatsache, daß

$$\int\cdots\int_{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2 \leqq c^2} (u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2)^{-\frac{\alpha}{2}} du_1\, du_2 \ldots du_k$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^c \varrho^{-\alpha}\cdot\varrho^{k-1} d\varrho \qquad (c>0)$$

konvergiert, wenn $\alpha < k$, und daß

$$\int\cdots\int_{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2 \geqq c^2} (u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2)^{-\frac{\beta}{2}} du_1\, du_2 \ldots du_k$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_c^\infty \varrho^{-\beta}\cdot\varrho^{k-1} d\varrho \qquad (c>0)$$

konvergiert, wenn $\beta > k$ ist.

Um schließlich die obige Grenzwertgleichung zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, daß die beiden notwendig existierenden Grenzwerte

$$\text{(a)} \quad \lim_{\delta \to +0} \delta^k \sum_{(a_1\delta)^2+(a_2\delta)^2+\ldots+(a_k\delta)^2 \leqq \varepsilon^2}{}' [(a_1\delta)^2+(a_2\delta)^2+\ldots+(a_k\delta)^2]^{-\frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{\delta \to +0} \delta^k \sum_{(a_1\delta)^2+(a_2\delta)^2+\ldots+(a_k\delta)^2 \geqq \omega^2} [(a_1\delta)^2+(a_2\delta)^2+\ldots+(a_k\delta)^2]^{-\frac{\beta}{2}}$$

mit $\varepsilon \to 0$ bzw. $\omega \to \infty$ gegen 0 konvergieren. (In der ersten Summe ist, wie oben, das Glied $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ wegzulassen.) Nun ist der erste Ausdruck gleich

$$\delta^{k-\alpha} \sum_{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2 \leqq \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2} (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \delta^{k-\alpha} \sum_{1 \leqq m \leqq \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2} r_k(m)\, m^{-\frac{\alpha}{2}} < C_2(k)\, \delta^{k-\alpha} \sum_{1 \leqq m \leqq \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2} m^{\frac{k}{2}-1} \cdot m^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Die letzte Summe ist von der Größenordnung $\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{k-\alpha}$, d. h. der Grenzwert (a) ist $= O(\varepsilon^{k-\alpha})$. Ähnlich kann (b) behandelt werden, indem Hilfssatz II′ benutzt wird.

4. Aus der Annahme

$$\pm P_k(x) < K x^{\frac{k-1}{4}} \log^{\frac{k-1}{4}} x \qquad (K > 0 \text{ fest}, x \text{ genügend groß}),$$

wobei im Falle (15) das Zeichen $-$, im Falle (16) das Zeichen $+$ gilt, schließen wir nun wie in § 3, 1

$$\pm \sum_{m=1}^{\infty} r_k(m)\, e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} m^{-\frac{k+1}{4}} \cos\left(2\pi \sqrt{n m}\, \xi - \frac{(k+1)\pi}{4}\right) < \pi(K+\varepsilon_n) \log^{\frac{k-1}{4}} n;$$

hierbei ist $\xi = \xi(n) = \frac{g}{\log n}$, g eine später zu bestimmende positive Konstante, $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Man zeigt zuerst wie in § 3, 2, daß eine ähnliche Ungleichung auch für kontinuierlich wachsendes n gilt. Dann wendet man wie in § 3, 3 den Dirichletschen Satz an, und beachtet, daß für die so ermittelten $n = n(M)$

$$\pm \cos\left(2\pi \sqrt{n m}\, \xi - \frac{(k+1)\pi}{4}\right) > \cos\frac{\pi}{8} > \frac{1}{2} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, M)$$

ist. D. h.

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} r_k(m)\, e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} m^{-\frac{k+1}{4}} - \sum_{m=M+1}^{\infty} r_k(m)\, e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} m^{-\frac{k+1}{4}} < \pi(K+\varepsilon_n) \log^{\frac{k-1}{4}} n.$$

Wegen Hilfssatz I′ und II′ ist nun

$$\frac{C_1(k)}{2} \sum_{m=1}^{M} m^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} m^{-\frac{k+1}{4}} - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{m=M+1}^{\infty} m^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} m^{-\frac{k+1}{4}}$$

$$- \eta(M+1)\left(\frac{k}{2} \sum_{m=M+1}^{\infty} m^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{\pi^2 m \xi}{2}} m^{-\frac{k+1}{4}} + 2M^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{\pi^2 (M+1)\xi}{2}} (M+1)^{-\frac{k+1}{4}}\right)$$

$$< \pi(K+\varepsilon_n) \log^{\frac{k-1}{4}} n.$$

Man multipliziere nun beide Seiten mit $\xi^{\frac{k-1}{4}}$ und gehe zur Grenze $M \to \infty$ über; es ergibt sich

$$\liminf_{M\to\infty} \xi \sum_{m=1}^{M} e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} (m\xi)^{\frac{k-5}{4}} \geqq \int_0^\gamma e^{-\frac{\pi^2 t}{2}} t^{\frac{k-5}{4}}\, dt,$$

$$\limsup_{M\to\infty} \xi \sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 m\xi}{2}} (m\xi)^{\frac{k-5}{4}} \leqq \int_\gamma^\infty e^{-\frac{\pi^2 t}{2}} t^{\frac{k-5}{4}}\, dt,$$

$$\lim_{M\to\infty} \eta(M+1)(M\xi)^{\frac{k-1}{4}} e^{-\frac{\pi^2(M+1)\xi}{2}} = 0,$$

so daß man genau so wie im Falle $k = 2$ bei passendem g und genügend kleinem K auf einen Widerspruch gelangt.

(Eingegangen am 1. Oktober 1925.)

Über den Konvergenzbereich des Verfahrens der schrittweisen Verbesserung bei einem Randwertproblem.

Von

Kurt Lachmann in Berlin.[1])

I. Vorbereitende Betrachtungen.

1. Das Problem. Die Aufgabe, die Integralkurven einer gewöhnlichen linearen Integralgleichung 2. Ordnung

$$y'' + A(x)\,y' + B(x)\,y + C(x) = 0 \tag{I}$$

zu bestimmen, welche durch zwei gegebene Punkte

$$P_1(x_1, y_1), \qquad P_2(x_2, y_2) \qquad (x_2 > x_1) \tag{II}$$

hindurchgehen, kann mit Hilfe des Verfahrens der schrittweisen Verbesserung behandelt werden. Man geht von zwei eindeutigen, stetigen, sonst aber beliebig wählbaren „Anfangskurven" $y_0(x)$ und $y_0'(x)$ aus und bildet eine Reihe von „Näherungskurven"

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots$$

mit Hilfe der Gleichungen

$$y_n'' = -A(x)\,y_{n-1}' - B(x)\,y_{n-1} - C(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

indem man jedesmal so integriert, daß die Näherungskurven $y_n(x)$ den Randbedingungen (II) genügen[2]). Von Picard[3]) stammt der Nachweis, daß

[1]) Der vorliegende Aufsatz ist ein Auszug aus meiner Dissertation: „Über den Konvergenzbereich des Verfahrens der schrittweisen Verbesserung bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integralkurven durch zwei gegebene Punkte gehen sollen." Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle Herrn Prof. G. Hamel für seine wertvollen Winke und Ratschläge bei Abfassung der Arbeit herzlichst zu danken.

[2]) Daß dies stets eindeutig möglich ist und auch leicht graphisch ausgeführt werden kann, habe ich in § 65 der zweiten Auflage des Buches „Die Differentialgleichungen des Ingenieurs" von W. Hort (Verlag Julius Springer) gezeigt. Dort ist auch ein Beispiel praktisch durchgeführt.

[3]) E. Picard, Traité d'Analyse 3, S. 90. Gauthier-Villars, Paris 1908.

das Verfahren konvergiert, falls gewisse Bedingungen erfüllt sind und die gegebenen Punkte genügend nahe beieinander liegen; in diesem Falle nähern sich die Näherungskurven immer mehr der gesuchten Lösung des Problems (I), (II). In der vorliegenden Arbeit soll der *exakte* Konvergenzbereich des Verfahrens bestimmt werden. Hierbei wird P_1 als fest, P_2 als beweglich betrachtet. Von Konvergenz soll nur dann gesprochen werden, wenn das Verfahren bei *allen* Anfangskurven zum Ziel führt. Ersichtlich kann man $x - x_1$ als neue unabhängige Veränderliche einführen und daher

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 > 0 \tag{II}$$

annehmen. Um Singularitäten zu vermeiden, seien $A(x)$, $B(x)$ und $C(x)$ in einem gewissen Bereich $\mathfrak{B}$, welcher die positive reelle x-Achse enthält, analytisch und regulär.

2. Anzahl der Lösungen. Der konjugierte Punkt. Wir untersuchen zunächst, wieviel Lösungen das Problem (I), (II) zuläßt.

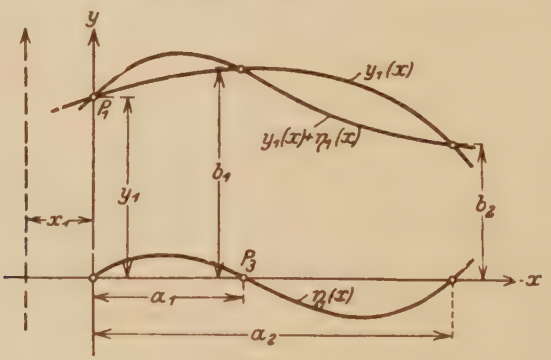


Fig. 1.

Es sei $y_1(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (I), welche durch den Punkt $P_1(0, y_1)$ hindurchgeht; $\eta_1(x)$ aber eine beliebige Lösung der zu (I) homogenen Differentialgleichung

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0\,,$$

welche durch den Ursprung des Koordinatensystems geht (siehe Fig. 1). Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ der Reihe nach die positiven Nullstellen von $\eta_1(x)$, falls solche vorhanden sind; $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ die zugehörigen Ordinaten von $y_1(x)$. Da nun $y_1(x) + C\eta_1(x)$ (C eine beliebige Konstante) alle durch den Punkt P_1 hindurchgehenden Lösungen von (I) gibt, so folgen die Sätze: Ist x_2 verschieden von a_n (n eine natürliche Zahl), so gibt es eine und nur eine Lösung $y = y_1(x) + \frac{y_2 - y_1(x_2)}{\eta_1(x_2)}\eta_1(x)$ des Problems (I), (II); ist $x_2 = a_n$ und $y_2 = b_n$, so gibt es unendlich viele

Lösungen: $y = y_1(x) + C\eta_1(x)$. Ist aber $x_2 = a_n$ und $y_2 \neq b_n$, so hat das Problem (I), (II) keine Lösung. Der Punkt P_3 mit den Koordinaten $(a_1, 0)$ soll — in Anlehnung an einen in der Variationsrechnung üblichen Ausdruck — als der der Differentialgleichung (I) zugehörende „konjugierte" Punkt bezeichnet werden. Existiert kein konjugierter Punkt, so hat die Differentialgleichung (I) bei beliebiger Lage der gegebenen Punkte stets eine einzige Lösung.

3. Zurückführung auf einen speziellen Fall. Entsprechend den Betrachtungen in 2 unterscheiden wir zwei Fälle.

1. $x_2 \neq a_n$. $y(x)$ sei die Lösung von (I), (II); $y'(x)$ ihre erste Ableitung. Bezeichnet man die n-te „Fehlerkurve" $y(x) - y_n(x)$ mit u_n, so gilt ersichtlich

$$u_n'' + A(x)\,u_{n-1}' + B(x)\,u_{n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei alle u_n — eventuell mit Ausnahme von u_0 — für $x = 0$ und $x = x_2$ verschwinden.

Wenn nun das Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei dem Problem (I), (II) konvergiert, d. h. bei beliebigem $y_0(x)$ $y_n(x)$ mit wachsendem n gegen $y(x)$ geht, so geht u_n identisch gegen Null. Da nun $y \equiv 0$ die einzige Lösung der Differentialgleichung

(Ia) $$y'' + A(x)\,y' + B(x)\,y = 0$$

ist, welche den Randbedingungen

(IIa) $$P_1(0, 0), \qquad P_2(x_2, 0)$$

genügt, so erkennt man, daß das Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei dem Problem (Ia), (IIa) konvergiert, falls dies bei dem Problem (I), (II) der Fall ist. Geht aber y_n nicht bei allen Anfangskurven gegen $y(x)$, divergiert also das Verfahren bei (I), (II), so geht auch u_n nicht für alle $u_0 = y(x) - y_0(x)$ gegen Null. Da man ebenso nachweisen kann, daß das Verfahren bei (I), (II) konvergiert oder divergiert, je nachdem dies bei (Ia), (IIa) der Fall ist, so erkennt man, daß beide Probleme in bezug auf den Konvergenzbereich identisch sind.

2. $x_2 = a_n$. Ist zunächst $y_2 \neq b_n$, so gibt es durch die gegebenen Punkte keine Lösung von (I), das Verfahren muß daher bei (I), (II) divergieren. — Ist aber $y_2 = b_n$, so kann man leicht die Äquivalenz beider Probleme nachweisen. Setzt man

$$u_n = y_n(x) - y(x),$$

wobei $y(x)$ eine beliebige Lösung von (I) ist, welche den Randbedingungen (II) genügt, so folgt wie unter 1

$$u_n'' + A(x)\,u_{n-1}' + B(x)\,u_{n-1} = 0,$$

d. h. die Kurven u_n sind die n-ten Näherungskurven des Problems (Ia), (IIa), wenn als Anfangskurven $u_0 = y_0(x) - y(x)$, $u_0' = y_0'(x) - y'(x)$ gewählt werden.

Da nun, wie gezeigt, $y_1(x) + C\eta_1(x)$ die allgemeine Lösung von (I), (II) ist, so konvergiert das Verfahren bei diesem Problem dann und nur dann, wenn $y_n(x)$ gegen einen Ausdruck der Form $y(x) + C_1\eta_1(x)$ — C_1 eine Konstante — geht. In diesem Falle geht aber $u_n = y_n(x) - y(x)$ gegen $C_1\eta_1(x)$, also gegen eine Lösung von (Ia), (IIa). Gibt es aber eine Anfangskurve $y_0(x)$, für welche das Verfahren bei dem zu untersuchenden Problem divergiert, also y_n nicht gegen einen Ausdruck der Form $y(x) + C_1\eta_1(x)$ geht, so kann auch $u_n = y_n - y(x)$ nicht gegen $C_1\eta_1(x)$, d. h. gegen eine Lösung von (Ia), (IIa) gehen. Ebenso kann man zeigen, daß das Verfahren bei dem Problem (I), (II) konvergiert oder divergiert, je nachdem dies bei dem Problem (Ia), (IIa) der Fall ist.

Mithin erhält man den Satz:

Um die Punkte des Konvergenzbereiches bei dem Problem (I), (II) *festzustellen, genügt es, das Problem* (Ia), (IIa) *zu betrachten. Der sich ergebende Konvergenzbereich ist mit dem des zu untersuchenden Problems identisch.*

Hierbei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß das gegebene Problem eine Lösung zuläßt.

Wir werden uns daher im folgenden nur mit dem Problem (Ia), (IIa) beschäftigen.

4. Die Integralgleichung. Einführung eines Parameters. Die Eigenwerte. Wir betrachten also die Differentialgleichung

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0 \tag{Ia}$$

und die Randbedingungen

$$P_1(0, 0), \qquad P_2(x_2, 0). \tag{IIa}$$

Im folgenden soll $y_0'(x)$ die Ableitung von $y_0(x)$ sein und $y_0(x)$ den Bedingungen (IIa) genügen. Ist dies nicht der Fall, so bilde man nach dem Verfahren der schrittweisen Verbesserung $y_1(x)$ und $y_1'(x)$ und betrachte diese als neue Anfangskurven $y_0(x)$, $y_0'(x)$.

Ist $y'' + \varphi(x) = 0$, so sind die den Randbedingungen (IIa) genügenden Lösungen $y(x)$ gegeben durch

$$y(x) = \int_0^x \varphi(z)(z - x)\,dz - \frac{x}{x_2}\int_0^{x_2} \varphi(z)(z - x_2)\,dz = \int_0^{x_2} G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

wo die Greensche Funktion[4]) durch

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{(x_2-x)\,\xi}{x_2} & \text{für} \quad \xi<x,\\[2ex] \dfrac{(x_2-\xi)\,x}{x_2} & \text{für} \quad \xi>x\end{cases}$$

definiert ist (s. Fig. 2). Demnach genügen die Lösungen des Problems (Ia), (IIa) der Integralgleichung

$$y(x)=\int_0^{x_2}[A(\xi)\,y'(\xi)+B(\xi)\,y(\xi)]\,G(x,\xi)\,d\xi.$$

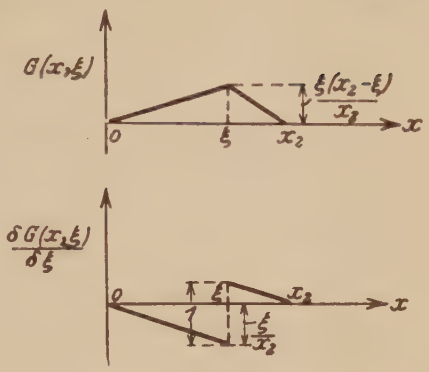


Fig. 2.

Nun ist aber

$$\int_0^{x_2}A(\xi)\,y'(\xi)\,G(x,\xi)\,d\xi=\Big[A(\xi)\,G(x,\xi)\,y(\xi)\Big]_0^{x_2}-\int_0^{x_2}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi}\,A(\xi)\,y(\xi)\,d\xi$$

$$=-\int_0^{x_2}\Big[A'(\xi)\,G(x,\xi+A(\xi)\,\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi}\Big]\,y(\xi)\,d\xi,$$

mithin wird

$$y(x)=\int_0^{x_2}K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi$$

mit

$$K(x,\xi)=-A(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi}+[B(\xi)-A'(\xi)]\,G(x,\xi).$$

Da der Kern $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi}$ (s. Fig. 2) unstetig ist, so ist K nur stetig, wenn $A(x)\equiv 0$ ist.

Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung wird entsprechend der Differentialgleichung

$$y_n''=-A(x)\,y_{n-1}'-B(x)\,y_{n-1}\qquad(n=1,2,3\ldots)$$

durch die Gleichung

$$y_n=\int_0^{x_2}K(x,\xi)\,y_{n-1}(\xi)\,d\xi$$

gegeben.

Definiert man nun die zu $K(x,\xi)$ *iterierten Kerne*[5]) durch

$$K^n(x,\xi)=\int_0^{x_2}K(x,z)\,K^{n-1}(z,\xi)\,d\xi;\qquad K^1(x,\xi)=K(x,\xi),$$

---

[4]) Siehe D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner 1912, Kap. VII.

[5]) Vergleiche hierzu und zum folgenden z. B. H. Hahn, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner 1911.

so wird

$$y_n(x) = \int_0^{x_2} K^n(x, \xi)\, y_0(\xi)\, d\xi .$$

Wie in der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen erweist es sich hier als zweckmäßig, einen Parameter λ einzuführen. Ersetzt man $A(x)$ durch $\lambda A(x)$, $B(x)$ durch $\lambda B(x)$, so erhalten wir das Problem, die der Differentialgleichung

(Ib) $$y'' + \lambda A(x) y' + \lambda B(x) y = 0$$

genügenden Lösungen zu bestimmen, welche die Randbedingungen

(IIb) $$P_1(0,0), \qquad P_2(x_2, 0)$$

erfüllen.

Ersetzen wir auch in den abgeleiteten Formeln überall $A(x)$ und $B(x)$ durch $\lambda A(x)$ und $\lambda B(x)$, so folgt, daß die gesuchten Lösungen von (Ib), (IIb) durch

$$y(x) = \lambda \int_0^{x_2} K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

gegeben sind, wo $K(x, \xi)$ der oben definierte Kern ist und daß die Näherungskurven des Verfahrens der schrittweisen Verbesserung durch

$$y_n(x) = \lambda^n \int_0^{x_2} K^n(x, \xi)\, y_0(\xi)\, d\xi$$

gegeben ist.

Der Theorie von Fredholm entnehmen wir nun die nachstehenden Betrachtungen.

Der zu $K(x, \xi)$ gehörende lösende Kern $K(\lambda; x, \xi)$ (d. h. der Kern, welcher die Lösung der Integralgleichung $f(x) = y(x) - \lambda \int K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$ in der Form $y(x) = f(x) + \lambda \int K(\lambda; x, \xi) f\xi\, d\xi$ liefert), genügt der Neumannschen Reihe

$$K(\lambda; x, \xi) = K(x, \xi) + \lambda K^2(x, \xi) + \ldots + \lambda^n K^{n+1}(x, \xi) + \ldots$$

$K(\lambda; x, \xi)$ kann als Quotient zweier ganzer Funktionen in λ dargestellt werden, $K(\lambda; x, \xi) = \frac{D(\lambda; x, \xi)}{D(\lambda)}$, wobei $D(\lambda)$ von x und ξ unabhängig ist. Diejenigen Werte von λ, für welche $D(\lambda) = 0$ ist, werden als *Eigenwerte* bezeichnet ($\lambda = 0$ zählt nicht als Eigenwert) und für diese hat die Integralgleichung $y(x) = \lambda \int K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$ mindestens eine nicht identisch verschwindende Lösung $y(x)$, welche als *Eigenfunktion* bezeichnet wird. ($y \equiv 0$ zählt nicht als Eigenfunktion mit.) Ist λ kein Eigenwert, so existiert keine Eigenfunktion $y(x)$ der Integralgleichung.

In unserem Falle gehört zu jedem Eigenwert λ, abgesehen von einem beliebigen von x unabhängigen multiplikativen Faktor, nur eine Eigenfunktion. Indem wir diesen Faktor irgendwie festlegen, z. B. die Eigenfunktionen „*normieren*“ und verlangen, daß $\int_0^{x_2} y(x)^2\,dx = 1$ sei, können wir sagen, daß zu jedem Eigenwert nur *eine* Eigenfunktion $y(x)$ gehört.

Es sei nun λ_0 der kleinste Wert der absoluten Beträge aller Eigenwerte. Für einen beliebigen Wert λ, der der Ungleichung $|\lambda| < \lambda_0$ genügt, ist $D(\lambda)$ verschieden von Null und folglich $K(\lambda; x, \xi)$ eine analytische Funktion von λ. Daher muß die Neumannsche Reihe konvergieren und hieraus folgt als notwendige Bedingung, daß $\lambda^n K^n(x, \xi)$ mit wachsendem n gegen Null geht. Da $y_n(x) = \lambda^n \int_0^{x_2} K^n(x, \xi)\, y_0(\xi)\, d\xi$ ist, so muß auch dieser Wert gegen Null gehen; und daher ergibt sich, wenn wir $\lambda_0 > 1$ voraussetzen und $\lambda = 1$ wählen:

Hat das Problem (Ib), (IIb) *nur Eigenwerte, deren absoluter Betrag größer als Eins ist, so geht für das Problem* (Ia), (IIa) $y_n(x)$ *identisch gegen Null, d. h. das Verfahren der schrittweisen Verbesserung konvergiert.*

Da nun $x_2 \neq a_n$ sein muß, weil sonst $\lambda = 1$ ein Eigenwert wäre, also λ_0 nicht > 1 sein kann, *so gilt dasselbe für das Problem* (I), (II).

Wir untersuchen nun das Problem (Ib), (IIb) für den Fall, daß $\lambda = \lambda_0$ ist.

1. Wir wollen zunächst zeigen, daß, falls mindestens ein wirklich komplexer Eigenwert vom absoluten Betrage λ_0 existiert, stets Anfangskurven gefunden werden können, für welche das Verfahren divergiert.

Es sei also $\lambda^* = \lambda_0 e^{i\varphi}$ $(0 < \varphi < 2\pi, \varphi \neq \pi)$ und $y^*(x) = \Phi(x) + i\Psi(x)$ die zugehörige Eigenfunktion.

Dann wird für $\lambda = \lambda_0$ und $y_0(x) = y^*(x)$

$$y_n(x) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda^*}\right)^n y(x) = e^{-in\varphi} y^*(x).$$

Wählt man nun

$$(\alpha)\quad y_0(x) = \frac{y^*(x) + \overline{y^*(x)}}{2} = \Phi(x), \qquad (\beta)\quad y_0(x) = \frac{y^*(x) - \overline{y^*(x)}}{2i} = \Psi(x)$$

als Anfangskurven, wo $\overline{y^*(x)}$ den zu $y^*(x)$ konjugiert komplexen Wert bedeuten soll, so wird im Falle

$$(\alpha)\quad y_n(x) = \cos n\varphi\, \Phi(x) + \sin n\varphi\, \Psi(x),$$

$$(\beta)\quad y_n(x) = \cos n\varphi\, \Psi(x) - \sin n\varphi\, \Phi(x).$$

In beiden Fällen sind die Ordinaten aller Näherungskurven kleiner als das Maximum des Ausdruckes $|\Phi(x)| + |\Psi(x)|$ im Intervall $(0, x_2)$. Trotzdem kann man zeigen, daß $y_n(x)$ mit wachsendem n nicht identisch gegen Null gehen kann.

Zum Beweis wählen wir eine Stelle x_0 des Intervalles $(0, x_2)$, für welche $y^*(x)$ nicht verschwindet. Wir wollen nachweisen, daß eine solche positive Zahl ε gefunden werden kann, daß von den Ausdrücken $y_n(x_0)\, y_{n+1}(x_0)$ mindestens einer dem absoluten Betrage nach größer als ε ist, wie groß auch n vorgeschrieben wird. Zu diesem Zwecke setzen wir im Falle (α) $\Phi(x_0) = r \sin t$ und $\Psi(x_0) = r \cos t$, im Falle (β) $\Phi(x_0) = -r \cos t$ und $\Psi(x_0) = r \sin t$. In beiden Fällen wird dann $y_n(x_0) = r \sin(n\varphi + t)$ und $y_{n+1}(x_0) = r \sin[(n+1)\varphi + t]$. Da die Differenz von $(n+1)\varphi + t$ und $n\varphi + t$ gleich φ ist, so können $|\sin(n\varphi + t)|$ und $|\sin([n+1]\varphi + t)|$ nicht gleichzeitig beliebig klein werden. Denn bezeichnet man den kleinsten Wert, um den sich φ dem absoluten Werte nach von $0, \pi$ oder 2π unterscheidet, mit $2a$ — nach unserer Annahme ist a verschieden von Null — so muß einer der beiden Ausdrücke größer als $\sin a$ sein. Man kann daher $\varepsilon = r \sin a$ wählen. — Hieraus folgt, daß $y_n(x)$ nicht identisch gegen Null gehen kann und folglich divergiert das Verfahren für die Anfangskurven (α) und (β).

2. Falls nun $\lambda = -\lambda_0$ der einzige Eigenwert vom absoluten Betrage λ_0 ist oder falls λ_0 und $-\lambda_0$ die einzigen Eigenwerte vom absoluten Betrage λ_0 sind, so möge die zu $\lambda = -\lambda_0$ gehörende Eigenfunktion mit $y^*(x)$ bezeichnet werden. Für $\lambda = \lambda_0$ und $y_0(x) = y^*(x)$ ergeben sich dann die Näherungskurven:

$$y^*(x), \quad -y^*(x), \quad +y^*(x), \quad -y^*(x) \quad \text{usw.}$$

Der Grenzwert $y_n(x)$ existiert nicht, das Verfahren divergiert bei der gewählten Anfangskurve.

3. Der übrigbleibende Fall, daß $\lambda = \lambda_0$ der einzige Eigenwert vom absoluten Betrage λ_0 ist, bleibt unentschieden. Es kann hier tatsächlich das Verfahren bei allen Anfangskurven, angewandt auf das Problem (Ib), (IIb) konvergieren.

Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür besteht nun darin, daß $\lim_{n\to\infty} \lambda_0^n K^n(x, \xi)$ existiert und eine Lösung der Differentialgleichung (Ib) darstellt.

Zunächst verschwinden ja alle iterierten Kerne für $x = 0$ und $x = x_2$, genügen also den Randbedingungen (IIb). Setzt man nun $y_0(x) = \lambda_0 K(x, \xi)$ — wobei man ξ als einen festen Parameter zu betrachten hat — so folgt

aus der Definition der iterierten Kerne (S. 409):

$$K^{n+1}(x,\xi)=\int_0^{x_2} K^n(z,\xi)\,K(x,z)\,dz=\int_0^{x_2} K(z,\xi)\,K^n(x,z)\,dz,^{6})$$

weil

$$y_n(x)=\lambda_0^{n+1}\int_0^{x_2} K^n(x,z)\,K(z,\xi)\,dz \quad \text{ist,} \quad y_n(x)=\lambda_0^{n+1}K^{n+1}(x,\xi).$$

Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit der obigen Bedingung. Weil nun $\lambda=\lambda_0$ ein Eigenwert des Problems (Ib), (IIb) ist, kann $\lambda_0^n K^n(x,\xi)$ nicht identisch gegen Null gehen. Ist daher $\varphi(x)$ eine beliebige, nicht identisch verschwindende Lösung der Differentialgleichung (Ib), welche den Randbedingungen (IIb) genügt, so muß $\lambda_0^n K^n(x,\xi)$ mit wachsendem n gegen einen Ausdruck der Form $\varphi(x)\psi(\xi)$ gehen. Wählt man $y_0(x)$ ganz beliebig, so geht $y_n(x)=\lambda_0^n\int_0^{x_2} K^n(x,\xi)\,y_0(\xi)\,d\xi$ gegen $\varphi(x)\int_0^{x_2}\psi(\xi)\,y_0(\xi)\,d\xi$, also identisch gegen Null, wenn $\psi(x)$ und $y_0(x)$ orthogonal sind, d. h. $\int_0^{x_2}\psi(x)\,y_0(x)\,dx=0$ ist, sonst gegen eine nicht identisch verschwindende Lösung der Differentialgleichung (IIb). Die Bedingung ist also auch hinreichend.

Zusammenfassend ergibt sich für $\lambda_0=1$:

Ist für das Problem (Ib), (IIb) $\lambda_0=1$ *und existiert mindestens ein Eigenwert vom absoluten Betrag* 1, *der verschieden von* -1 *ist, so gibt es mindestens eine Anfangskurve, für welche das Verfahren, angewandt auf das Problem* (Ia), (IIa), *divergiert. Dasselbe gilt auch von dem Problem* (I), (II), *weil die betreffenden Punkte nicht zum Konvergenzbereich gehören. — Ist* $\lambda_0=1$ *der einzige Eigenwert vom absoluten Betrag* 1, *so konvergiert das Verfahren dann und nur dann, wenn* $K^n(x,\xi)$ *mit wachsendem n gegen eine Lösung des Problems* (Ia), (IIa) *geht und das gegebene Problem* (I), (II) *eine Lösung besitzt.*

Wir betrachten nun den Fall, daß für das Problem (Ib), (IIb) λ reell und größer als λ_0 ist und wollen zeigen, daß in diesem Fall *stets* eine Anfangskurve existiert, für welche das Verfahren divergiert.

1. Ist zunächst ein komplexer Eigenwert λ^* vom absoluten Betrage λ_0 vorhanden, so setzen wir wie im Fall $\lambda=\lambda_0$, $\lambda^*=\lambda_0 e^{i\varphi}$ und die zugehörige Eigenfunktion $y^*(x)=\Phi(x)+i\Psi(x)$. Wählt man als Anfangskurven

$$(\alpha)\quad y_0(x)=\Phi(x), \qquad (\beta)\quad y_0(x)=\Psi(x),$$

---

6) H. Hahn, Bericht S. 9.

so werden die n-ten Näherungskurven

$$(\alpha) \quad y_n(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^n [\cos n\varphi\, \Phi(x) + \sin n\varphi\, \Psi(x)]$$

und

$$(\beta) \quad y_n(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^n [\cos n\varphi\, \Psi(x) - \sin n\varphi\, \Phi(x)].$$

Da für eine Stelle x_0 des Intervalles $(0, x_2)$ wo $y_0(x)$ nicht verschwindet, entweder $y_n(x)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^n$ oder $y_{n+1}(x)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^n$, wie wir gezeigt haben, größer als eine positive Zahl ε ist, so kann der Grenzwert von $y_n(x)$ nicht existieren — das Verfahren divergiert.

2. Ist kein komplexer Eigenwert vom absoluten Betrage λ_0 vorhanden, so sei $\lambda = \lambda_0$ ein Eigenwert, $y^*(x)$ die zugehörige Eigenfunktion.

Wählt man $y_0(x) = y^*(x)$, so wird $y_n(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^n y^*(x)$, was mit wachsendem n für alle Stellen x_n des Intervalles $(0, x_2)$, wo $y^*(x_0) \neq 0$ ist, gegen ∞ geht.

3. Ist schließlich $\lambda = -\lambda_0$ der einzige Eigenwert vom absoluten Betrage λ_0 und wählt man $y_0(x)$ gleich der zugehörigen Eigenfunktion $y^*(x)$, so wird $y_n(x) = (-1)^{n+1} y^*(x)$. was auch mit wachsendem n für alle Werte x_0, für welche $y^*(x_0)$ nicht verschwindet, gegen ∞ geht.

Es ergibt sich für $\lambda_0 < 1$ und $\lambda = 1$:

Ist für das Problem (Ib), (IIb) $\lambda_0 < 1$, *so gibt es stets eine Anfangskurve, für welche das Verfahren, angewandt auf das Problem* (Ia), (IIa) *divergiert. Dasselbe gilt auch vom dem Problem* (I), (II).

Wie bereits erwähnt, untersuchen wir den Konvergenzbereich des Verfahrens bei dem Problem (I), (II) in der Weise, daß wir P_1 als fest und P_2 als beweglich betrachten. Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen sind wir nun in der Lage, mit Ausnahme einiger weniger Punkte den Konvergenzbereich des Verfahrens festzustellen, falls wir für jeden Wert x_2 den sich aus dem Problem (Ib), (IIb) ergebenden Wert λ_0 kennen. Ist nämlich λ_0 als Funktion x_2 bekannt (s. Fig. 3), so ziehe man diejenige Parallele zur Abszissenachse, welche den Abstand 1 hat. Liegt nun ein Punkt P der

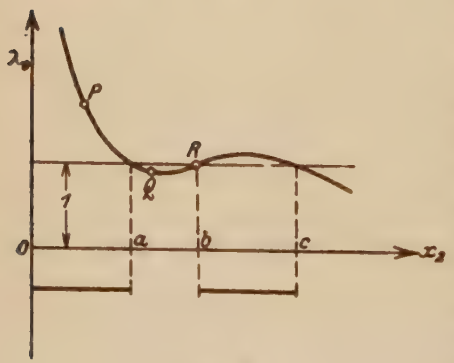


Fig. 3.

Kurve λ_0 oberhalb der Geraden, so ist für den betreffenden Wert x_2 $\lambda_0 > 1$, das Verfahren konvergiert für alle Anfangskurven, x_2 gehört also zum Konvergenzbereich. Liegt ein Punkt Q unterhalb der Geraden, so ist $\lambda_0 < 1$, das Verfahren konvergiert nicht und der betreffende Punkt rechnet nicht zum Konvergenzbereich. Der Fall, daß ein Punkt R der Kurve auf der Geraden liegt, also $\lambda_0 = 1$ ist, bedarf einer besonderen Untersuchung. Gibt es einen Eigenwert von der Form $\lambda = \lambda_0 e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, $\varphi \neq \pi$, so rechnet der betreffende Punkt nicht zum Konvergenzbereich; ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert vom absoluten Betrage Eins, so *kann* der Punkt zum Konvergenzbereich rechnen, aber nur dann, wenn die Ordinate von P_2 denjenigen Wert hat, für welchen die Differentialgleichung I eine Lösung durch die Punkte P_1, P_2 besitzt. In unserem Beispiel konvergiert also das Verfahren, wenn x_2 im Inneren der Intervalle oa und bc liegt. Es ist möglich, daß für x_2 gleich a, b, c je eine Ordinate y_2 existiert, für welche das Verfahren konvergiert. Hiermit ist aber der ganze Konvergenzbereich erschöpft.

5. Das Anfangsproblem. Die Lage der Nullstellen. Verzweigungspunkte.

Wir bezeichnen die bei gegebenem λ bestimmte Lösung unserer Differentialgleichung

$$y'' + \lambda A(x) y' + \lambda B(x) y = 0 \tag{Ib}$$

($A(x)$ und $B(x)$ seien in einem gewissen Bereich $\mathfrak{B}$, welcher die positive x-Achse enthält, analytisch), welche an der Stelle $x = 0$ den Anfangsbedingungen $y = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$ genügt, mit

$$y(x, \lambda).$$

Nimmt x nur reelle, positive Werte an, so gelten die Sätze:

1. $y(x, \lambda)$ ist eine ganze Funktion von λ und in x (im Bereich $\mathfrak{B}$) analytisch. (Picard, II. Kap. XI, III. Kap. V.)

2. $y(x, \lambda)$ und $\frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial x}$ können nicht gleichzeitig verschwinden (Sturm, Journal de Liouville Bd. 1).

3. Ist a eine Nullstelle von $y(x, \lambda)$, also $y(a, \lambda) = 0$ und betrachtet man λ als Funktion von a, so kann $\frac{d\lambda}{da}$ nicht verschwinden. Denn es ist $\frac{d\lambda}{da} = -\frac{\frac{\partial y(a, \lambda)}{\partial x}}{\frac{\partial y(a, \lambda)}{\partial a}}$, und da $y(a, \lambda) = 0$ ist, muß $\frac{\partial y(a, \lambda)}{\partial x}$ nach 2 verschieden von Null sein.

4. Betrachten wir nur die *reellen* Werte λ, welche der Gleichung $y(a, \lambda) = 0$ genügen, als Funktionen von a, so gilt der Satz: Hat für $\lambda = \lambda_1$ $y(a, \lambda_1) = 0$ die Nullstellen a_1 und a_2 (s. Fig. 4), so können diese bei stetiger Änderung von λ nicht zusammenrücken. Da nämlich $y(a, \lambda_1)$ für $a = a_1$ und $a = a_2$ verschwindet, muß nach dem Satze von Rolle $\frac{\partial y(a, \lambda_1)}{\partial a}$ mindestens für einen Wert im Intervall (a_1, a_2) verschwinden. Falls nun für $\lambda = \lambda_2$ a_1 und a_2 in a_3 übergehen, so müßte für $a = a_3$ $\frac{\partial y(a, \lambda_2)}{\partial a} = 0$ sein, was nach 2. unmöglich ist.

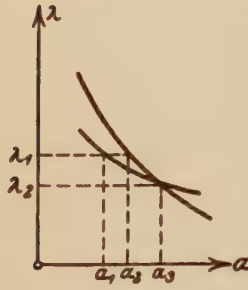


Fig. 4.

5. Ist $y(a, \lambda) = 0$, so folgt aus 1., daß λ als Funktion von a im Endlichen nur Verzweigungsstellen als Singularitäten haben kann[7]). Ist nämlich für $a = \underline{a}$, $\lambda = \underline{\lambda}$ und $\frac{\partial y}{\partial \lambda} + 0$, so geht durch die betrachtete Stelle eine Kurve $\lambda(a)$ hindurch, welche der Gleichung $y(a, \lambda) = 0$ in der Nähe von $a = \underline{a}$ genügt. Ist aber für $a = \underline{a}$ und $\lambda = \underline{\lambda}$ $\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} = \ldots = \frac{\partial^{n-1} y}{\partial \lambda^{n-1}} = 0$, während $\frac{\partial^n y}{\partial \lambda^n}$ nicht mehr verschwindet, so liegt eine n-fache Verzweigungsstelle vor, d. h. es gibt n Funktionselemente $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, welche für $a = \underline{a}$ den Wert $\lambda = \underline{\lambda}$ annehmen und in der Nähe von $a = \underline{a}$ der Gleichung $y(a, \lambda) = 0$ genügen. Die n Funktionselemente zeigen in der Nähe der Verzweigungsstelle algebraischen Charakter, indem sie sich wie $\underline{\lambda} + C(a - \underline{a})^{\frac{p}{q}}$ verhalten, worin p und q teilerfremde ganze Zahlen sind und C eine Konstante bedeutet. Sind C, p, q irgendwie gegeben, so sind durch den obigen Ausdruck q Funktionselemente definiert, da ja die q-te Wurzel aus einer Zahl q verschiedene Werte hat. Wir nehmen jetzt den betrachteten Wert $\underline{\lambda}$ als *reell* an. Ist dann q ungerade, so wird unter den q Funktionselementen stets eines reell sein, die Kurve geht (nach Fig. 5a oder 5b) durch den Verzweigungspunkt hindurch. Ist aber q gerade, so sind nur für $a < \underline{a}$ oder für $a > \underline{a}$ reelle Werte λ vorhanden, und zwar von den betrachteten q Funktionselementen je zwei. Es liegt also eine parabolische Verzweigung ähnlich Fig. 5c oder 5d vor. *Reelle Kurven hören also an einer Verzweigungsstelle nicht auf.* — Da nun durch die betrachtete Verzweigungsstelle keine weiteren reellen λ-Kurven hindurchgehen können (s. 4.), so gibt Fig. 5a bis d eine Übersicht über

[7]) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. 1, S. 192 und 233.

das Verhalten reeller λ-Kurven in der Umgebung einer Verzweigungsstelle. Da q größer als 1 sein muß, weil sonst $\frac{d\lambda}{da} = 0$ wäre, was ja nach

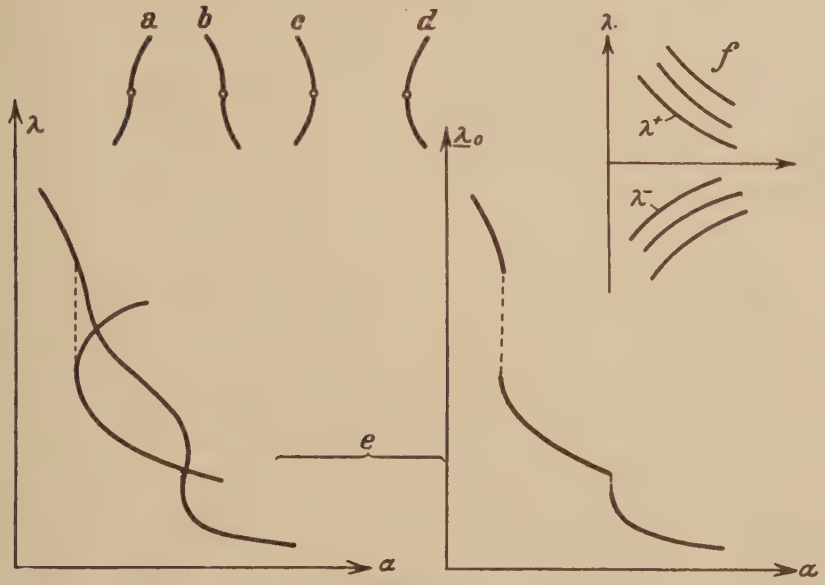


Fig. 5.

3. unmöglich ist, so liegen in der Nähe jeder Verzweigungsstelle komplexe λ-Werte. Hieraus folgt:

6. *Hat die Gleichung $y(a, \lambda) = 0$ nur reelle Wurzeln λ, so hat λ als Funktion von a im Endlichen keine singulären Stellen.*

7. Ist der Kern $K(x, \xi)$ unserer Integralgleichung dem Absolutwert nach kleiner als k, so sind alle Eigenwerte dem absoluten Betrage nach größer als $\frac{1}{k \cdot x_2}$.[8]) Wenn also für kleine Werte x_2 Eigenwerte vorhanden sind, so geht deren Absolutwert gegen ∞, wenn x_2 gegen Null geht. Ferner ist λ stets von Null verschieden.

8. Trägt man also als Ordinaten zu den Abzissen a die *reellen* Werte λ auf, für welche $y(a, \lambda) = 0$ ist, so verlaufen die Kurven λ entweder oberhalb oder unterhalb der Abszissenachse, wie in Fig. 5f angedeutet. Tragen wir ferner zu den Abszissen a die *Absolutwerte* der reellen Eigenwerte auf und nennen den kleinsten von ihnen $\underline{\lambda}_0$, so folgt der Satz (s. Fig. 5e): *$\underline{\lambda}_0$ nimmt monoton ab, wenn x_2 wächst, und zwar gibt es stets einen solchen Wert x_2^*, daß $\underline{\lambda}_0$ für alle Werte $x_2 \geqq x_2^*$ existiert, für $x_2 < x_2^*$ aber nicht vorhanden ist.*

[8]) H. Hahn, Bericht S. 12.

9. Hat $y(a, \lambda) = 0$ *nur reelle Eigenwerte* λ, so müssen diese nach unseren Sätzen 3, 6 und 8 *dem absoluten Werte nach monoton abnehmen, wenn* x_2 *wächst* (s. Fig. 5f). Da sich die λ-Kurven nach 4. nicht schneiden können, so werden die absolut kleinsten Eigenwerte durch die Kurven λ^+ und $|\lambda^-|$ gegeben, welche die zu dem betreffenden Eigenwert λ gehörenden konjugierten Punkte zu Abszissen haben. Da λ nach Voraussetzung stets reell ist, so ist $\underline{\lambda}_0$ identisch mit λ_0 und λ_0 kann sich daher *nur aus Stücken der Kurven* λ^+ *und* $|\lambda^-|$ zusammensetzen, *falls alle Eigenwerte reell sind.*

6. Das Ergebnis.

Das *Ergebnis* der folgenden Untersuchungen ist durch die nachstehenden Sätze gegeben:

1. Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung konvergiert bei der Differentialgleichung $y'' + B(x)y + C(x) = 0$, wenn $x_2 < a$ ist, wo a die kleinere Abszisse der zu den Differentialgleichungen $y'' \pm B(x)y = 0$ gehörenden konjugierten Punkte ist. (Abschnitt II.)

2. Liegt die Differentialgleichung $y'' + A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$ vor, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

A. *Reguläres Verhalten.* Die der Differentialgleichung $y'' + \lambda A(x)y' + \lambda B(x)y = 0$ entsprechenden Eigenwerte λ verhalten sich so, daß λ_0 mit wachsendem x_2 monoton abnimmt. Hier konvergiert das Verfahren, wenn $x_2 < a$ ist, wo a die kleinste Abszisse der zu den Differentialgleichungen der Form $y'' + e^{i\varphi}(A(x)y' + B(x)y) = 0$ gehörenden konjugierten Punkte ist. (Abschnitt IIIA.)

B. *Irreguläres Verhalten.* λ_0 nimmt nicht monoton ab. Der Konvergenzbereich zerfällt in mehrere getrennte Gebiete. (Abschnitt IIIB.)

Bei der Untersuchung spielen die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$y'' + \lambda A(x)y' + \lambda B(x)y = 0$$

eine wichtige Rolle. Ist $A(x) = 0$, so sind alle Eigenwerte reell und nehmen, dem absoluten Werte nach, monoton ab, wenn x_2 wächst[9]). Ist nun $A(x)$ nicht identisch Null, so wird gezeigt:

1. Ist $y(x, \lambda)$ ein Polynom n-ten Grades in λ, so gibt es zu jedem x_2 n reelle, negative Eigenwerte λ, welche verschieden voneinander sind und dem absoluten Werte nach mit wachsendem x_2 monoton abnehmen,

2. Es gibt Fälle, wo $|\lambda|$ nicht mehr monoton abnimmt, wenn x_2 wächst.

---

[9]) Dieser Satz ist bereits bekannt.

II. Die Differentialgleichung $y'' + B(x)\,y + C(x) = 0$.

Zur Behandlung des Problems

(I) $$y'' + B(x)y + C(x) = 0$$

(II) $$P_1(0, y_1), \qquad P_2(x_2, y_2)$$

hat man das Verhalten der Eigenwerte λ zu studieren, welche der Differentialgleichung

(Ib) $$y'' + \lambda B(x)\,y = 0$$

genügen, wobei y die Randbedingungen

(IIb) $$P_1(0, 0), \qquad P_2(x_2, 0)$$

erfüllen muß.

Die zu (Ib), (IIb) zugehörige Integralgleichung (siehe S. 409) lautet

$$y(x) = \lambda \int_0^{x_2} K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi \quad \text{mit} \quad K(x, \xi) = B(\xi)\, G(x, \xi).$$

Da nun $G(x, \xi)$ als Greensche Funktion positiv definit, reell und symmetrisch ist[10]), so folgt aus den Untersuchungen von Marty[11]), daß der Kern $K(x, \xi)$, mithin auch das Problem (Ib), (IIb) nur reelle Eigenwerte hat. Daher gilt hier der wichtige Satz, daß die Eigenwerte λ, dem absoluten Betrage nach, monoton abnehmen, wenn x_2 wächst. (Siehe S. 418.)

Man hat folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Orthogonaler Fall. $B(x)$ hat in dem Intervall $(0, x_2)$ nur ein Zeichen.

a) $B(x) \geqq 0$. Hier sind alle Eigenwerte der Differentialgleichung (Ib) positiv. Denn wäre λ negativ, so würde aus $\frac{dy'}{dx} = -\lambda B(x)\,y$ folgen, daß y oberhalb der Geraden $y = x$ liegt, also für $x > 0$ nicht verschwinden kann.

Folglich ist unsere Kurve λ_0 identisch mit der Kurve λ^+, der Kurve, welche die bei gegebenem λ konjugierten Punkte x_2 zu Abszissen hat (siehe S. 418). Nun gilt für das Problem (Ib), (IIb) das sogenannte *„Sturmsche Oszillationstheorem"*, wonach es einen und nur einen positiven Wert λ_n gibt, für welchen die Gleichung (Ib) eine Lösung y besitzt, welche im Intervall $0 < x < x_2$ n-mal verschwindet und den Randbedingungen (IIb) genügt[12]). Folglich muß insbesondere λ_0 für alle Werte

---

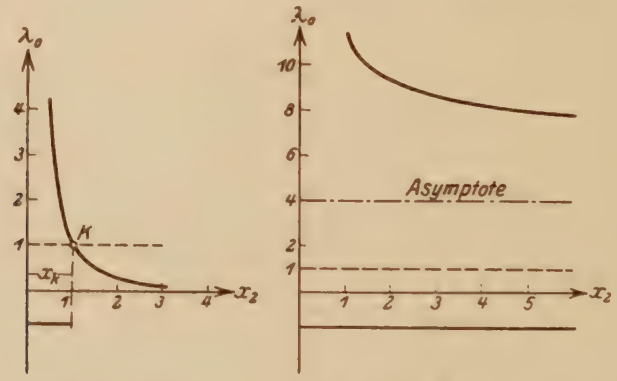
[10]) Hilbert, Integralgleichungen S. 45 u. 57.

[11]) J. Marty, Sur une equation intégrale, C. R. **150** (1910). — Siehe auch Hahn, Bericht S. 48, und Lalesco, Théorie des équations intégrales 1920, S. 80.

[12]) Sturm, Sur les équations differentielles. M. Bocher, The Theorems of Oscillation of Sturm and Klein, Bulletin of the American Mathematical Society 4 (1897/98), S. 295, Satz VIII.

$x_2 > 0$ existieren, und da die Kurve λ_0 mit wachsendem x_2 monoton abnimmt und keine singulären Stellen hat (S. 417), so hat sie für $x_2 > 0$ nur reguläre Punkte und für $x_2 = 0$ einen Pol. Sie hat daher das Aussehen einer der beiden in Fig. 6 wiedergegebenen Kurven. Aus Beispielen ergibt sich nämlich, daß für $x_2 \to \infty$ sowohl $\lambda_0 \to 0$ als auch gegen einen positiven Grenzwert gehen kann.

Um nun zu untersuchen, wann das Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei dem Problem (I), (II) und $B(x) \geqq 0$ konvergiert, tragen wir (s. Fig. 6) auf der λ-Achse die Strecke 1 ab und ziehen durch den



$y'' + \lambda \pi y = 0$ $\qquad$ $y'' + \dfrac{\lambda}{(4x + 0{,}04)^2} y = 0$

Fig. 6.

Endpunkt eine Parallele zur Abszissenachse. Diese möge die Kurve in dem Punkt K mit der Abszisse x_k schneiden (s. die linke Fig.). Ist nun $x_2 < x_k$, so ist $\lambda_0 > 1$; ist $x_2 > x_k$, so ist $\lambda_0 < 1$. Also konvergiert das Verfahren bei allen Anfangskurven, wenn $x_2 < x_k$ ist; es konvergiert nicht für alle Anfangskurven, wenn $x_2 > x_k$ ist. Der Fall $x_2 = x_k$ bedarf einer besonderen Untersuchung.

Nun ist aber x_k die Abszisse des konjugierten Punktes der Differentialgleichung $y'' + B(x) y = 0$. Folglich ergibt sich der Satz:

Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung konvergiert bei der Differentialgleichung (I) *und den Grenzbedingungen* (II) *für* $B(x) \geqq 0$, *wenn* $x_2 < a_1$ *ist, wo* a_1 *die Abszisse des konjugierten Punktes der Differentialgleichung* $y'' + B(x) y = 0$ *ist. Es konvergiert nicht, wenn* $x_2 > a_1$ *ist. Der Fall* $x_2 = a_1$ *bedarf einer besonderen Überlegung.*

Wenn für $x_2 \to \infty$ λ_0 gegen einen festen Wert geht, so braucht kein konjugierter Punkt vorhanden zu sein (s. die rechte Figur der Abb. 6). In diesem Falle konvergiert das Verfahren für jeden Punkt P_2.

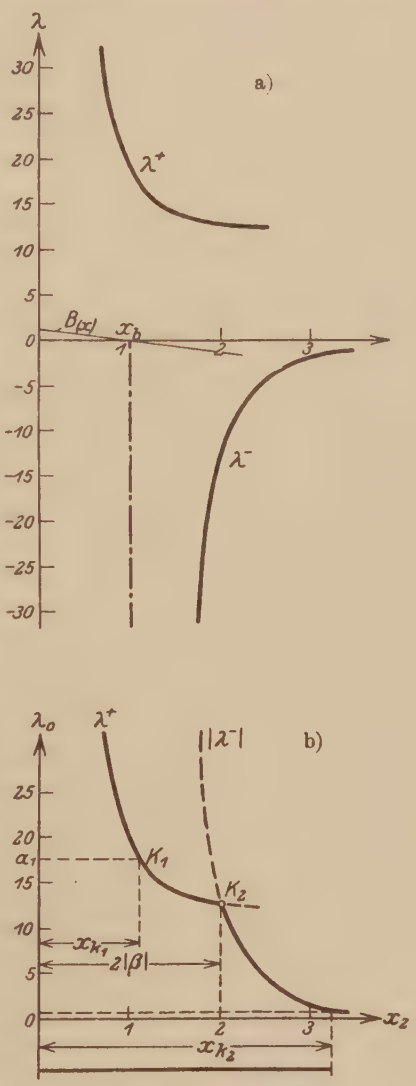
b) $B(x) \leqq 0$. Dieser Fall kann auf a zurückgeführt werden, indem man $B(x)$ mit $-B(x)$ und λ mit $-\lambda$ vertauscht, wobei sich die Differentialgleichung nicht ändert. Es sind nur negative Eigenwerte vorhanden, λ ist identisch mit $-\lambda$, und man hat daher in dem obigen Satze nur $B(x) \geqq 0$ durch $B(x) \leqq 0$ und $y'' + B(x)y = 0$ durch $y'' - B(x)y = 0$ zu ersetzen.

2. Polarer Fall. $B(x)$ hat im Intervall $(0, x_2)$ beide Zeichen.

Den kleinsten Wert x, für den $B(x)$ im offenen Intervall $(0, x_2)$ verschwindet, bezeichnen wir mit x_b.

a) $B(x)$ sei im Intervall $0 < x < x_b$ positiv. Dann gibt es für $x_2 < x_b$ nur positive Eigenwerte der Differentialgleichung (Ib) (S. 419). Ist aber $x_2 > x_b$, so folgt aus Hilberts Theorie der *polaren* Integralgleichung[13]), daß unendlich viele positive und unendlich viele negative Eisenwerte existieren. Die absolut kleinsten Eigenwerte liegen auf den Kurven λ^+ und $|\lambda^-|$; λ^+ und $|\lambda^-|$ nehmen mit wachsendem x_2 beständig ab (S. 418). λ^+ hat als einzige singuläre Stelle den Pol $\lambda = \infty$ für $x_2 = 0$ (S. 420). Ebenso schließen wir, daß λ^- als einzige singuläre Stelle den Pol $\lambda = -\infty$ für $x = x_b$ hat (s. Fig. 7).

Offenbar erhalten wir die gesuchten Werte λ_0, wenn wir in einem gemeinsamen Koordinatensystem λ und $|\lambda^-|$ als Ordinaten zu den Abszissen x_2 auftragen und den kleineren der beiden Werte bestimmen (s. Fig. 7b).



$y'' + \lambda(1-x)y = 0$

Fig. 7.

Da nun sowohl λ^+ als auch $|\lambda^-|$ mit wachsendem x_2 monoton abnehmen, so muß auch λ_0 monoton abnehmen, wenn x_2 wächst. Es ist möglich, daß sich die Kurven λ^+ und $|\lambda^-|$ schneiden, es kann aber auch

[13]) Hilbert, Integralgleichungen, S. 205.

$|\lambda^-|$ stets größer als λ^+ sein. Trägt man auf der λ-Achse die Strecke Eins bis zum Punkt a_1 ab, und zieht durch denselben eine Parallele zur Abszissenachse, welche die Kurve λ_0 zum erstenmal in einem Punkte K mit der Abszisse x_k trifft, so kann K auf einem Teil der Kurve λ_0 liegen, welcher mit der Kurve λ^+ identisch (Punkt K_1 in Fig. 7) oder auf einem Teil. welcher mit $|\lambda^-|$ identisch ist (Punkt K_2). Das Verfahren konvergiert wieder für alle Werte x_2, welche kleiner als x_k sind, und es ergibt sich daher der Satz:

Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung konvergiert bei der Differentialgleichung $y'' + B(x)y + C(x) = 0$ *und den Randbedingungen* $P_1(0, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, *wenn* $x_2 < x_k$ *ist, wo* x_k *die kleinere Abszisse der zu den Differentialgleichungen* $y'' \pm B(x)y = 0$ *gehörenden konjugierten Punkte ist. Es konvergiert nicht, wenn* $x_2 > x_k$ *ist. Der Fall* $x_2 = x_k$ *bedarf einer besonderen Überlegung.*

Bei dem vorstehenden Satze haben wir die Bedingung, welcher $B(x)$ im Falle 2a genügen muß, nicht erwähnt, weil der Satz ersichtlich auch im Falle (1a) und (1b) richtig ist. Ebenso ergibt sich, daß er auch dann noch gilt, wenn im Falle

b) $B(x)$ im Intervall $0 < x < x_b$ negativ ist. Man kann ja hier wieder auf den Fall 2a kommen, wenn man $B(x)$ durch $-B(x)$ und λ durch $-\lambda$ ersetzt. Der obige Satz gilt also für beliebiges $B(x)$.

III. Die Differentialgleichung $y'' + A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$.

Wir wenden uns nunmehr zur Behandlung des allgemeinen Problems:

Gegeben sei eine lineare, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(I) \qquad y'' + A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0.$$

Verlangt wird, mit Hilfe des Verfahrens der schrittweisen Verbesserung eine Lösung von (I) zu bestimmen, welche den Randbedingungen

$$(II) \qquad P_1(0, y_1), \quad P_2(x_2, y_2), \quad x_2 > 0$$

genügt. Wann konvergiert das Verfahren?

Nach unseren Untersuchungen (S. 414) haben wir die Eigenwerte des Problems

$$(Ib) \qquad y'' + \lambda A(x)y' + \lambda B(x)y = 0,$$

$$(IIb) \qquad P_1(0, 0), \quad P_2(x_2, 0)$$

zu betrachten. Für jeden Wert der Veränderlichen x_2 haben wir die Absolutwerte der zugehörigen Eigenwerte zu bilden und den kleinsten Absolutwert mit λ_0 zu bezeichnen. Das Verfahren konvergiert dann, wenn

$\lambda_0 > 1$ ist, es divergiert, wenn $\lambda_0 < 1$ ist. Der Fall $\lambda_0 = 1$ bedarf einer besonderen Überlegung (S. 415).

Da nun die Kurven λ in Abhängigkeit von x_2 nur Verzweigungsstellen als singuläre Stellen haben, solange λ endlich ist (S. 416) und λ_0 sich aus Stücken von ihnen zusammensetzt, so ist λ_0 eine stückweise analytische Funktion mit Unendlichkeitsstellen, wie in Fig. 8 angedeutet.

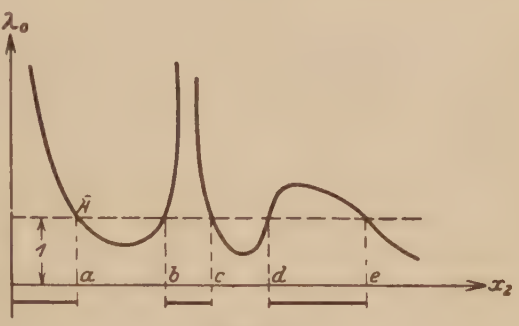


Fig. 8.

Um nun festzustellen, wann das Verfahren konvergiert, hat man die Gerade $\lambda_0 = 1$ zu ziehen. In unserem Beispiel konvergiert das Verfahren, wenn x_2 zwischen 0 und a, b und c, d und e liegt. Ist x_2 gleich einem der Werte a, b, c, d, e, so ist das Verhalten des Verfahrens ungewiß. In allen übrigen Fällen kann das Verfahren nicht konvergieren.

Daher gilt der Satz:

Das Verfahren der schrittweisen Verbesserung muß Problem (I), (II) *konvergieren, wenn $x_2 < a$ ist, worin a die kleinste Abszisse der zu den Differentialgleichungen der Form $y'' + e^{i\tau}(A(x)y' + B(x)y) = 0$ zugehörenden konjugierten Punkte ist.*

Haben wir so eine *untere* Grenze für den Konvergenzbereich ermittelt, so können wir auf Gund des nachstehenden Satzes eine *obere* Grenze angeben. Wir behaupten nämlich:

Damit das Verfahren der schrittweisen Verbesserung bei dem Problem (I), (II) *konvergiere, muß $x_2 < b$ sein, wo b die kleinere der beiden Abszissen bedeutet, welche die zu den Differentialgleichungen $y'' + A(x)y' + B(x)y = 0$ und $y'' - A(x)y' - B(x)y = 0$ gehörenden konjugierten Punkte haben.*

Der Satz läßt sich leicht beweisen. Nach Voraussetzung ist $\underline{\lambda_0}$ (S. 417) für $x_2 = b$ gleich Eins. Da nun aber $\underline{\lambda_0}$ mit wachsendem x_2 monoton abnimmt (Satz 8, S. 417), so gibt es für $x_2 > b$ stets reelle Eigenwerte, deren absoluter Betrag kleiner als Eins ist, und daher muß das Verfahren der schrittweisen Verbesserung divergieren, wenn $x_2 > b$ ist.

Wir werden nachweisen, daß es Differentialgleichungen vom Typ (I) gibt, für welche λ_0 mit wachsendem x_2 monoton abnimmt, trotzdem $A(x)$ nicht identisch Null ist. Ist λ_0 eine monoton abnehmende Funktion, so wollen wir die zugehörige Differentialgleichung zum *regulären Fall* zählen;

hat aber λ_0 als Funktion von x_2 Extremalwerte, soll die Differentialgleichung zum *irregulären Fall* gehören.

Augenscheinlich gilt der Satz:

Im regulären Fall ist der Konvergenzbereich zusammenhängend und wird durch diejenigen Werte x_2 bestimmt, welche kleiner als a sind, worin a die kleinste Abszisse der zu den Differentialgleichungen vom Typ $y'' + e^{i\tau}(A(x)y' + B(x)y) = 0$ gehörenden konjugierten Punkte ist.

Wir wollen diese einleitenden Betrachtungen mit dem Hinweis abschließen, daß die Differentialgleichung (Ib) $y'' + \lambda A(x)y' + \lambda B(x)y = 0$ ein ähnliches Aussehen hat wie die von Hilbert behandelte $y'' + A(x)y' + \lambda B(x)y = 0$. Im Laufe unserer Betrachtungen wird sich aber ergeben, daß die für die Hilbertsche Differentialgleichung bewiesenen Sätze, z. B. daß die Eigenwerte reell und ihre Anzahl ∞ ist, bei unserer Differentialgleichung (Ib) im allgemeinen nicht mehr gelten.

Ferner bemerken wir, daß man versuchen könnte, das allgemeine Problem dadurch auf den im zweiten Abschnitt behandelten Fall zurückzuführen, daß man in der gegebenen Differentialgleichung mit Hilfe einer Substitution das Glied mit y' beseitigt und auf die reduzierte Differentialgleichung das Verfahren der schrittweisen Verbesserung anwendet. Das ist natürlich möglich. Nur muß man sich darüber klar sein, daß die Näherungskurven und Konvergenzbereiche in beiden Fällen nicht übereinstimmen, so daß man dadurch die im Anfange dieses Abschnittes aufgeworfene Frage nicht einen Schritt vorwärts bringt.

Wir behandeln zunächst einige Fälle, in denen λ_0 mit wachsendem x_2 monoton abnimmt.

A. Regulärer Fall.

1. $B(x) = cA(x)^2 + \frac{1}{2}A'(x)$.

Setzt man in der Differentialgleichung

$$y'' + \lambda A(x)y' + \lambda B(x)y = 0, \tag{Ib}$$

$y = ze^{-\frac{\lambda}{2}\int A(x)\,dx}$, so geht sie in

$$z'' + \left(\lambda\left[B(x) - \frac{A'(x)}{2}\right] - \frac{\lambda^2}{4}A(x)^2\right)z = 0 \tag{1}$$

über.

Betrachtet man die zu (Ib) „adjungierte“ Differentialgleichung

$$y'' - \lambda A(x)y' + \lambda(B(x) - A'(x))y = 0 \tag{2}$$

und setzt $y = ze^{\frac{\lambda}{2}\int A(x)\,dx}$, so ergibt sich dieselbe Differentialgleichung (1).

Hieraus kann man schließen, daß für die Differentialgleichungen (Ib), (1), (2) bei den Randbedingungen

(II a) $$P_1(0,0), \quad P_2(x_2,0)$$

dieselben Eigenwerte vorhanden sind, da ja die Exponentialfunktion im Endlichen nicht verschwindet. An Stelle der gegebenen Differentialgleichung (Ib) kann man daher auch die Differentialgleichungen (1) oder (2) betrachten.

Ist nun $B(x) = cA(x)^2 + \frac{1}{2}A'(x)$, c eine beliebige Konstante, so ergibt sich aus (1), daß

(2a) $$z'' + \left(c\lambda - \frac{\lambda^2}{4}\right)A(x)^2 z = 0$$

ist. Setzen wir nun

(3) $$c\lambda - \frac{\lambda^2}{4} = l,$$

so wissen wir, daß die Differentialgleichung $z'' + lA(x)^2 z = 0$ nur reelle positive Eigenwerte l hat, welche monoton abnehmen, wenn x_2 wächst (Seite 420). Aus (3) folgt:

$$\lambda = 2(c \pm \sqrt{c^2 - l}).$$

Sind für einen gegebenen Wert von x_2 die Eigenwerte $l^+, l_1, \ldots, l_n$ $(l^+ < l_2 < \ldots < l_n)$ kleiner als c^2, so liefert l^+ mit $\lambda_1 = 2(c - \sqrt{c^2 - l^+})$ den kleinsten Eigenwert λ. Für die übrigen Werte l_ν $(\nu \geqq n+1)$ ist aber $l_\nu > c^2$, mithin $|\lambda_\nu| = 2\sqrt{l_\nu} > 2c$, mithin größer als λ_1. Wenn also für einen Wert x_2 $l_1^+ > c^2$ ist, so ist $\lambda_0 = 2(c - \sqrt{c^2 - l^+})$; ist aber $l^+ > c^2$, so wird λ stets komplex, $|\lambda| = 2\sqrt{l}$ und daher $\lambda_0 = 2\sqrt{l^+}$.

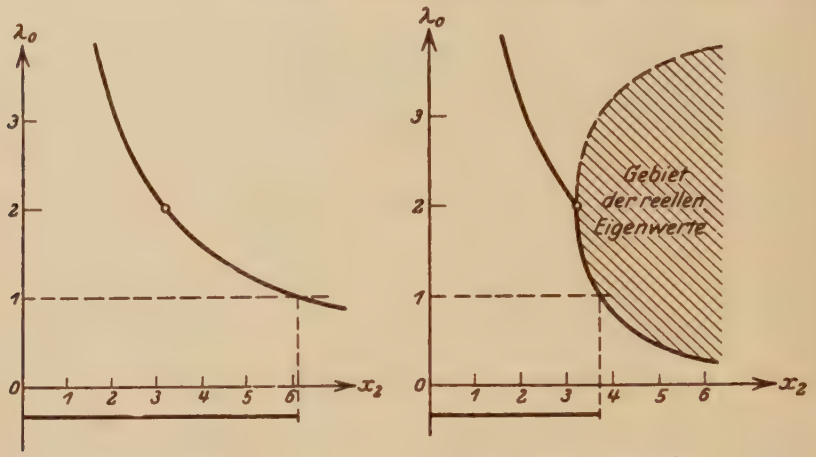
Es sind demnach zwei Fälle möglich:

a) l_1^+ ist bei beliebigem x_2 stets größer als c^2. Dann ist $\lambda_0 = 2\sqrt{l^+}$. Da nun l^+ monoton abnimmt, wenn x_2 wächst, so gilt das gleiche für λ_0.

b) Für $x_2 = a$ ist $l^+ = c^2$. Dann ist für $x_2 < a$ $\lambda_0 = 2\sqrt{l^+}$ und nimmt monoton bis auf den Wert $2c$ ab, wenn $x_2 = a$ erreicht ist. Für Werte $x_2 > a$ ist aber $\lambda_0 = 2(c - \sqrt{c^2 - l^+})$, woraus sich für $x_2 = a$ $\lambda_0 = 2c$, also derselbe Wert wie oben, ergibt. Da nun l^+ mit wachsendem x_2 monoton abnimmt, so muß auch für $x_2 > a$ λ_0 monoton abnehmen. Hiermit ist der Beweis erbracht, daß λ_0 stets abnimmt, wenn x_2 wächst. (Siehe Fig. 9.)

Im Falle a) existieren überhaupt keine reellen Eigenwerte. Im Falle b) gibt es zu jedem Werte $x_2 > a$ zwei reelle Eigenwerte $2(c + \sqrt{c^2 - l^+})$ und $2(c - \sqrt{c^2 - l^+})$. Alle übrigen reellen Eigenwerte liegen, da l^+ der kleinste positive Eigenwert l ist, innerhalb des durch die beiden Eigenwerte ge-

gebenen Intervalles, also im Innern des von den parabelähnlichen Kurven $\lambda = 2(c \pm \sqrt{c^2 - l^+})$ begrenzten, schraffierten Gebieten der Abbildung 9b



a) $y'' + \lambda y' = 0$. b) $y'' + \lambda y' + \lambda y = 0$.

Fig. 9.

Hieraus folgt, daß für jeden Wert x_2 die Anzahl der reellen Eigenwerte beschränkt sein muß, da die Eigenwerte l im Endlichen keine Häufungsstelle haben. Dies Ergebnis widerspricht dem bei der Differentialgleichung $y'' + \lambda B(x) y = 0$ geltenden Satz, daß die Anzahl der reellen Eigenwerte unendlich ist. Allerdings ist bei dem vorliegenden Beispiel die Anzahl *aller* Eigenwerte unendlich groß, da ja stets unendlich viele komplexe Eigenwerte vorhanden sind. Wir werden in 2. Beispiele betrachten, wo selbst dieser Satz nicht richtig ist, d. h. Differentialgleichungen vom Typ (I b), welche nur eine endliche Zahl von Eigenwerten haben.

Wir geben zum Fall a) das Beispiel

(I b) $\qquad y'' + \lambda y' = 0, \qquad A(x) = 1, \quad B(x) = 0, \quad c = 0.$

Hier wird $z'' - \frac{\lambda^2}{4} z = 0$ (2a), also mit $l = -\frac{\lambda^2}{4}$ und $l^+ = \frac{\pi^2}{x_2^2}$ $\lambda_0 = 2\sqrt{l^+} = \frac{2\pi}{x_2}$ (Fig. 9a).

Zum Fall b) untersuchen wir

$$y'' + \lambda y' + \lambda y = 0, \qquad A(x) = 1, \quad B(x) = 1, \quad c = 1.$$

Hier wird $z'' + \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{4}\right) z = 0$, also mit $l = \lambda - \frac{\lambda^2}{4}$, $z'' + lz = 0$, $l^+ = \frac{\pi^2}{x_2^2}$ wie im ersten Beispiel. Hier wird aber $l^+ = c^2$ für $x_2 = a = \pi$ (Fall b). Also ist für $x_2 \leqq a$: $\lambda_0 = \frac{2\pi}{x_2}$, für $x_2 \geqq a$: $\lambda_0 = 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{x_2^2}}\right)$. Für $x_2 = a$ wird $\lambda_0 = 2$. (Siehe Fig. 9b.)

2. *$y(x, \lambda)$ ist ein Polynom in λ.* Wir betrachten diejenige Lösung unserer Differentialgleichung

$$y'' + \lambda A(x) y' + \lambda B(x) y = 0, \tag{Ib}$$

welche an der Stelle $x = 0$ den Anfangsbedingungen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 1$$

genügt. Dieselbe ist eine ganze Funktion in λ (Seite 415) und daher nach steigenden Potenzen von λ entwickelbar. Wir wollen nun versuchen, ob es möglich ist, $A(x)$ und $B(x)$ so zu bestimmen, daß $y(x, \lambda)$ ein Polynom n-ten Grades in λ wird und das Verhalten der zugehörigen Eigenwerte, welche den Randbedingungen

$$P_1(0, 0), \quad P_2(x_2, 0) \tag{IIb}$$

genügen, in Abhängigkeit von dem veränderlichen x_2 studieren. Zu diesem Zweck machen wir den Ansatz

$$\left\{\begin{array}{l} y(x, \lambda) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\lambda + \varphi_2(x)\lambda^2 + \ldots + \varphi_n(x)\lambda^n, \\ \text{woraus sich} \\ y'(x, \lambda) = \varphi_0'(x) + \varphi_1'(x)\lambda + \varphi_2'(x)\lambda^2 + \ldots + \varphi_n'(x)\lambda^n, \\ y''(x, \lambda = \varphi_0''(x) + \varphi_1''(x)\lambda + \varphi_2''(x)\lambda^2 + \ldots + \varphi_n''(x)\lambda^n \end{array}\right. \tag{1}$$

ergibt. Die Akzente bedeuten hier überall die Ableitungen nach x allein. Da $A(x)$ und $B(x)$ nach Annahme für reelle Werte von x, welche größer als 0 sind, regulär sind (Seite 415), so sind dies auch alle Funktionen φ, φ' und φ''. Setzt man für y, y' und y'' die Reihen (1) in (Ib) ein, so folgt durch Vergleichen der Koeffizienten gleicher Potenzen von λ das System von Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi_0''(x) = 0, & & \\ \varphi_1''(x) + A(x)\varphi_0'(x) & + B(x)\varphi_0(x) & = 0, \\ \varphi_2''(x) + A(x)\varphi_1'(x) & + B(x)\varphi_1(x) & = 0, \\ \varphi_3''(x) + A(x)\varphi_2'(x) & + B(x)\varphi_2(x) & = 0, \\ \vdots & & \\ \varphi_n''(x) + A(x)\varphi_{n-1}'(x) & + B(x)\varphi_{n-1}(x) & = 0, \\ A(x)\varphi_n'(x) & + B(x)\varphi_n(x) & = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Da nun für $x = 0$ und beliebiges λ $y(x, \lambda) = 0$, $y'(x, \lambda) = 1$ ist, so muß $\varphi_0(0) = 0$, $\varphi_0'(0) = 1$ sein und aus der ersten Gleichung (2) folgt daher $\varphi_0(x) = x$, $\varphi_0'(x) = 1$. Ferner ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ $\varphi_\nu(0) = \varphi_\nu'(0) = 0$.

Aus der letzten Gleichung (2) folgt $B(x) = \dfrac{-A(x)\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}$, oder indem man diesen Wert für $B(x)$ in die übrigen Gleichungen (2) einsetzt:

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi_1''(x)+A(x)\left[1-\dfrac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\cdot x\right]=0, \\ \varphi_2''(x)+A(x)\left[\varphi_1'(x)-\dfrac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\varphi_1(x)\right]=0, \\ \varphi_3''(x)+A(x)\left[\varphi_2'(x)-\dfrac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\varphi_1(x)\right]=0, \\ \vdots \\ \varphi_n''(x)+A(x)\left[\varphi_{n-1}'(x)-\dfrac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\varphi_{n-1}(x)\right]=0. \end{cases}$$

Daher ist

$$(4)\quad \begin{cases} -A(x)=\dfrac{\varphi_1''(x)\cdot\varphi_n(x)}{\varphi_n(x)-\varphi_n'(x)\cdot x}=\dfrac{\varphi_2''(x)\cdot\varphi_n(x)}{\varphi_n'(x)\varphi_1'(x)-\varphi_n'(x)\varphi_1(x)} \\ =\dfrac{\varphi_3''(x)\cdot\varphi_n(x)}{\varphi_n(x)\varphi_2'(x)-\varphi_n'(x)\varphi_2(x)}=\ldots=\dfrac{\varphi_n''(x)\cdot\varphi_n(x)}{\varphi_n(x)\varphi_{n-1}'(x)-\varphi_n'(x)\varphi_{n-1}(x)}. \end{cases}$$

Da nun aber für einen alle $x>0$ ganz im Innern einschließenden Bereich alle φ_ν, φ_ν' und φ_ν'' reguläre Funktionen von x sind, so lassen sie sich für genügend kleine Werte von x nach steigenden Potenzen von x entwickeln, und man kann daher, indem man nur die Anfangsglieder der Entwicklungen berücksichtigt:

$$(5)\quad \varphi_1(x)=a_1x^{\alpha_1+1}+\ldots;\ \varphi_2(x)=a_2x^{\alpha_2+1}+\ldots;\ \ \ldots;\ \ \varphi_n(x)=a_nx^{\alpha_n+1}$$

setzen. Hierin sind die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verschieden von Null und alle α_ν $(\nu=1, 2, \ldots)$ natürliche Zahlen, da $\varphi_\nu(0)=\varphi_\nu'(0)=0$ ist. Daher lauten die Entwicklungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi_1'(x)=a_1(\alpha_1+1)x^{\alpha_1}+\ldots; \quad \varphi_2'(x)=a_2(\alpha_2+1)x^{\alpha_2}+\ldots; \\ \qquad\qquad \varphi_n'(x)=a_n(\alpha_n+1)x^{\alpha_n}; \\ \varphi_1''(x)=a_1(\alpha_1+1)\alpha_1x^{\alpha_1-1}+\ldots; \quad \varphi_2''(x)=a_2(\alpha_2+1)\alpha_2x^{\alpha_2-1}+\ldots; \\ \qquad\qquad \varphi_n''(x)=a_n(\alpha_{n+1})\alpha_nx^{\alpha_n-1}. \end{cases}$$

Setzt man (5) und (6) in (4) ein, so wird

$$(7)\quad \begin{cases} A(x)=\dfrac{a_1(\alpha_1+1)\alpha_1x^{\alpha_1+\alpha_n}+\ldots}{\alpha_nx^{\alpha_n+1}+\ldots} \\ =\dfrac{a_2(\alpha_2+1)\alpha_2x^{\alpha_2+\alpha_n}+\ldots}{a_1(\alpha_n-\alpha_1)x^{\alpha_1+\alpha_n+1}+\ldots}=\ldots=\dfrac{a_n(\alpha_n+1)\alpha_nx^{2\alpha_n}+\ldots}{a_{n-1}(\alpha_n-\alpha_{n-1})x^{\alpha_n-1+\alpha_n+1}}. \end{cases}$$

Da nun $A(x)$ regulär sein soll, ergeben sich aus (7) die Potenzreihen

$$(8)\quad \begin{cases} A(x)=\dfrac{a_1(\alpha_1+1)\alpha_1}{\alpha_n}x^{\alpha_1-1}+\ldots \\ =\dfrac{a_2(\alpha_2+1)\alpha_2}{a_1(\alpha_n-\alpha_1)}x^{\alpha_2-\alpha_1-1}=\ldots=\dfrac{a_n(\alpha_n+1)\alpha_n}{a_{n-1}(\alpha_n-\alpha_{n-1})}x^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-1}. \end{cases}$$

Es kann nämlich nicht $\alpha_\nu=\alpha_n$ sein $(\nu=1, 2, \ldots, n-1)$. Entwickelt man nämlich den Zähler und Nenner von $-A(x)=\dfrac{\varphi_\nu''(x)\varphi_n(x)}{\varphi_n(x)\varphi_{\nu-1}'(x)-\varphi_n'(x)\varphi_{\nu-1}(x)}$

nach steigenden Potenzen von x, so ist gemäß (5) und (6) der kleinste Exponent des Zählers $\alpha_\nu - 1 + \alpha_n$, des Nenners $\alpha_n + \alpha_{\nu-1}$ oder größer. Da nun $A(x)$ für positiv reelle Werte von x regulär sein soll, so muß

$$\alpha_n + \alpha_{\nu-1} \leqq \alpha_\nu - 1 + \alpha_n$$

oder

$$\alpha_{\nu-1} \leqq \alpha_\nu - 1$$

sein. Folglich ist

$$\alpha_1 - 1 = \alpha_2 - \alpha_1 - 1 = \alpha_3 - \alpha_2 - 1 = \ldots = \alpha_n - \alpha_{n-1} - 1$$

oder

$$\alpha_2 = 2\,\alpha_1,\ \alpha_3 = 3\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n = n\alpha_1. \tag{9}$$

Da nun auch die Koeffizienten von (8) einander gleich sein müssen, so folgt unter Berücksichtigung von (9)

$$\frac{a_1(\alpha_1+1)\,\alpha_1}{n\alpha_1} = \frac{a_2(2\alpha_1+1)\,2\alpha_1}{a_1(n-1)\,\alpha_1} = \frac{a_3(3\alpha_1+1)\,3\alpha_1}{a_2(n-2)\,\alpha_1} = \ldots = \frac{a_n(n\alpha_1+1)\,n\alpha_1}{a_{n-1}\cdot 1\cdot\alpha_1};$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1^2(\alpha_1+1)(n-1)}{2(2\alpha_1+1)n}, \quad a_3 = \frac{a_1^3(\alpha_1+1)^2(n-1)(n-2)}{(2\alpha_1+1)\cdot(3\alpha_1+1)\,2\cdot 3\cdot n^2}, \\ a_4 &= \frac{a_1^4(\alpha_1+1)^3(n-1)(n-2)(n-3)}{(2\alpha_1+1)(3\alpha_1+1)(4\alpha_1+1)\,2\cdot 3\cdot 4\cdot n^3}, \ldots, \\ a_n &= \frac{a_1^n(\alpha_1+1)^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 1}{(2\alpha_1+1)(3\alpha_1+1)\ldots(n\alpha_1+1)\,2\cdot 3\ldots n\cdot n^{n-1}}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Lautet also die Entwicklung von $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x) = a x^{\alpha+1} + \ldots,$$

so lauten die Entwicklungen

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \frac{a^2(\alpha+1)(n-1)}{(2\alpha+1)\,2\cdot n}\,x^{2\alpha+1} + \ldots, \\ \varphi_3(x) &= \frac{a^3(\alpha+1)^2(n-1)(n-2)}{(2\alpha+1)(3\alpha+1)\,2\cdot 3\cdot n^2}\,x^{3\alpha+1} + \ldots, \\ \varphi_4(x) &= \frac{a^4(\alpha+1)^3(n-1)(n-2)(n-3)}{(2\alpha+1)(3\alpha+1)(4\alpha+1)\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n^3}\,x^{4\alpha+1} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) &= \frac{a^n(\alpha+1)^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 1}{(2\alpha+1)(3\alpha+1)\ldots(n\alpha+1)\,2\cdot 3\ \ldots\ n\cdot n^{n-1}}\,x^{n\alpha+1} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Aus (8) folgt

$$A(x) = \frac{a(\alpha+1)}{n}\,x^{\alpha-1} + \ldots,$$

und weil $B(x) = -\dfrac{A(x)\,\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}$ ist:

$$B(x) = -\frac{a(\alpha+1)(n\alpha+1)}{n}\,x^{\alpha-2} + \ldots.$$

Aus der letzten Beziehung folgt, daß $\alpha \geqq 2$ sein muß.

Als Eigenwerte bezeichnen wir nun diejenigen Werte x, für welche bei gegebenem x_2 (Ib) und (IIb) erfüllt sind.

Nun genügt aber

$$(1) \qquad y(x, \lambda) = x + \varphi_1(x)\lambda + \varphi_2(x)\lambda^2 + \ldots + \varphi_n(x)\lambda^n$$

sowohl der Differentialgleichung (Ib) als auch der ersten Randbedingung (IIb). Als Bedingungsgleichung für die Eigenwerte ergibt sich daher

$$(III) \qquad x_2 + \varphi_1(x_2)\lambda + \varphi_2(x_2)\lambda^2 + \ldots + \varphi_n(x_2)\lambda^n = 0.$$

Hier hat man für $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die in (11) gegebenen Entwicklungen einzusetzen.

Wir behandeln zunächst den besonderen Fall, daß

$$(A) \qquad A(x) = \frac{a(\alpha+1)}{n} x^{\alpha-1}, \qquad B(x) = \frac{-a(\alpha+1)(n\alpha+1)}{n} x^{\alpha-2}$$

ist. Dann folgt aus unseren Betrachtungen:

$$\varphi_1(x) = a x^{\alpha+1}; \qquad \varphi_2(x) = \frac{a^2(\alpha+1)(n-1)}{(2\alpha+1)2 \cdot n} x^{2\alpha+1} \quad \text{usw.} \qquad (\text{siehe (11)}).$$

Setzen wir nun

$$(B) \qquad \frac{\lambda a(\alpha+1) x_2^{\alpha}}{n} = u,$$

so geht die Bedingungsgleichung (III), indem man durch x_2 dividiert, über in

$$(C_1) \quad \begin{cases} 1 + \binom{n}{1}\frac{u}{\alpha+1} + \binom{n}{2}\frac{u^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)} + \binom{n}{3}\frac{u^3}{(\alpha+1)(2\alpha+1)(3\alpha+1)} + \ldots \\ \qquad + \binom{n}{n}\frac{u^n}{(\alpha+1)(2\alpha+1 \ldots (n\alpha+1)} = 0, \end{cases}$$

oder mit $\beta = \frac{1}{\alpha}$ und $z = u \cdot \beta$

$$(C) \quad \begin{cases} g(n, \beta) \equiv z^n + \binom{n}{1}(\beta+n) z^{n-1} + \binom{n}{2}(\beta+n)(\beta+n-1) z^{n-2} + \ldots \\ \qquad + \binom{n}{1}(\beta+n) \ldots (\beta+2) z + (\beta+n) \ldots (\beta+1) = 0. \end{cases}$$

Wir wollen nun nachweisen, daß die Gleichung

$$g(n, \beta) = 0$$

n reelle negative, verschiedene Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ hat. Zu diesem Zweck benutzen wir den bekannten Sturmschen Satz:[14])

---

[14]) C. Runge, Praxis der Gleichungen, 1921, § 22.

Man wendet auf g und g' (die Akzente bedeuten die Ableitungen nach z allein) das Verfahren des gemeinsamen Teiles an, bildet also

$$g = q_1 g' - r_1,$$

wobei r_1 von niedrigerem Grade in z als g' sein soll. Ebenso verfährt man mit g' und r_1:

$$g' = q_2 r_1 - r_2,$$

wobei wieder r_2 von niedrigerem Grade in z als r_1 sein soll. Fährt man so fort, so erhält man eine Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned} r_1 &= q_3 r_2 - r_3, \\ r_2 &= q_4 r_3 - r_4, \\ &\vdots \\ r_{\nu-2} &= q_\nu r_{\nu-1} - r_\nu. \end{aligned}$$

Sind g und g' teilerfremd, d. h. hat $g = 0$ nur einfache Wurzeln, was wir voraussetzen wollen, so muß der letzte Rest r einen von z unabhängigen, von Null verschiedenen Wert besitzen, und umgekehrt: hat r diese Eigenschaft, so besitzt $g = 0$ nur einfache Wurzeln. In diesem Falle gilt der Satz:

„Um zu erfahren, wieviel reelle Wurzeln zwischen $z = a$ und $z = b$ liegen, hat man nur die Anzahl der Zeichenwechsel von

$$g g' r_1 r_2 \ldots r$$

für $z = a$ und $z = b$ zu bestimmen. Die Differenz dieser beiden Werte ist gleich der Anzahl der reellen Wurzeln zwischen $z = a$ und $z = b$."

Wir gehen nun dazu über, die Werte $g' r_1 r_2 \ldots$ zu bestimmen.

Aus (C) folgt durch Differentiation nach z

$$g'(n, \beta) = n\, g(n-1, \beta+1).$$

Zieht man von $g'(n, \beta) \cdot \frac{z+\beta+n}{n}\ g(n, \beta)$ ab, so folgt als Resultat:

$$r_1 = (\beta+n)(n-1) g(n-2, \beta+1).$$

Um die folgenden Werte zu berechnen, benutzt man die Formel:

(D)
$$\begin{aligned} &g(n, \beta+1) \\ &= (z+2n+\beta)\, g(n-1, \beta+1) - (n-1)(\beta+n)\, g(n-2, \beta+1, \end{aligned}$$

deren Richtigkeit man für alle Werte n, β durch Einsetzen der Reihen für $g(n, \beta+1)$, $g(n-1, \beta+1)$ und $g(n-2, \beta+1)$ gemäß Formel (C) nachweist.

Setzt man in (D) für n $n-2$, so folgt

$$r_3 = (\beta+n)(\beta+n-2)(n-1)(n-3)\, g(n-4, \beta+1) \text{ usw.}$$

Ganz allgemein wird für jedes r mit geradem Index

$$r_{2\nu} = n(n-2)\dots(n-2\nu)(\beta+n-1)(\beta+n-3)\dots \\ (\beta+n-[2\nu-1])g(n-[2\nu+1],\beta+1),$$

mit ungeradem Index

$$r_{2\nu+1} = (n-1)(n-3)\dots(n-[2\nu+1])(\beta+n)(\beta+n-2)\dots \\ (\beta+n-2\nu)g(n-[2\nu+2],\beta+1).$$

Ist $n = 2m$ gerade, so wird schließlich:

$$r_{n-2} = r_{2(m-1)} = 2m\cdot(2m-2)\dots 2(\beta+2m-1)(\beta+2m-3)\dots \\ (\beta+3)g(1,\beta+1).$$

Ist $n = 2m+1$ ungerade, so wird schließlich:

$$r_{n-2} = r_{2(m-1)+1} = 2m\cdot(2m-2)\dots 2(\beta+2m+1)(\beta+2m-1)\dots \\ (\beta+3)g(1,\beta+1).$$

Aus der Rekursionstafel (D) folgt ferner für $n=2$, $\beta = \beta-1$

$$g(2,\beta) = (z+\beta+3)g(1,\beta) - (\beta+1)g(0,\beta).$$

Da

$$g(2,\beta) = z^2 + 2(\beta+2)z + (\beta+2)(\beta+1),$$
$$g(1,\beta) = z + (\beta+1)$$

ist, so wird

$$(\beta+1)g(0,\beta) = (z+\beta+3)(z+\beta+1) \\ -[z^2+2(\beta+2)z+(\beta+2)(\beta+1)] = \beta+1.$$

Folglich ist $g(0,\beta) = 1$.

Es wird also für

$n = 2m$:

$$r_{n-1} = (2m-1)(2m-3)\dots(1)\cdot(\beta+2m)(\beta+2m-2)\dots(\beta+2),$$

$n = 2m+1$:

$$r_{n-1} = (2m+1)(2m-1)\dots(1)\cdot(\beta+2m)(\beta+2m-2)\dots(\beta+2)$$

konstant und verschieden von Null, woraus zu ersehen ist, daß $g(n,\beta) = 0$ nur einfache Wurzeln besitzt und daher der oben ausgesprochene Satz gilt.

Um ihn anzuwenden, beachte man, daß nach obigen Formeln

$$g, g', r_1, r_2, \dots, r_{n-2}, r_{n-1}$$

Polynome in z vom Grade

$$n, n-1, n-2, n-3, \dots, 1, 0$$

mit positiven Koeffizienten sind. Für $z \to -\infty$ wechselt also das Vorzeichen in der obigen Reihe beständig, wir haben n Zeichenwechsel;

für $z = 0$ ist das Vorzeichen stets positiv. Dagegen liegen zwischen $z = 0$ und $z = -\infty$ n reelle verschiedene Wurzeln der Gleichung $g(n, \beta) = 0$; was zu zeigen war.

Bezeichnet man dieselben mit

$$z_1, z_2, \ldots, z_n,$$

so folgt aus (B) und $u = z\alpha$, daß

$$\lambda_\nu = \frac{C_\nu}{x_2^\alpha} \text{ ist} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

worin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ n verschiedene Konstanten sind.

Bezeichnet man nun mit C den kleinsten Wert von $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_n|$, so wird gemäß Definition $\lambda_0 = \frac{C}{x_2^\alpha}$, worin α eine natürliche Zahl $\geqq 2$ ist.

In dem speziellen Fall (A) *nimmt also* λ_0 *monoton ab, wenn* x_2 *wächst. Ferner gibt es zu jedem Wert* x_2 n *reelle, negative Eigenwerte* λ.

Wir wollen nun zeigen, daß diese Sätze ganz allgemein gelten, falls nur $y(x, \lambda)$ ein Polynom n-ten Grades in λ ist.

Zu diesem Zwecke schreiben wir die Formeln (11)

$$\varphi_1(x) = a x^{\alpha+1} + P_1(x) x^{\alpha+2};$$

$$\varphi_2(x) = \frac{a^2(\alpha+1)(n-1)}{(2\alpha+1)2n} x^{2\alpha+1} + P_2(x) x^{2\alpha+2} \text{ usw.}$$

Dann folgt aus (III), wenn man durch x_2 dividiert:

$$1 + (a x_2^\alpha + P_1(x_2) x_2^{\alpha+2})\lambda + \left(\frac{a^2(\alpha+1)(n-1)}{(2\alpha+1)2n} x_2^{2\alpha} + P_2(x_2) x_2^{2\alpha+1}\right)\lambda^2 + \ldots + \lambda^n = 0.$$

Setzt man nun in die linke Seite dieser Gleichung an Stelle von λ einen der oben definierten Werte $\frac{C_\nu}{x_2^\alpha}$ ein, so wird dieselbe nicht Null, sondern gleich

$$C_\nu \cdot P_1(x_2) x_2 + C_\nu^2 P_2(x_2) x_2^2 + \ldots + C_\nu^n P_n(x_2) x_2^n,$$

da ja die λ_ν der Gleichung

$$1 + a x_2^\alpha \lambda + \frac{a^2(\alpha+1)(n-1)}{(2\alpha+1)2n} x_2^{2\alpha} \lambda^2 + \ldots + \lambda^n = 0$$

genügen. Der Ausdruck kann aber durch Wahl genügend kleiner Werte von x_2 beliebig klein gemacht werden. Daher ergibt sich der Satz, daß die n Werte $\lambda_I, \lambda_{II}, \ldots, \lambda_N$, welche Lösungen von $y(x_2, \lambda) = 0$ sind, für genügend kleine Werte von x_2 in der Nähe der oben definierten Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ liegen müssen und daher insbesondere reell, negativ und verschieden voneinander sind. Für $x_2 \to 0$ gehen sie alle gegen $-\infty$.

Daher können nach unseren Betrachtungen (S. 416) die Kurven λ_I, $\lambda_{II}, \ldots, \lambda_N$ keine Verzweigungsstellen besitzen und sind daher stets reell. Da nun für kleine Werte x_2 $\frac{d|\lambda|}{dx_2}$ negativ ist und $\frac{d\lambda}{dx_2}$ nie Null werden kann (S. 415), so muß $\frac{d|\lambda|}{dx_2}$ dauernd negativ bleiben und es ergibt sich daher der Satz:

Ist $y(x, \lambda)$ ein Polynom n-ten Grades in λ, so existieren zu jedem Werte x_2 n reelle, negative Eigenwerte λ, welche verschieden voneinander sind und dem absoluten Werte nach mit wachsendem x_2 monoton abnehmen. Daher nimmt auch λ_0, welches dem absoluten Werte nach mit einer der λ-Kurven übereinstimmt, monoton ab, wenn x_2 wächst.

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung von Differentialgleichungen, bei denen λ_0 nicht beständig abnimmt, wenn x_2 wächst. In diesem Fall besteht die Möglichkeit, daß (entsprechend Fig. 8) der Konvergenzbereich nicht mehr zusammenhängt und das Verfahren der schrittweisen Verbesserung, wenn man x_2 größer und größer werden läßt, zunächst konvergiert, dann divergiert — so verhielten sich ja alle bisher behandelten Differentialgleichungen —, daß aber, wenn man x_2 noch größer wählt, das Verfahren wieder zu konvergieren beginnt. Es ist nun sehr schwierig, hierfür Beispiele anzugeben, doch ist es mir gelungen, nachzuweisen, daß dieser *irreguläre Fall* stets bei der Differentialgleichung $y'' + \lambda A(x) y' = 0$ eintreten kann, wenn $\int A(x)\,dx$ periodisch ist. In diesem Falle kann der Konvergenzbereich aus unendlich vielen getrennten Bereichen bestehen.

B. *Irregulärer Fall.*

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(\mathrm{I}^*) \qquad y'' + A(x) y' = 0$$

mit den Randbedingungen

$$(\mathrm{II}^*) \qquad P_1(0, y_1), \quad P_2(x_2, y_2).$$

Nach S. 414 haben wir die Eigenwerte

$$(\mathrm{Ib}^*)\ (\mathrm{IIb}^*) \quad y'' + \lambda A(x) y' = 0; \quad P_1(0, 0), \quad P_2(x_2, 0)$$

bei veränderlichem x_2 näher zu untersuchen.

Diejenige Lösung der Differentialgleichung (Ib^*), für welche an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$ ist, läßt sich in geschlossener Form angeben; es ist

$$y(x, \lambda) = \int_0^x e^{-\lambda \int_0^x A(x)\,dx}\,dx.$$

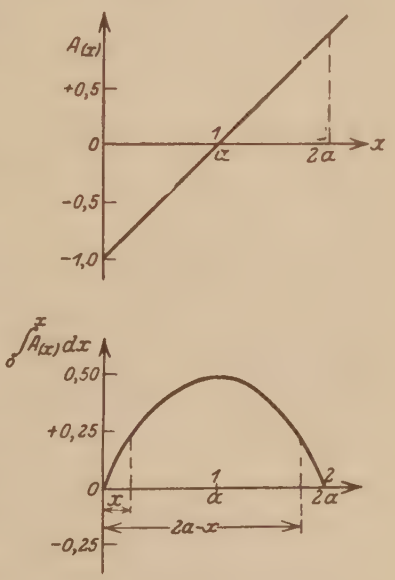
Sie genügt bereits der ersten der beiden Randbedingungen (IIb^*). Die Eigenwerte des Problems sind also dadurch gekennzeichnet, daß $y(x, \lambda)$

auch für $x = x_2$ verschwinden muß, genügen also der Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \int_0^{x_2} e^{-\lambda \int_0^x A(x)\,dx}\,dx = 0.$$

Die Gleichung gibt also die Beziehung an, welche zwischen den Eigenwerten λ und der zugehörigen Abszisse x_2 des veränderlichen Punktes P_2 besteht.

Wir schließen nun folgendermaßen: Wenn $A(x)$ so gewählt wird, daß für $0 \leqq x \leqq a$ $\int_0^x A(x)\,dx = \int_0^{2a-x} A(x)\,dx$ ist, so hat für $x_2 = a$ und $x_2 = 2a$ die Gleichung (A) dieselben Eigenwerte λ (s. Fig. 10). Es hat nämlich an den Stellen x und $2a - x$ $e^{-\lambda \int_0^x A(x)\,dx}$ denselben Wert und folglich ist $\int_0^{2a} e^{-\lambda \int_0^a A(x)\,dx}\,dx = 2 \int_0^a e^{-\lambda \int_0^x A(x)\,dx}\,dx$. Ist nun λ' ein Eigenwert, welcher zu $x_2 = 2a$ gehört, so verschwindet die linke Seite für $\lambda = \lambda'$; folglich muß auch die rechte Seite für $\lambda = \lambda'$ Null werden, d. h. λ' ist auch ein Eigenwert für $x_2 = a$. Ist aber $\lambda = \lambda''$ ein Eigenwert für $x_2 = a$, also für $\lambda = \lambda''$ die rechte Seite Null, so muß auch die linke verschwinden, d. h. λ'' ist ein Eigenwert für $x_2 = 2a$. Da mithin für $x_2 = a$ und $x_2 = 2a$ dieselben Eigenwerte λ vorhanden sind, so müssen auch die Werte λ_0 übereinstimmen, und folglich nimmt unsere Kurve λ_0 für $x_2 = a$ und $x_2 = 2a$ denselben Wert an. Da nun unsere Kurve λ_0 eine eindeutige, stetige Funktion von x_2 ist, solange λ_0 existiert, d. h. überhaupt Eigenwerte λ vorhanden sind, so muß λ_0 zwischen $x_2 = 0$ und $x_2 = 2a$ ein Extremum haben und daher muß der in Fig. 8 angedeutete Ausnahmefall eintreten, wenn man an Stelle von $A(x)$ $cA(x)$ setzt, — wobei ja die Richtigkeit der vorstehenden Betrachtungen bestehen bleibt — und nun die Konstante c so wählt, daß die Gerade $\lambda_0 = 1$ die Kurve λ_0 zwischen $x_2 = 0$ und $x_2 = 2a$ mindestens zweimal schneidet.



$A(x) = x - 1$

Fig. 10.

Ist insbesondere

(B) $\int_0^x A(x)\,dx$ periodisch von der Periode 2π,

so müssen für $x_2 = \pi, 2\pi, \ldots$ usw. dieselben Werte λ_0 vorhanden sein und durch entsprechende Wahl der Konstanten c kann man stets erreichen, daß die Gerade $\lambda_0 = 1$ die Kurve λ_0 in unendlich vielen Punkten treffen muß. In diesem Fall ebesteht der Konvergenzbereich des Verfahrens aus unendlich vielen getrennten Bereichen, es gibt, wenn man x_2 ständig wachsen läßt, unendlich viele Intervalle, in denen das Verfahren abwechselnd konvergiert und divergiert.

Bei den vorstehenden Betrachtungen ist die Annahme gemacht worden, daß für die Punkte x_2, welchen derselbe Wert λ_0 zugeordnet sein soll, λ_0 wirklich existiert. Aus diesem Grunde soll hier ein Beispiel näher untersucht werden, bei welchem $\int A(x)\,dx$ periodisch ist und bei welchem man für $x_2 = \pi, 2\pi, \ldots$ die Eigenwerte mit Hilfe bekannter Funktionen angeben kann.

Setzt man

$$A(x) = \sin x, \quad \text{mithin} \quad \int_0^x A(x)\,dx = 1 - \cos x,$$

so wird gemäß (A) $\int_0^{x_2} e^{\lambda(\cos x - 1)}\,dx = 0$, mithin auch

(C) $$\int_0^{x_2} e^{\lambda \cos x}\,dx = 0.$$

Da $\cos x$ die Periode 2π hat, so sind für

$$x_2 = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

dieselben Eigenwerte λ und derselbe Wert λ_0 vorhanden.

Um nun die Eigenwerte für $x_2 = \pi$ zu berechnen, setzen wir

$$\lambda = iz$$

und es muß daher $\int_0^{\pi} e^{\lambda \cos x}\,dx = \int_0^{\pi} e^{iz \cos x}\,dx$ sein. Nun ist aber $\int_0^{\pi} e^{iz \cos x}\,dx = \pi J_0(z)$, wo $J_0(z)$ die Besselsche Funktion erster Art nullter Ordnung ist. Es hat aber $J_0(z)$ nur reelle Nullstellen, und zwar sind die kleinsten von ihnen

$$\pm z = 2{,}4048, \quad 5{,}5201, \quad 8{,}6537 \quad \text{usw.}$$

(Siehe Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, B. G. Teubner 1923, S. 122.)

Folglich sind für $x_2 = \pi$ die Eigenwerte

$$\lambda = \pm 2{,}4048\,i, \quad \pm 5{,}5201\,i, \quad \pm 8{,}6537\,i \quad \text{usw.}$$

vorhanden und es ist

$$\lambda_0 = 2{,}4048.$$

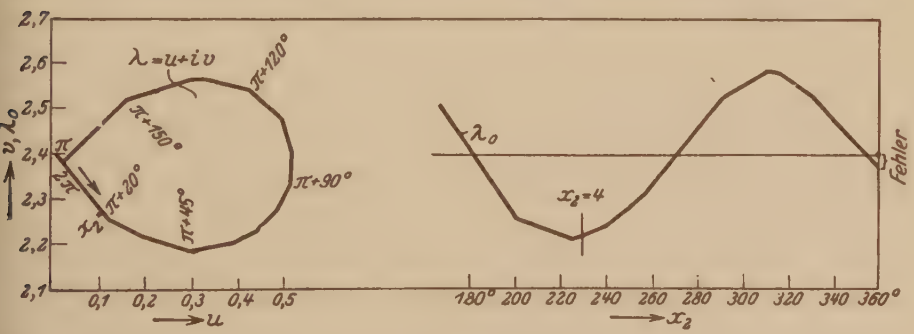
Es wurden nun, ausgehend von

$$x_2 = \pi \quad \text{und} \quad \lambda = 2{,}4058\,i,$$

die zwischen $x_2 = \pi$ und $x_2 = 2\pi$ liegendem Werte angenähert mit Hilfe der aus (C) folgenden Formel

$$\frac{d\lambda}{dx_2} = -\frac{e^{\lambda \cos x_2}}{\int_0^{x_2} e^{\lambda \cos x} \cos x \, dx}$$

ermittelt, indem $\lambda(x_2 + \Delta x_2) \approx \lambda(x_2) + \Delta x_2 \cdot \frac{d\lambda}{dx_2}_{(x=x_2)}$ gesetzt wurde. Hierbei wurde $\Delta x = 10^0$ gewählt. Da sich für $x_2 = 2\pi$ derselbe Wert wie für $x_2 = \pi$ ergeben muß, ist man über die Größenordnung des begangenen Fehlers orientiert (s. Fig. 11). Ferner wurden, ausgehend von $x_2 = \pi$ und



$$y'' + \lambda \sin x\, y' = 0$$

Fig. 11.

$\lambda = 5{,}5201\,i$ in roher Annäherung die Werte λ zwischen $x_2 = \pi$ und $x_2 = 2\pi$ ermittelt, um nachzuweisen, daß diese Kurve die von $\lambda = 2{,}4048\,i$ ausgehende Kurve nicht schneidet. Hiernach wurde zu jedem x_2 der zugehörige λ_0 ermittelt und λ_0 als Funktion von x_2 aufgetragen.

Bei der angenäherten Berechnung der Eigenwerte macht die Auswertung des Integrals $\int_0^{x_2} e^{\lambda \cos x} \cos x \, dx$ die meiste Arbeit. Da für das-

selbe keine Tabellen vorliegen, mußten die Werte mit Hilfe der Reihenentwickelung

$$\int_0^{\pi} e^{\lambda \cos x} \cos x \, dx = \sin a + \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{1!}\left[\frac{\sin 2a}{2}\right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2!}\left[\frac{\sin 3a}{3} + \frac{3 \sin a}{1}\right]$$

$$+ \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3}{3!}\left[\frac{\sin 4a}{4} + \frac{4 \sin 2a}{2}\right] + \ldots + a\left[\frac{1\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{1!^2} + \frac{2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3}{2!^2} + \frac{3\left(\frac{\lambda}{2}\right)^5}{3!^2} + \ldots\right]$$

ermittelt werden.

Die Figur läßt erkennen, daß der für $x_2 = 2\pi$ sich ergebende Wert nicht sehr verschieden von dem wahren Werte λ ist.

Setzt man nun z. B. für $A(x)$ $2,4 \sin x$, wodurch die gegebene Differentialgleichung in

$$y'' + 2,4 \sin x \, y' = 0$$

übergeht, so ergibt sich aus Fig. 11, daß das Verfahren der schrittweisen Verbesserung für $x_2 = 3$ und $x_2 = 6$ konvergieren, für $x_2 = 4$ aber divergieren muß. Dies ließ sich leider nicht an Beispielen praktisch nachweisen, da die Werte λ_0 so wenig voneinander abweichen, daß sich nicht einmal nach zehn Schritten erkennen ließ, ob das Verfahren konvergiert oder divergiert.

(Eingegangen am 30. Januar 1925.)

Über die Hypothesen der Mengenlehre.

Von

L. Chwistek in Krakau.

I.

Reine und vereinfachte Typenlehre.

In meiner „Theory of constructive Types“ [1]) habe ich darauf hingewiesen, daß die Mengenlehre auf die reine Logik dadurch zurückgeführt werden kann, daß man die Mengen einfach als Urteilsfunktionen einer Veränderlichen gelten läßt. Eine allgemeine, von jeder Zusatzhypothese freie Begründung der Logik habe ich in dem genannten Aufsatz gegeben, indem ich von der Russellschen Typenlehre [2]) zu der *reinen* Typenlehre übergegangen bin.

Die reine Typenlehre hat sich im Gebiete der klassischen Mathematik als ebenso fruchtbar erwiesen wie das auf der sog. Reduktibilitätshypothese basierte Whitehead-Russellsche System, welches als eine der gewaltigsten Schöpfungen der Neuzeit betrachtet werden darf [3]). Im Gebiete der Cantorschen Mengenlehre ist die reine Typenlehre weniger fruchtbar, indem sie den Cantorschen Beweis der Existenz des Kontinuums unmöglich macht, aber eben deswegen ist sie für das Studium der Grundlagen der Mathematik außerordentlich wichtig. Es zeigt sich nämlich, daß wir keineswegs von einem einzigen System der Mengenlehre sprechen können, da wir mindestens zwei solche Systeme konstruieren können, je

[1]) Annales de la Société polonaise de mathématique, Kraków 1924/25.

[2]) B. Russell, Mathematical Logic as based on the Theory of Types, American Journal of Mathematics **30** (1908), S. 222.

[3]) Whitehead and Russell, Principia Mathematica, Cambridge 1910/11. — In der 2. Ausgabe ihres Werkes (Cambridge 1925) stimmen Whitehead und Russell der Fundamentalidee der reinen Typenlehre zu, sie bemerken aber, daß sie uns die gewöhnliche Mathematik nur teilweise gewinnen läßt. Diese Bemerkung ist insofern richtig, als sie sich auf meine Handschrift von 1920, nicht aber auf die hier zitierte Arbeit bezieht.

nachdem wir die Existenz des Kontinuums einfach postulieren (Realismus) oder annehmen, daß ein beliebiger Typus eine abzählbare Menge ist (Nominalismus). Es ist hervorzuheben, daß die zweite dieser Hypothesen uns zu einem vollen System der modernen Mengenlehre führt, in welchem der Begriff des Kontinuums mit einem typikalisch unbestimmten Symbol ersetzt wird, welches für einzelne Typen abzählbare Mengen verschafft. Es ist zu bemerken, daß in diesem System der Begriff des Lebesgueschen Maßes in einer durchaus einfachen Weise eingeführt werden kann[4]). Das sog. Auswahlprinzip wird hier zu einem leicht beweisbaren Satze. Alle sonstigen Hypothesen (die Existenz der Alephs, die sog. Kontinuumhypothese u. dgl.) finden hier offenbar keinen Platz.

Der klassische Cantorismus kann auch dadurch gewonnen werden, daß man die sog. *vereinfachte Typenlehre* annimmt, welche als Spezialfall der reinen Typenlehre gelten dürfte. — Die vereinfachte Typenlehre ist der Russellschen Typenlehre praktisch äquivalent, sie ist aber von jeder Zusatzhypothese ledig und durchaus leicht zu formulieren[5]).

Ich nehme zunächst an, daß es gewisse Gegenstände gibt, die ich mit $x, y, z, \ldots$ bezeichne und welche in der Mengenlehre durch kein Beispiel repräsentiert werden dürfen. Diese Gegenstände werde ich als Individuen gelten lassen. Die Individuen bilden eine Menge. Alle Untermengen dieser Menge bilden eine Menge, die als erster Mengentypus gelten mag. Die Untermengen des ersten Mengentypus bilden den zweiten Mengentypus usw. — Sprechen wir nun von „allen Mengen", so sind dadurch die Untermengen eines gewissen Typus zu verstehen. Elemente einer Menge dürfen entweder Individuen oder Mengen eines gewissen Typus sein. — Von der Theorie der Relationen sehe ich hier gänzlich ab.

Damit ist die vereinfachte Typenlehre in ihrem Wesen fertiggestellt. Es ist noch eine Bemerkung nötig, welche dazu geeignet ist, uns von der Richardschen Antinomie zu befreien. Sie kann auf die Präzisierung des Begriffs „definit" zurückgeführt werden[6]). In unserem Falle ist diese Aufgabe außerordentlich einfach; es genügt nämlich festzustellen, daß es sich in der Mengenlehre nur um solche Mengen handeln kann, welche mittels der Fundamentalbegriffe des logischen Kalküls konstruiert sind. Da in „Principia mathematica" der systematische Aufbau der Mathematik mittels logischer Begriffe wirklich durchgeführt wurde, so ist es klar, daß unsere Forderung keine Beschränkung der Mathematik ist. Nichtsdestoweniger

[4]) Miara Lebesgue'a, Archiwum Lwowskiego Tow. Naukowego, Lwow 1922.

[5]) Auf die Möglichkeit einer solchen Typenlehre habe ich zuerst in dem Artikel: Antynomje logiki formalnej, Przegląd fil. (1921) hingewiesen.

[6]) A. Fraenkel, Über den Begriff „definit" usw. Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss., Berlin 1922.

müssen wir feststellen, daß wir hier mit einer *speziellen* Mengenlehre zu tun haben, welche nur für mathematische Zwecke brauchbar ist.

Es ist nun interessant zu erforschen, ob der Begriff der Menge auf diese Weise eindeutig bestimmt wurde, d. h. ob wir jetzt von einem einzigen System der Mengenlehre werden sprechen können, oder ob es sich etwa zeigen wird, daß sich mehrere gleichberechtigte Mengensysteme aufbauen lassen. Wir werden sehen, daß eben die zweite Möglichkeit wirklich vorkommt.

In diesem Aufsatz werden wir mit der Menge der Individuen zu tun haben, sonst aber werden wir die *vereinfachte* Typenlehre nur stillschweigend annehmen, wodurch das Folgende auch für jene Mathematiker, welche von jeder Typenlehre absehen möchten, zugänglich sein dürfte.

II.

Das Axiom der Abzählbarkeit.

Die Zermelosche Axiomatik der Mengenlehre[7]) enthält bekanntermaßen gewisse Axiome, welche mit den Mitteln der reinen Logik keineswegs bewiesen werden können, und zwar: *das Axiom der Unendlichkeit* und *das Axiom der Auswahl.* Die Zermelosche Formulierung des Axioms der Unendlichkeit ist mit der Typenlehre, und zwar sogar in ihrer liberalsten Fassung, die wir benützen wollen, keineswegs zu versöhnen, wir werden also als das *Axiom der Unendlichkeit* den Satz: *Es gibt transfinite Mengen* gelten lassen. Hier wird als *transfinit* eine beliebige Menge α bezeichnet, deren Mächtigkeit der Mächtigkeit von $\alpha - \iota`y$ gleich ist, wo $\iota`y$ eine Menge bezeichnet, deren einziges Element y ein Element von α ist.

Die transfiniten Mengen werden wir auch als *unendliche* Mengen gelten lassen. Jene Mengen, welche keine transfiniten Mengen sind, werden *endliche* Mengen heißen.

Das Axiom der Auswahl werden wir hier mit dem, nach einem bekannten Hartogsschen Satze[8]) ihm äquivalenten *Axiom der Trichotomie* ersetzen, welches feststellt, daß es keine *numerisch unvergleichbaren* Mengen gibt, d. h. daß zwischen den Mächtigkeiten λ, μ zweier beliebiger Mengen die Beziehung

$$\lambda > \mu \quad \text{oder} \quad \lambda < \mu \quad \text{oder} \quad \lambda = \mu$$

vorkommt.

Die Axiome der Unendlichkeit und der Trichotomie, oder vielmehr gewisse ihnen äquivalente Sätze wurden von Poincaré als typische syn-

[7]) E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Math. Ann. 65 (1908), S. 266.

[8]) Math. Ann. 76 (1915), S. 438.

thetische Sätze a priori betrachtet. In dem System von Whitehead und Russell[9]) finden sie unter den Axiomen keinen Platz, werden aber einfach als *Hypothesen* gewisser Sätze benützt, welche mit den Mitteln der reinen Logik keineswegs bewiesen werden könnten. Dadurch ist ihre Natur etwa am klarsten hervorgehoben worden. — Die von Zermelo[10]) und Hilbert[11]) benützte Methode, welche den wesentlichen erkenntnistheoretischen Unterschied zwischen diesen Axiomen und den übrigen, auf die reine Logik zurückführbaren Axiomen der Mengenlehre übersieht, hat den Nachteil, uns den Weg zur weiteren Erforschung dieser Axiome abzuschneiden.

Möchte jemand bemerken, daß die Mengenlehre ohne die Axiome der Trichotomie und der Unendlichkeit als kein theoretisches System, aber vielmehr als ein Fragment eines solchen betrachtet werden dürfte, so ist zu antworten, daß ja die Zermelosche Axiomatik keineswegs als ein vollständiges System gelten kann, da sie ja uns z. B. angesichts des sog. Kontinuum-Problems in voller Unklarheit läßt. In der Bevorzugung der Axiome der Trichotomie und der Unendlichkeit bei voller Ignorierung der sog. Cantorschen Kontinuum-Hypothese ist allerdings etwas Künstliches. Möchte jemand auch die Kontinuum-Hypothese als ein Axiom der Mengenlehre betrachten, so wäre dadurch das Vollständigkeitsproblem theoretisch keineswegs erledigt, da die Frage offen bleiben dürfte, ob damit alle „unlösbaren" Probleme der Mengenlehre und der aus ihr entwickelten Arithmetik weggeschafft werden könnten. Das Argument der Vollständigkeit ist damit auf jeden Fall überwunden[12]).

Was nun das Problem der Widerspruchslosigkeit der Zermeloschen Axiomatik anbelangt, so scheint sie in ihrem heutigen, von Fraenkel[13]) präzisierten Zustande widerspruchsfrei zu sein, von einem Beweise ihrer Widerspruchslosigkeit kann aber keineswegs die Rede sein. Der von Hilbert versprochene Beweis der Widerspruchslosigkeit der Axiome der Logik und Mathematik ist keineswegs als ein echter formaler Beweis zu betrachten, da es sich in diesem Falle vielmehr um gewisse inhaltliche Überlegungen handelt, welche den Bereich der Logik weit überschreiten. Statt dessen scheint mir zunächst die Methode Whitehead und Russells[14]) außerordentlich wichtig, welche dazu streben, die auf Grund der Axiome der Auswahl bzw. der Unendlichkeit bewiesenen Sätze der Mathematik wo-

[9]) l. c. [10]) l. c.

[11]) D. Hilbert, Neubegründung der Mathematik, Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1922), S. 157—177.

[12]) Zu diesem Punkte vgl. die interessanten Bemerkungen in Fraenkels Einleitung in die Mengenlehre (Berlin, Julius Springer, 1923), S. 227 u. 169.

[13]) l. c.

[14]) l. c.

möglich auf rein logische Axiome zurückzuführen. Diese von Sierpiński[15]) mit großem Erfolge verfolgte Methode läßt aber große Gebiete der Mathematik vollständig unerforscht.

Deswegen scheint es ratsam, sich nach einer anderen Methode umzusehen.

Wir beginnen mit dem Studium des *Axioms der Unendlichkeit*. Hier ist zunächst der Begriff einer *induktiven* Menge und einer *induktiven* Kardinalzahl maßgebend.

Als *rekurrent* betrachten wir jede Menge, welche die Kardinalzahl 0 enthält und der neben einer beliebigen Kardinalzahl n die Kardinalzahl $n+1$ als Element zukommt.

Als *induktiv* soll eine beliebige Kardinalzahl gelten, welche allen rekurrenten Mengen als Element zukommt.

Eine Menge, deren Mächtigkeit induktiv ist, wird eine *induktive Menge* heißen.

Es ist das Verdienst Whitehead und Russells[16]), darauf zuerst hingewiesen zu haben, daß die induktiven Zahlen in der Praxis die *natürlichen* Zahlen völlig ersetzen. Wir können also in der Folge von den natürlichen Zahlen gänzlich absehen und ausschließlich die induktiven Zahlen benützen. Nehmen wir das Axiom der Unendlichkeit an, so ist es leicht zu beweisen, daß die Menge der Individuen keine induktive Menge sein kann, woraus folgt, daß keine der induktiven Zahlen eine leere Menge ist. Dann können wir die Menge der induktiven Zahlen abzählbar nennen und ihre Mächtigkeit mit $\aleph_0$ bezeichnen. — Im allgemeinen werden wir eine beliebige Menge *abzählbar* nennen, wenn sie mit der Menge der induktiven Zahlen *numerisch gleich* ist, d. h. die Mächtigkeit $\aleph_0$ besitzt.

Mittels dieser Begriffe können wir nun folgende Sätze beweisen, welche für das Folgende als Lemmas von fundamentaler Bedeutung sind:

I. *Jede transfinite Menge besitzt eine abzählbare Untermenge.*

Beweis. Ist α eine transfinite Menge, welche das Element y enthält, so ist sie der Menge $\alpha - \iota`y$ numerisch gleich, d. h. sie besitzt dieselbe Mächtigkeit wie $\alpha - \iota`y$. Es gibt also zwischen den Elementen von α und $\alpha - \iota`y$ eine eineindeutige Beziehung $R$, durch welche einem beliebigen Elemente von $\alpha$ ein *Bild* in $\alpha - \iota`y$ zugeordnet wird, wobei ein jedes Element von $\alpha - \iota`y$ als Bild eines einzigen Elementes von α gelten muß. Eine beliebige induktive Untermenge ϱ von α, welche y enthält, und deren alle sonstige Elemente Bilder der in ihr vorkommenden

---

[15]) W. Sierpiński, L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des ensembles et l'analyse, Bulletin de l'Acad. des Sciences, Cracovie 1919.

[16]) l. c., Bd. II.

Elemente sind, lassen wir als ein *Intervall* von α gelten. Das Element von ϱ, dessen Bild in ϱ gar nicht vorkommt, bezeichnen wir als das *letzte* Element von ϱ. Es ist nun klar, daß ein jedes Intervall von α ein letztes Element besitzen muß, da es ja sonst transfinit sein müßte. Mittels der vollständigen Induktion ist es leicht zu beweisen, daß es in einem Intervall nur ein einziges letztes Element geben kann.

Dies festgestellt, beweisen wir nun ohne weiteres mittels der vollständigen Induktion, daß einer beliebigen induktiven Zahl ein einziges Intervall entspricht, dessen Mächtigkeit dieser Zahl gleich ist. Daraus und aus der Vergleichbarkeit zweier beliebigen induktiven Zahlen folgt nun ohne weiteres, daß kein Element von α in zwei verschiedenen Intervallen als letztes Element gelten kann. Bilden wir nun die Menge σ der letzten Elemente aller in Anspruch genommenen Intervalle, so gewinnen wir dadurch eine Untermenge von α, welche mit der Menge der induktiven Zahlen mittels einer eineindeutigen Beziehung verbunden ist. Wir sehen also, daß σ abzählbar ist, was zu beweisen war[17]).

II. *Eine endliche Menge ist mit keiner ihrer Teilmengen numerisch gleich.*

Beweis. Angenommen, γ ist eine Teilmenge von α, welche α numerisch gleich ist und das Element y von α nicht enthält, so gibt es eine eineindeutige Beziehung zwischen den Elementen von α und γ, mittels deren einem beliebigen Elemente von α ein *Bild* in γ zugeordnet wird, wobei ein jedes Element von γ als Bild eines einzigen Elementes von α gelten muß. Wir können also auch hier die oben genannte Menge von Intervallen und die Menge σ der letzten Intervalle dieser Elemente bilden. Es ist nun ohne weiteres klar, daß α eine transfinite Menge sein muß, also keineswegs eine endliche Menge sein darf. Dadurch ist unser Satz bewiesen.

Nehmen wir das Axiom der Unendlichkeit an und bezeichnen wir die Menge der Individuen mit V_x, so folgt aus dem Satze I, daß V_x eine abzählbare Untermenge besitzt. Es ist nun zu bemerken, daß sonst kaum etwas Interessantes über V_x festgestellt werden kann. Das eigentliche Studium der Mengenlehre wird erst dadurch ermöglicht, daß man neben V_x die Mengen $Cls`V_x$, $Cls`Cls`V_x$, $Cls`Cls`Cls`V_x$ usw. ins Auge faßt, wo $Cls`\alpha$ die Menge der Untermengen von α ist. Dann aber scheint es natürlich einfach anzunehmen, daß V_x *eine abzählbare Menge* ist, wodurch das Axiom der Unendlichkeit durch das weniger allgemeine, aber ebenso fruchtbare *Axiom der Abzählbarkeit* ersetzt wird. Dieses Axiom ist für uns von größter Wichtigkeit, wir werden also daran denken, es so

[17]) Benützen wir hier den von Whitehead und Russell eingeführten Begriff der *anzestralen* Beziehung, so bekommen wir einen Beweis unseres Satzes, der geradezu trivial ist.

genau wie möglich zu analysieren. — Ich werde zunächst beweisen, daß das Axiom der Abzählbarkeit dem System folgender Sätze äquivalent ist:

1. *Es gibt nicht-induktive Mengen von Individuen.*

2. *Ist λ eine nicht-induktive Mächtigkeit einer Menge von Individuen, so gibt es eine induktive Menge β von Individuen, deren komplementäre Menge $-\beta$ die Mächtigkeit λ besitzt* [18]).

3. *Ist α eine nicht-induktive Menge von Individuen und $-\alpha$ ihre komplementäre Menge, so gibt es eine Menge β von Individuen, für welche $Nc`\alpha = Nc`-\beta$ und $Nc`-\alpha \neq Nc`\beta$ gilt, wobei mit $Nc`\delta$ die Mächtigkeit von δ bezeichnet wird.*

Wir haben zunächst den Satz

III. *Das System der Sätze* 1, 2, 3 *folgt aus dem Axiom der Abzählbarkeit.*

Der Beweis ist trivial.

Ich gehe zu dem folgenden Satze über:

IV. *Das Axiom der Abzählbarkeit folgt aus dem System der Sätze* 1, 2, 3.

Beweis. V_x ist entweder transfinit oder endlich. Ist V_x transfinit, so enthält sie eine abzählbare Untermenge α. Nach 2. kann nun V_x in zwei komplementäre Untermengen β, $-\beta$ geteilt werden, deren erste induktiv, die zweite aber mit α numerisch gleich, also abzählbar ist. Wir sehen also, daß V_x abzählbar ist, wenn sie transfinit ist.

Ist nun V_x endlich und ist α eine Untermenge von V_x, so gibt es nach 2. eine induktive Untermenge β von V_x, deren komplementäre Menge $-\beta$ mit α numerisch gleich ist. Nun ist β sicher mit $-\alpha$ vergleichbar, wir müssen also entweder

$$Nc`\beta = Nc`-\alpha \quad \text{oder} \quad Nc`\beta > Nc`-\alpha \quad \text{oder} \quad Nc`\beta < Nc`-\alpha$$

haben. Nehmen wir nun an, daß $Nc`-\alpha > Nc`\beta$ ist, so folgt daraus, daß $-\alpha$ eine Teilmenge γ enthält, welche mit β numerisch gleich ist. Dann wäre die Summe $\alpha \cup \gamma$ von α und γ mit der Summe $-\beta \cup \beta$ von $-\beta$ und β, also mit V_x numerisch gleich, was aber durch den Satz II ausgeschlossen ist. Wir sehen also, daß $Nc`\beta = Nc`-\alpha$ vorkommen muß, wenn $Nc`-\beta = Nc`\alpha$ ist, und zwar für zwei beliebige Mengen von Individuen. Das widerspricht aber unserem Satze 3, es ist also zu folgern, daß V_x transfinit sein muß. Daraus und aus dem ersten Teile dieses Beweises folgt nun unser Satz ohne weiteres.

Was nun die gegenseitige Unabhängigkeit unserer Sätze anbelangt, so ist zu bemerken, daß die Sätze 1, 3 auch von nicht-transfiniten Mengen erfüllt werden können, während die Sätze 2, 3 auch für das induktive

[18]) Ich werde stets statt $V_x \cap -\delta$ kurz $-\delta$ schreiben.

Universum V_x gelten, die Sätze 1, 2 aber auch dann erfüllt wären, wenn V_x nicht-induktiv, aber endlich wäre. — Da wir in keinem dieser Fälle beweisen können, daß die bezügliche Hypothese mit den Axiomen der Logik im Widerspruch steht, so kann hier wohl von keinem absoluten Beweise der Unabhängigkeit die Rede sein, wohl aber dürfen wir behaupten, daß die Unabhängigkeit unserer Sätze als Konsequenz der Widerspruchslosigkeit der genannten Hypothesen mit den Axiomen der Logik betrachtet werden darf.

Es ist nun klar, daß es jetzt möglich ist, von dem Axiom der Abzählbarkeit als solchem abzusehen, statt dessen aber in der Mengenlehre die Sätze 1, 2, 3 als Hypothesen zu benützen. — Beschränkt man sich auf die Sätze 1 und 2, so bekommt man eine Mengenlehre, in welcher man gar nicht entscheiden kann, ob V_x eine endliche nicht-induktive oder transfinite Menge ist. Bezeichnet man die Mengen, welche 1. und 2. erfüllen, als *primitive* Mengen, so werden wir von jetzt ab von einer allgemeinen Theorie der primitiven Mengen sprechen können, welche von dem Begriff der Endlichkeit ganz unabhängig ist. — Es wäre interessant, eine solche Mengenlehre näher zu studieren. Es ist z. B. leicht zu beweisen, daß zwei beliebige Untermengen einer primitiven Menge miteinander numerisch vergleichbar sind. Andererseits ist an eine Arithmetik der Mächtigkeiten von primitiven Mengen gar nicht zu denken, da die Summe zweier primitiven Mengen keineswegs eine primitive Menge sein muß. Von diesen Sachen sehe ich in der Folge ab.

Als besonders wichtig für unsere weiteren Zwecke ist der Satz 3 zu betrachten, welcher uns zu beweisen erlaubt, daß eine beliebige nicht-induktive Menge von Individuen transfinit sein muß. Benützt man diesen Satz als solchen, ohne 1. und 2. anzunehmen, so kann man beweisen, daß V_x nicht endlich sein kann, wenn zwei beliebige ihrer Untermengen numerisch vergleichbar sind.

Wir bezeichnen als *innerlich vergleichbar* eine beliebige Menge, deren zwei beliebige Untermengen miteinander numerisch vergleichbar sind. Das Axiom 3 hat also zur Folge, daß V_x keine endliche Menge ist, wenn sie innerlich vergleichbar ist. Nennen wir die innerlich vergleichbaren endlichen, aber nicht-induktiven Mengen *transzendent*[19]), so können wir den

[19]) Der Begriff einer transzendenten Menge wurde zuerst von Whitehead und Russell benützt. Diese Verfasser haben auch folgende Sätze über transzendente Mengen aufgestellt:

1. Sind α, β transzendent, so ist $\alpha + \beta$ transzendent.
2. Sind α, β transzendent, so ist $\alpha \times \beta$ transzendent.
3. Ist α transzendent, so ist $Cls`Cls`\alpha$ transfinit.

(Vgl. Principia 2, S. 288.)

Satz 3 das *Axiom der Nicht-Transzendenz* nennen. Da wir aber unten eben mit transzendenten Mengen zu tun haben werden, so möchte ich hier lieber statt des Namens *Axiom* den Namen *Postulat* benützen. Wir werden also den Satz 3 als *das Postulat der Nichi-Transzendenz* oder auch als das *euklidische Postulat der Mengenlehre* gelten lassen. Der tiefere Sinn der zweiten dieser Bezeichnungen wird unten klar hervortreten.

III.

Das Axiom der Transzendenz.

Nehmen wir die Hausdorffschen Umgebungsaxiome[20]) an und setzen wir voraus, daß das Universum V_x von Individuen eine Punktmenge ist, so können wir annehmen, daß V_x *einen einzigen Punkt* a enthält, für welchen folgende Axiome gelten:

a) Sind U_a, W_a zwei Umgebungen von a, so enthält $U_a \cap - W_a$ eine induktive Anzahl von Punkten.

b) Ist U_a eine Umgebung von a, so enthält sie mindestens einen von a verschiedenen Punkt.

Möchten wir über V_x keine weiteren Voraussetzungen machen, so ist es klar, daß wir keineswegs daran denken könnten, die Abzählbarkeit von V_x zu beweisen. Andererseits können wir mittels der vollständigen Induktion beweisen, daß V_x keine induktive Menge ist. Weiter ist es klar, daß alle Untermengen von V_x, deren Existenz wir mittels der Axiome der reinen Logik beweisen können, entweder Umgebungen oder Differenzen zweier Umgebungen von a sind, also entweder induktive Mengen, oder komplementäre Mengen von induktiven Mengen in bezug auf V_a.

Möchten wir nun nur jene Untermengen von V_x als *echt* betrachten, deren Existenz mittels der Axiome der reinen Logik bewiesen werden kann, so ist es klar, daß wir als solche *entweder die Umgebungen von a oder die Differenzen von Umgebungen von a* betrachten.

Machen wir das, so können wir sagen, daß *von zwei Untermengen* α, $-\alpha$ *von* V_x *eine und nur eine induktiv sein muß.*

Diesen Satz, welcher für die Folge von fundamentaler Bedeutung ist, werden wir als *das Axiom der Transzendenz* (Transcax) gelten lassen.

Zunächst bemerke man, daß die Menge der Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, 0$ die Axiome a) b) erfüllt, wenn man das Axiom der Abzählbarkeit annimmt. Tut man es also und ersetzt man den Begriff „Menge von Individuen" mit dem Begriff „Umgebung von a oder Differenz zweier Um-

[20]) Vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 213.

gebungen von a", so bekommt man eine Disziplin, welche mit den Axiomen der Logik widerspruchsfrei ist, inwiefern es für das Axiom der Abzählbarkeit der Fall ist, und für welche das Axiom der Transzendenz gilt. —

Ich gehe nun zu den folgenden Sätzen über:

V. *Aus Transcax folgt, daß V_x eine endliche Menge ist.*

Beweis. Wäre V_x nicht endlich, so wäre es transfinit, dann aber dürfte es nach I eine abzählbare Untermenge σ besitzen. Nun können wir bekanntermaßen jede abzählbare Menge in zwei elementenfremde abzählbare Mengen zerfallen lassen. Wäre also V_x transfinit, und wäre α eine der abzählbaren Untermengen von σ, so wäre $-\sigma$ keineswegs induktiv, was dem Transcax widerspricht. Wir sehen also, daß V_x nicht transfinit sein kann. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

VI. *Aus Transcax folgt, daß $Cls`Cls`V_x$ transfinit ist.*

Beweis. Ist α nicht induktiv, so ist mittels der vollständigen Induktion leicht zu zeigen, daß $Nc`\alpha$ von einer beliebigen induktiven Zahl größer ist. Es ist also klar, daß eine beliebige induktive Zahl die Mächtigkeit eines Elementes von $Cls`\alpha$ ist. Daraus folgt nun, daß in $Cls`Cls`\alpha$ jede induktive Zahl als Element vorkommen muß. Wir sehen also, daß $Cls`Cls`\alpha$ eine abzählbare Untermenge besitzt und infolgedessen transfinit sein muß. Da nun aus Transcax folgt, daß V_x nicht induktiv ist, so ist $Cls`Cls`V_x$ transfinit.

VII. *Gilt Transcax, so ist $Cls`V_x$ endlich.*

Beweis. Wäre $Cls`V_x$ unendlich, so dürfte es eine abzählbare Untermenge $\omega$ von $Cls`V_x$ geben. Ist nun α ein Element von ω, so ist entweder α oder $-\alpha$ eine induktive Menge. Bezeichnen wir mit ω' die Menge aller induktiven Elemente von ω, mit ω'' die Menge aller induktiven Mengen β, deren komplementäre Mengen $-\beta$ Elemente von ω sind, so ist entweder ω' oder ω'' abzählbar, da sonst ω induktiv sein dürfte. Damit ist aber die Existenz einer abzählbaren Untermenge $\tilde{\omega}$ von $Cls`V_x$ bewiesen, deren Elemente lauter induktive Mengen sind. — Nehmen wir nun an, daß mittels einer eineindeutigen Beziehung einem beliebigen Elemente α_n von $\tilde{\omega}$ eine und nur eine induktive Zahl n zugeordnet ist. Bezeichnen wir mit α'_n die logische Summe aller Elemente von $\tilde{\omega}$, die mittels der obigen Beziehung kleineren Zahlen als n zugeordnet sind, so ist $\alpha_n \cap -\alpha'_n$ für ein genügend großes n sicher keine Nullmenge. Bezeichnen wir also mit ϱ die Menge aller nicht leeren Mengen $\alpha_n \cap -\alpha'_n$, so ist diese Menge offenbar abzählbar und aus lauter elementenfremden Mengen gebildet. Daraus folgt, daß es eine Beziehung gibt, mittels deren einem beliebigen Elemente von ϱ eine und nur eine induktive Zahl zugeordnet ist. Bezeichnen wir nun mit ϱ' die Menge aller

Elemente von ϱ, welche mittels der obigen Beziehung den ungleichen Zahlen zugeordnet sind, mit ϱ'' aber $\varrho \cap - \varrho'$, so ist es klar, daß die logischen Summen von ϱ' und ϱ'' elementenfremd sein müssen, wobei keine von ihnen eine induktive Menge sein kann. Damit kommen wir aber auf einen Widerspruch mit dem Axiom der Transzendenz, woraus die Falschheit unserer Annahme folgt. Damit aber ist unser Satz bewiesen.

Aus Transcax ist noch die folgende fundamentale Eigenschaft von V_x zu folgern:

VIII. *Aus Transcax folgt, daß V_x innerlich vergleichbar ist.*

Beweis. Es ist leicht, mittels vollständiger Induktion zu zeigen, daß, wenn α, β zwei numerisch gleiche induktive Mengen sind, ihre komplementäre Mengen $-\alpha, -\beta$ numerisch gleich sein müssen. Sind nun α, β zwei nicht induktive Untermengen von V_x, so folgt aus Transcax, daß $-\alpha, -\beta$ induktive Mengen sein müssen. Nehmen wir an, daß z. B. die Mächtigkeit von $-\alpha$ größer ist als jene von $-\beta$, daß also $-\alpha$ eine Untermenge γ besitzt, welche mit der Menge $-\beta$ numerisch gleich ist, so folgt aus dem oben Gesagten, daß β der Menge $\alpha \cup (-\alpha \cap -\gamma)$ numerisch gleich sein muß, also eine Mächtigkeit besitzt, welche von der Mächtigkeit von α entweder größer oder gleich ist, woraus die numerische Vergleichbarkeit von α mit β folgt.

IX. *Aus Transcax folgt, daß V_x eine transzendente Menge ist.*

Beweis. Dieser Satz folgt aus V und VIII.

X. *Aus Transcax folgt, daß V_x eine primitive Menge ist.*

Der Beweis ist trivial.

Für das weitere Studium des Transcax ist es nun wichtig, folgenden Satz ins Auge zu fassen:

3′. *Ist α eine nicht-induktive Menge von Individuen und $-\alpha$ ihre komplementäre Menge, so folgt $Nc^{\iota} - \alpha = Nc^{\iota} \beta$ aus $Nc^{\iota} \alpha = Nc^{\iota} - \beta$, und zwar für alle Mengen β von Individuen.*

Wir sehen, daß dieser Satz aus dem Satz 3 dadurch bekommen werden kann, daß dieselbe Eigenschaft, welche nach Satz 3 *keiner* nicht-induktiven Zahl zukommt, hier *allen* nicht-induktiven Zahlen zugesprochen wird.

Es ist leicht zu sehen, daß der Satz 3′ aus Transcax folgt.

XI. *Aus Transcax folgt der Satz 3′.*

Beweis. Haben wir $Nc^{\iota} \alpha = Nc^{\iota} - \beta$, wo α eine nicht-induktive Untermenge von V_x ist, so folgt aus Transcax, daß $-\alpha$ eine induktive Menge ist. Es ist also $-\alpha$ mit β numerisch vergleichbar. Wäre z. B. $Nc^{\iota} \beta > Nc^{\iota} - \alpha$, so wäre V_x mit einer ihrer Teilmengen numerisch gleich,

was zum Widerspruch mit den Sätzen II und V führt. Dasselbe dürfte aus $Nc^{\iota}\beta < Nc^{\iota} - \alpha$ folgen. Es bleibt nur die Möglichkeit, daß: $Nc^{\iota} - \alpha = Nc^{\iota}\beta$.

XII. *Aus den Sätzen* 1, 2, 3′ *folgt Transcax.*

Beweis. Ist α eine beliebige nicht-induktive Menge von Individuen, so folgt aus 2., daß es eine induktive Menge β von Individuen gibt, so daß

$$Nc^{\iota}\alpha = Nc^{\iota} - \beta$$

vorkommt. Nun folgt aus 3′, daß auch

$$Nc^{\iota} - \alpha = Nc^{\iota}\beta$$

vorkommen muß. Es ist also klar, daß, wenn α eine nicht-induktive Menge ist, $-\alpha$ eine induktive Menge ist. Die Umkehrung dieses Satzes ist auch wahr, da sie durch 1. unmittelbar gegeben wird. Unser Satz ist also bewiesen.

Wir sehen also, daß das Axiom der Transzendenz durch die Sätze 1, 2, 3′ ersetzt werden kann. Haben wir also die rein logische Mengenlehre dadurch erweitert, daß wir 1., 2. als Axiome angenommen haben, so wäre noch die Möglichkeit übrig, das Postulat der Nicht-Transzendenz, oder etwa den Satz 3′ anzunehmen, wodurch einmal eine auf dem Axiom der Abzählbarkeit, das andere Mal aber eine auf dem Axiom der Transzendenz begründete Mengenlehre entstehen dürfte. Den Satz 3′ werden wir als das *Postulat der speziellen Transzendenz*, oder, wegen der Rolle, welche er in bezug auf das Postulat der Nicht-Transzendenz spielt, als das Postulat der nicht-euklidischen Mengenlehre gelten lassen.

Es ist zu bemerken, daß die Sätze 2, 3′ auch dann erfüllt werden, wenn man annimmt, daß das Universum V_x induktiv sei, während die Sätze 1, 2 für das abzählbare Universum gelten, die Sätze 1, 3′ aber transzendente Mengen zulassen, welche keine primitiven Mengen sind. Wir haben also auch hier mit einer relativen Unabhängigkeit von Sätzen zu tun.

Nach dem oben Gesagten ist nun klar, daß die beiden Systeme theoretisch gleichberechtigt sind. Da das erstere einigermaßen deswegen bevorzugt werden könnte, daß unter Annahme von 1. die Menge der induktiven Zahlen als Beispiel einer abzählbaren Menge zu betrachten wäre, so ist folgendes zu bemerken. Lassen wir als *echt* jene und nur jene Mengen von induktiven Zahlen gelten, welche entweder induktiv sind oder dadurch entstanden sind, daß von der Menge der induktiven Zahlen eine induktive Menge weggeschafft wurde. Es ist klar, daß die Menge aller echten Mengen als Beispiel eines Universum von Mengen betrachtet werden darf, welche das Axiom der Transzendenz erfüllen.

Die Theorie der *echten* Mengen wird unten (VI) kurz angegeben werden.

IV.

Grundlagen der Arithmetik der ganzen Zahlen.

XIII. *Sind α, β zwei endliche, elementenfremde Mengen, so ist die Gesamtmenge $\alpha \cup \beta$ der Elemente dieser Mengen endlich.*

Beweis. Wäre $\alpha \cup \beta$ unendlich, so hätten wir nach I eine abzählbare Untermenge γ von $\alpha \cup \beta$. Die Durchschnitte $\alpha \cap \gamma$, $\beta \cap \gamma$ von γ mit α bzw. mit β dürften nun entweder induktiv oder abzählbar sein.

Wären sie beide induktiv, so wäre es auch für γ der Fall, was ja ausgeschlossen ist. Daraus folgt, daß entweder $\alpha \cap \gamma$ oder $\beta \cap \gamma$ abzählbar sein muß, was die Unendlichkeit von α bzw. β nach sich zieht, was ja unserer Hypothese widerspricht. Wir sehen also, daß $\alpha \cup \beta$ nicht unendlich sein kann.

XIII a. *Sind μ, ν zwei Mächtigkeiten von endlichen Mengen, so ist $\mu + \nu$ die Mächtigkeit einer endlichen Menge.*

Beweis. Dieser Satz ist von dem vorigen durch die einfache Anwendung des Begriffes der Mächtigkeit zu gewinnen. Dabei ist zu bemerken, daß zwei beliebige Mengen immer durch zwei mit ihnen numerisch gleichen, elementenfremden Mengen ersetzt werden können.

XIV. *Sind α, β zwei endliche, elementenfremde Mengen und ist (a, b) ein beliebiges geordnetes Elementenpaar, welches mit jeder unserer Mengen ein einziges Element gemein hat, so ist die Menge $\{(a, b)\}$ aller solcher Elementenpaare endlich.*

Beweis. Die Menge aller geordneten Elementenpaare von $\{(a, b)\}$, welche das Element m von α enthalten, sei mit σ_m bezeichnet. Wir haben offenbar $Nc^{\iota}\beta = Nc^{\iota}\sigma_m$. Andererseits ist die Mächtigkeit $Nc^{\iota}\omega$ der Menge ω aller Mengen σ_m der Kardinalzahl $Nc^{\iota}\alpha$ gleich. Die Gesamtmenge der Elemente aller σ_m ist offenbar $\{(a, b)\}$. Nehmen wir nun an, daß diese Gesamtmenge unendlich ist, so besitzt sie eine Untermenge γ, welche abzählbar ist. Da jede endliche Untermenge von γ induktiv sein muß, so folgt aus der Endlichkeit von σ_m, daß $\sigma_m \cap \gamma$ induktiv sein muß. Die Menge $\sigma_m \cap \gamma$ besitzt nun sicher ein „erstes“ Element und zwar jenes, welches in einer ausgewählten, aus den Elementen von γ konstruierten Progression P „früher“ als die anderen vorkommt. Bilden wir nun die Summe aller solcher Elemente, so muß sie offenbar endlich sein, da sie mit einer Untermenge von ω numerisch gleich ist; daraus folgt aber, daß sie induktiv sein muß, da sie eine Untermenge von γ ist. Auf diese Weise erscheinen die Elemente von γ in eine induktive Anzahl von Mengen von je einer induktiven Anzahl von Elementen verteilt, was eine induktive Gesamtmenge gibt. Da aber γ als abzählbar vorausgesetzt wurde, so sind wir auf einen Widerspruch gekommen. Es ist also sicher $\{(a, b)\}$ endlich.

XIVa. *Sind μ, ν Mächtigkeiten von endlichen Mengen, so ist $\mu \times \nu$ die Mächtigkeit einer endlichen Menge.*

Der Beweis ist auf eine einfache Inferenz aus XIV mit Berücksichtigung der Bemerkung zu XIIIa zurückzuführen.

XV. *Sind β, γ zwei numerisch gleiche Untermengen einer endlichen, innerlich vergleichbaren Menge α, so ist* $Nc'(\alpha \cap -\beta) = Nc'(\alpha \cap -\gamma)$.

Beweis. Wegen der innerlichen Vergleichbarkeit von α ist offenbar $Nc'(\alpha \cap -\beta) \geqq Nc'(\alpha \cap -\gamma)$ oder $Nc'(\alpha \cap -\beta) < Nc'(\alpha \cap -\gamma)$. Wäre z. B. das letztere der Fall, so gäbe es eine nicht leere Untermenge δ von $\alpha - \gamma$, welche mit $\alpha \cap -\beta$ numerisch gleich wäre. Nehmen wir nun an, daß β und γ numerisch gleiche Untermengen von α sind, so wäre α mit ihrer echten Teilmenge $\gamma \cup \delta$ numerisch gleich, was ja wegen II für alle endlichen Mengen ausgeschlossen ist. Auf analoge Weise ist der Fall $Nc'(\alpha \cap -\beta) > Nc'(\alpha \cap -\gamma)$ für alle endlichen Mengen auszuschließen, — es bleibt also nur die Möglichkeit übrig, $\alpha \cap -\beta$ als numerisch gleich mit $\alpha \cap -\gamma$ zu erklären.

XVa. *Sind λ, μ Mächtigkeiten endlicher, innerlich vergleichbarer Mengen und ist $\lambda \geqq \mu$, so gibt es eine Kardinalzahl $\lambda - \mu$, für welche $(\lambda - \mu) + \mu = \lambda$ gilt.*

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus XV.

Definition. Wir werden mit Ω die Kardinalzahl des Universums von Individuen bezeichnen, unter Voraussetzung, daß es eine primitive endliche Menge ist.

Anmerkung. Im Falle, wenn wir als Universum von Individuen eine Menge betrachten möchten, welche entweder nicht primitiv oder transfinit wäre, so hätten wir $Nc'\Omega = 0$.

XVI. *Sind n, α_i induktive Zahlen, so ist $\sum_{i/0}^{n} \alpha_i \Omega^i$ eine endliche Kardinalzahl.*

Beweis. Dieser Satz ist durch vollständige Induktion aus XIIIa und XIVa zu gewinnen.

Anmerkung. In der Folge werden wir nur solche Summen $\sum_{i/0}^{n} \alpha_i \Omega^i$ benützen, in welchen n, α_i induktive Zahlen sind.

XVII. *Bezeichnen wir mit $\max(\alpha_i)$ die größte von den Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so ist:*

$$\alpha_n \Omega^n \leqq \sum_{i/0}^{n} \alpha_i \Omega^i \leqq \max(\alpha_i) \cdot (n+1)\, \Omega^n.$$

Beweis. Wir haben zunächst: $\alpha_i \Omega^i \leqq \max(\alpha_i)\, \Omega^i$ und $\Omega^i \leqq \Omega^n$, woraus $\alpha_i \Omega^i \leqq \max(\alpha_i)\, \Omega^n$ folgt. Daraus aber ist das rechte Glied unserer

Ungleichheit zu gewinnen. Das linke Glied bekommt man, indem man bemerkt, daß: $\sum_{i,0}^{n} \alpha_i \Omega^i = \alpha_n \Omega^n + \sum_{i,0}^{n-1} \alpha_i \Omega^i$.

XVIII. *Ist n induktiv und sind $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \Psi_{n+1}$ Mächtigkeiten von Untermengen einer innerlich vergleichbaren Menge α, so ist $\sum_{i,1}^{n} \Psi_i$ mit Ψ_{n+1} vergleichbar.*

Beweis. Der Satz ist zunächst wahr für $n = 1$, da ja Ψ_1 mit Ψ_2 nach unserer Voraussetzung vergleichbar sein muß.

Nehmen wir nun an, daß unser Satz für $n = p$ wahr ist, daß also $\sum_{i,1}^{p} \Psi_i$ mit Ψ_{p+1} vergleichbar ist, für beliebige Mächtigkeiten $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p, \Psi_{p+1}$ von Untermengen von α. Es handelt sich nun darum, daß $\sum_{i,1}^{p+1} \Psi_i$ mit Ψ_{p+2} vergleichbar ist und zwar für beliebige Mächtigkeiten $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p, \Psi_{p+1}, \Psi_{p+2}$ von Untermengen von α. — Wir haben zunächst $\sum_{i,1}^{p+1} \Psi_i = \sum_{i,1}^{p} \Psi_i + \Psi_{p+1}$. Unserer Voraussetzung nach ist $\sum_{i,1}^{p} \Psi_i$ mit $Nc\,{}^{c}\alpha$ vergleichbar. Wäre $\sum_{i,1}^{p} \Psi_i \geqq Nc\,{}^{c}\alpha$, so hätten wir auch $\sum_{i,1}^{p+1} \Psi_i \geqq \Psi_{p+2}$, da ja $\Psi_{p+2} \leqq Nc\,{}^{c}\alpha$ sein muß. Nehmen wir nun an, daß $\sum_{i,1}^{p} \Psi_i \leqq Nc\,{}^{c}\alpha$, daß also:

$$Nc\,{}^{c}\alpha = \sum_{i,1}^{p} \Psi_i + \Delta.$$

Nun muß Δ mit Ψ_{p+1} vergleichbar sein. Ist $\Psi_{p+1} \geqq \Delta$, so folgt $\sum_{i,1}^{p} \Psi_i + \Psi_{p+1} \geqq Nc\,{}^{c}\alpha$, wir haben also wieder $\sum_{i,1}^{p+1} \Psi_i \geqq \Psi_{p+2}$. Nehmen wir aber an, das $\Psi_{p+1} \leqq \Delta$, so ist $\sum_{i,1}^{p+1} \Psi_i \leqq Nc\,{}^{c}\alpha$, dann muß aber auch unter unseren Voraussetzungen $\sum_{i,1}^{p+1} \Psi_i$ mit Ψ_{p+2} vergleichbar sein, da sie ja beide Mächtigkeiten von Untermengen einer innerlich vergleichbaren Menge sind.

XIX. *Sind p, q induktive Zahlen und haben wir $p \neq 0$, $q \neq 0$, sind weiter $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_q$ Mächtigkeiten von Untermengen einer innerlich vergleichbaren Menge, so ist $\sum_{i,1}^{p} \Phi_i$ mit $\sum_{i,1}^{q} \Psi_i$ vergleichbar.*

Beweis. Ist $p \leqq 1$, $q \leqq 1$, so ist der Satz trivial. Ich nehme nun an, daß er für $p \leqq m$, $q \leqq m$ zutrifft. Jetzt gehe ich zu dem Falle $p \leqq m+1$, $q \leqq m+1$ über. Nun kann ich schreiben:

$$\sum_{i/1}^{p} \Phi_i = \sum_{i/1}^{p-1} \Phi_i + \Phi_p,$$

$$\sum_{i/1}^{q} \Psi_i = \sum_{i/1}^{q-1} \Psi_i + \Psi_q,$$

wobei wir $\sum_{i\ 0}^{0} \Psi_i = 0$ setzen wollen. Nun ist es klar, daß in unserem Falle $p-1 \leqq m$, $q-1 \leqq m$ ist, woraus und aus unseren Annahmen zu entschließen ist, daß die Zahlen $\sum_{i/1}^{p-1} \Phi_i$, Φ_p, $\sum_{i/1}^{q-1} \Psi_i$, Ψ_p miteinander vergleichbar sind. Nehmen wir nun z. B. an, daß $\sum_{i/1}^{p-1} \Phi_i = \sum_{i/1}^{q-1} \Psi_i + \Delta$, so haben wir

$$\sum_{i/1}^{p} \Phi_i = \sum_{i/1}^{q-1} \Psi_i + (\Delta + \Phi_p);$$

es bleibt also zu zeigen, daß $\Delta + \Phi_p$ mit Ψ_q vergleichbar ist. Nun ist aber Δ die Mächtigkeit einer Untermenge der Menge β, für welche $Nc\,'\beta = \sum_{i/1}^{p} \Phi_i$ vorkommt. Es ist also klar, daß wir $\Delta = \sum_{i/1}^{p} X_i$ haben, wobei $X_i \leqq \Phi_i$. Daraus und aus dem Satze XVIII folgt nun, daß Δ mit Ψ_q vergleichbar ist. Ist nun $\Delta \geqq \Psi_q$, so ist es auch für $\Delta + \Phi_p$ der Fall. Haben wir aber $\Delta \leqq \Psi_q$, so ist $\Psi_q = \Delta + \Delta'$. Nun ist aber Δ' mit Φ_p sicher vergleichbar, wir sehen also, daß es auch für $\sum_{i/1}^{p} \Phi_i$ und $\sum_{i/1}^{q} \Psi_i$ der Fall ist.

XX. *Die Menge aller geordneten Zahlenpaare* $\left(\sum_{i/0}^{p} \alpha_i \Omega^i,\ \sum_{i/0}^{q} \beta_i \Omega^i\right)$, *für welche* $p \leqq m$, $q \leqq m$, *ist abzählbar, und zwar für ein beliebiges induktives* m.

Beweis. Der Satz ist zunächst für $m = 0$ wahr. Setzen wir nun, daß er für ein gewisses m zutrifft, daß wir also eine Progression:

(1) $$d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$$

haben, welche aus den Elementen der Menge von geordneten Zahlenpaaren $\left(\sum_{i/0}^{p} \alpha_i \Omega^i,\ \sum_{i\ 0}^{q} \beta_i \Omega^i\right)$ besteht, wobei $p \leqq m$, $q \leqq m$ vorkommt. — Betrachten wir nun ein beliebiges, geordnetes Zahlenpaar: $\left(\sum_{i/0}^{p+1} \alpha_i \Omega^i,\ \sum_{i/0}^{q+1} \beta_i \Omega^i\right)$, Nun ist durch dieses Zahlenpaar das Zahlenpaar $\left(\sum_{i/0}^{p} \alpha_i \Omega^i,\ \sum_{i/0}^{q} \beta_i \Omega^i\right)$, also ein Element der Progression (1) eindeutig bestimmt. Andererseits bestimmt das Paar $\left(\sum_{i\ 0}^{p} \alpha_i \Omega^i,\ \sum_{i/0}^{q} \beta_i \Omega^i\right)$ die Menge aller Paare, welche aus ihm durch die Addition zu seinen Gliedern von $\alpha_{p+1}\Omega^{p+1}$, bzw. $\beta_{q+1}\Omega^{q+1}$, wo mindestens eine der Zahlen α_{p+1}, β_{q+1} verschieden von Null ist, ent-

stehen können. Diese Menge kann nach der von Cantor benützten Methode zur Abzählung der Brüche der Menge der induktiven Zahlen eineindeutig zugeordnet werden, und zwar auf eine ganz bestimmte Weise. Macht man dasselbe für alle Paare $\left(\sum_{i/0}^{p} \alpha_i \Omega^i, \sum_{i/0}^{q} \beta_i \Omega^i\right)$, wo $p \leqq m$, $q \leqq m$, so bekommt man eine abzählbare Menge von abzählbaren Mengen, deren Gesamtmenge der Menge aller Paare $\left(\sum_{i/0}^{p+1} \alpha_i \Omega^i, \sum_{i/0}^{q+1} \beta_i \Omega^i\right)$ numerisch gleich ist. Daraus folgt aber die Abzählbarkeit der Menge aller Paare $\left(\sum_{i/0}^{p+1} \alpha_i \Omega^i, \sum_{i/0}^{q+1} \beta_i \Omega^i\right)$.

Bemerkt man nun, daß es sich hier um ein *induktives m* handelt, so folgt aus dem Obigen unser Satz durch vollständige Induktion.

XXI. *Die Menge aller Kardinalzahlen* $\sum_{i/0}^{p} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i/0}^{q} \beta_i \Omega^i$, *für welche* $p \leqq m$, $q \leqq m$, *ist abzählbar, und zwar für ein beliebiges induktives m.*

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus XX.

XXII. *Für die Mächtigkeiten von Untermengen einer innerlich vergleichbaren endlichen Menge gelten die folgenden Sätze:*

(1) $(\nu + \varrho) - \varrho = \nu$.

(2) *Ist* $\mu \geqq \varrho$, *so ist* $(\mu - \varrho) + \varrho = \mu$.

(3) *Ist* $\mu \geqq \varrho$, *so ist* $(\lambda + \mu) - \varrho = \lambda + (\mu - \varrho)$.

(4) *Ist* $\mu \geqq \varrho$, *so ist* $(\mu - \varrho) + \lambda = (\mu + \lambda) - \varrho$.

(5) *Ist* $\nu + \varrho \geqq \mu$ *und* $\mu \geqq \varrho$, *so ist* $(\nu + \varrho) - \mu = \nu - (\mu - \varrho)$.

(6) *Ist* $\mu \geqq \varrho$, $\sigma \geqq \tau$, *so ist* $(\mu - \varrho) + (\sigma - \tau) = (\mu + \sigma) - (\varrho + \tau)$.

(7) *Ist* $\mu \geqq \tau$ *und* $\mu \geqq \varrho$, *so ist* $\mu - \tau = (\mu - \varrho) + (\varrho - \tau)$.

(8) *Ist* $\mu \geqq \sigma$ *und* $\mu \geqq \varrho$, $\sigma \geqq \tau$ *und* $\varrho \geqq \tau$, *ist weiter* $(\mu - \sigma) \geqq (\varrho - \tau)$, *so ist* $(\mu - \varrho) - (\sigma - \tau) = (\mu - \sigma) - (\varrho - \tau)$.

(9) *Ist* $\mu \cdot \sigma$ *die Mächtigkeit einer innerlich vergleichbaren Menge, so haben wir:* $(\mu - \varrho) \cdot \sigma = \mu \cdot \sigma - \varrho \cdot \sigma$.

Beweis. Zunächst sei zu bemerken, daß unter unseren Voraussetzungen wegen XVa und XIX alle hier vorkommenden Differenzen Mächtigkeiten von innerlich vergleichbaren endlichen Mengen darstellen.

Zu (1) und (2). Diese Gleichheiten sind aus den Formeln:

$$(\alpha \cup \beta) \cap -\beta = \alpha, \quad (\alpha \cap -\beta) \cup \beta = \alpha$$

mittels XVa und XVIII direkt zu bekommen (vgl. Theory of constructive Types, Formeln 119.32 und 119.34).

Zu (3). Aus (2) folgt:

$$\lambda + \mu = \lambda + [(\mu - \varrho) + \varrho] = [\lambda + (\mu - \varrho)] + \varrho.$$

Daraus und aus (1) folgt nun durch beiseitige Subtraktion von ϱ die Gleichheit (3).

Zu (4). Aus (2) folgt:

$$\mu + \lambda = [(\mu - \varrho) + \varrho] + \lambda = (\mu - \varrho) + (\varrho + \lambda)$$
$$= (\mu - \varrho) + (\lambda + \varrho) = [(\mu - \varrho) + \lambda] + \varrho.$$

Daraus bekommen wir durch beiseitige Substraktion von ϱ die Gleichheit (4), und zwar wegen (1).

Zu (5). Setzen wir $(\nu + \varrho) - \mu = \delta$, so kommt durch beiseitige Addition von μ, und zwar wegen (2): $\nu + \varrho = \delta + \mu$. Daraus aber bekommen wir durch beiseitige Subtraktion von ϱ, und zwar wegen (1):

$$\nu = (\delta + \mu) - \varrho.$$

Wegen (3) haben wir nun:

$$\nu = \delta + (\mu - \varrho),$$

woraus wegen (1) durch beiseitige Subtraktion von $\mu - \varrho$ die Gleichheit (5) herauskommt.

Zu (6). Aus (2) folgt zunächst:

$$[(\mu - \varrho) - \tau] + \tau = \mu - \varrho$$
$$\{[(\mu - \varrho) - \tau] + \tau\} + \varrho = (\mu - \varrho) + \varrho.$$

Aus (2) und wegen des Assoziationsgesetzes der Addition von Mächtigkeiten folgt nun:

$$[(\mu - \varrho) - \tau] + (\tau + \varrho) = \mu$$
$$[(\mu - \varrho) - \tau] = \mu - (\tau + \varrho)$$
$$[(\mu - \varrho) - \tau] + \sigma = [\mu - (\tau + \varrho)] + \sigma.$$

Daraus folgt wegen (4):

$$[(\mu - \varrho) + \sigma] - \tau = (\mu + \sigma) - (\tau + \varrho).$$

Endlich bekommen wir (6) durch die Anwendung von (3) zum linken Gliede unserer Gleichheit.

Zu (7). Durch zweimalige Anwendung von (2) bekommen wir:

$$\mu = (\mu - \varrho) + [(\varrho - \tau) + \tau] = [(\mu - \varrho) + (\varrho - \tau)] + \tau,$$

woraus durch beiseitige Subtraktion von τ unser Satz folgt.

Zu (8). Aus (7) bekommt man

$$(\mu - \varrho) + (\varrho - \tau) = (\mu - \sigma) + (\sigma - \tau),$$
$$(\mu - \varrho) = [(\mu - \sigma) + (\sigma - \tau)] - (\varrho - \tau).$$

Nun haben wir wegen (4)

$$\mu - \varrho = [(\mu - \sigma) - (\varrho - \tau)] + (\sigma - \tau),$$

woraus durch beiseitige Subtraktion von $(\sigma - \tau)$ unser Satz herauskommt.

Zu (9). Aus (2) folgt

$$[(\mu - \varrho) + \varrho] \cdot \sigma = \mu \cdot \sigma,$$

wir haben also

$$(\mu - \varrho) \cdot \sigma + \varrho \cdot \sigma = \mu \cdot \sigma,$$

daraus aber und aus (1) folgt durch beiseitige Subtraktion von $\varrho \cdot \sigma$ die Gleichheit (9).

XXIII. *Sind die Φ_i Mächtigkeiten von Untermengen einer innerlich vergleichbaren, endlichen Menge α, und ist Φ_i von der Form*

$$\Omega^n - \Big(\sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i,0}^{p} \beta_i \Omega^i\Big) \quad \text{oder} \quad \sum_{i,0}^{n} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i,0}^{p} \beta_i \Omega^i,$$

wo $m < n$, so ist $\sum_{i\,1}^{q} \Phi_i$ von der Form $\sum_{i\,0}^{r} \alpha_i' \Omega^i - \sum_{i,0}^{s} \beta_i' \Omega^i$, wo $r \leqq n$, wenn $\Omega^n = Nc\,\alpha$.

Beweis. Dieser Satz ist zunächst für $q = 1$ wegen XXII (5) und XVII wahr. Setzen wir nun, daß er für $q = q'$ zutrifft, daß also für beliebige Φ_i

$$\sum_{i\,1}^{q'} \Phi_i = \sum_{i,0}^{r} \alpha_i' \Omega^i - \sum_{i,0}^{s} \beta_i' \Omega^i$$

mit $r \leqq n$ gilt. Nun ist

$$\sum_{i\,1}^{q'+1} \Phi_i = \Phi_{q'+1} + \Big(\sum_{i,0}^{r} \alpha_i' \Omega^i - \sum_{i,0}^{s} \beta_i' \Omega^i\Big).$$

Setzen wir

$$\Phi_{q'+1} = \sum_{i,0}^{m'} \alpha_i'' \Omega^i - \sum_{i,0}^{p'} \beta_i'' \Omega^i,$$

wo $m' \leqq n$, so folgt nach XXII (6)

$$\sum_{i\,1}^{q'+1} \Phi_i = \sum_{i\,0}^{m'} \alpha_i'' \Omega^i + \sum_{i,0}^{r} \alpha_i' \Omega^i - \Big(\sum_{i,0}^{p'} \beta_i'' \Omega^i + \sum_{i,0}^{s} \beta_i' \Omega^i\Big),$$

woraus die Gleichheit

$$\sum_{i\,1}^{q'+1} \Phi_i = \sum_{i,0}^{r'} (\alpha_i'' + \alpha_i') \Omega^i - \sum_{i,0}^{s'} (\beta_i'' + \beta_i') \Omega^i,$$

wo $r' \leqq n$, wegen des Assoziations- und Permutationssatzes für Summen von Mächtigketten, folgt. Daraus ist nun ersichtlich, daß unser Satz mittels der vollständigen Induktion bewiesen werden kann.

XXIV. *Haben wir* $\Omega^n = Nc^{\epsilon}\alpha$, $\Omega^{n+1} = Nc^{\epsilon}\beta$, *und ist die Menge aller Mächtigkeiten von Untermengen von* α *abzählbar, so ist die Mächtigkeit einer beliebigen Untermenge von* β *von der Form:* $(\Omega - p)\Phi + \sum_{i/1}^{p} \Psi_i$, *wo* p *eine induktive Zahl,* Φ, Ψ_i *aber Mächtigkeiten von Untermengen von* α *sind.*

Beweis. Bezeichnen wir mit $x, y, z, \ldots$ die Elemente von V_x, jene aber von α mit $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, so bekommen wir eine mit der Menge β numerisch gleiche Menge bekanntermaßen dadurch, daß wir die geordneten Elementenpaare

$$(\xi, x),\ (\xi, y),\ (\xi, z),\ \ldots$$
$$(\eta, x),\ (\eta, y),\ (\eta, z),\ \ldots$$
$$(\zeta, x),\ (\zeta, y),\ (\zeta, z),\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

bilden. Es sei nun Θ irgendeine Menge dieser Elemente. Bezeichnen wir die Menge aller Elementenpaare (ϱ, x_1), welche das Element x_1 von V_x enthalten, als eine Kolonne, so ist Θ die Gesamtmenge einer Menge σ von Untermengen von Kolonnen. Die Mächtigkeit einer Untermenge γ einer Kolonne ist nun die Mächtigkeit einer gewissen Untermenge von α. Bezeichnen wir mit ω die Menge aller Mächtigkeiten von Elementen von σ, so muß ω abzählbar oder induktiv sein. — Nun ist ω mit der Menge von Mengen von Kolonnen, welche in σ numerisch gleiche Untermengen als Elemente haben, numerisch gleich. Da nun aber die Menge aller Kolonnen mit V_x numerisch gleich ist, so muß ω mit einer Untermenge von $Cls^{\epsilon} V_x$ numerisch gleich sein. Daraus aber und aus VII folgt, daß ω *induktiv sein muß.* Nehmen wir nun an, daß es $\Omega - p$ Kolonnen gibt, deren in σ vorkommenden Untermengen die Mächtigkeit Φ zukommt, so ist die Mächtigkeit der Gesamtmenge aller in Anspruch genommenen Elemente von σ: $(\Omega - p)\Phi$, wo p eine induktive Zahl, Φ aber die Mächtigkeit einer Untermenge von α ist. Die Menge der übrigen Kolonnen hat nun sicher die Mächtigkeit p, die Gesamtmenge der ihnen entsprechenden Elemente von σ muß also $\sum_{i/1}^{p} \Psi_i$ sein, wo Ψ_i die Mächtigkeit eines in Anspruch genommenen Elementes von σ ist.

Gibt es keine Menge von Elementen von σ mit gleicher Mächtigkeit, deren Mächtigkeit $\Omega - q$ wäre, wo q eine induktive Zahl ist, so folgt daraus, daß die Gesamtmenge dieser Mengen die Mächtigkeit $\sum_{i/1}^{p} \Psi_i$ haben muß, welche aus dem Schema: $(\Omega - p)\Phi + \sum_{i/1}^{p} \Psi_i$ durch die Substitution $\Phi = 0$ bekommen werden kann. Dieses Schema tritt also in allen Fällen hervor, was zu beweisen war.

XXV. *Setzen wir voraus, daß* $\Omega^n = Nc^{\iota}\alpha$, $\Omega^{n+1} = Nc^{\iota}\beta$, *wo* α *eine innerlich vergleichbare Menge ist, setzen wir weiter voraus, daß die Mächtigkeiten von Untermengen von* α *entweder von der Form*

$$(1) \qquad \sum_{i/0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i/0}^{p'} \beta_i \Omega^i,$$

oder von der Form

$$(2) \qquad \Omega^n - \Big(\sum_{i/0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i/0}^{p'} \beta_i \Omega^i \Big)$$

sind, wo $m < n$, *so ist auch* β *innerlich vergleichbar, wobei die Mächtigkeiten von Untermengen von* β *auf die Form* (1) *oder* (2) *für* $m < n+1$ *zurückgeführt werden können.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß nach XVII in (1) und (2) $m \geqq p'$ sein muß. Dann aber folgt aus XXI, daß die Menge aller Mächtigkeiten von der Form (1) bzw. (2) für $m < n$ abzählbar sein muß, woraus folgt, daß es auch für die Gesamtmenge dieser zwei Mengen der Fall ist.

Daraus und aus XXIV folgt nun, daß für beliebige Mächtigkeit von Untermengen von β das Schema $(\Omega - p)\Phi + \sum_{i/1}^{p} \Phi_i$ gilt, wo p eine induktive Zahl, Φ, Φ_i aber Mächtigkeiten von Untermengen von α sind.

Betrachten wir nun zwei beliebige Mächtigkeiten:

$$(\Omega - p)\Phi + \sum_{i/1}^{p} \Phi_i$$

$$(\Omega - q)\Psi + \sum_{i/1}^{q} \Psi_i,$$

welche zum obigen Schema gehören, so folgt aus XIX, daß $(\Omega - p)$, $(\Omega - q)$, Φ, Ψ, $\sum_{i/1}^{p} \Phi_i$, $\sum_{i/1}^{q} \Psi_i$ miteinander vergleichbar sind. Setzen wir nun voraus, daß z. B. $p \geqq q$ ist, so ist

$$\Omega - q = (\Omega - p) + (p - q),$$

wir haben also:

$$\begin{aligned}(\Omega - q)\Psi + \sum_{i/1}^{q} \Psi_i &= (\Omega - p)\Psi + (p - q)\Psi + \sum_{i\,1}^{q} \Psi_i \\ &= (\Omega - p)\Psi + \sum_{i\,1}^{q+1} \Psi_i,\end{aligned}$$

wo $(p - q)\Psi = \Psi_{q+1}$ gesetzt wurde.

Setzen wir weiter z. B. $\Phi \geqq \Psi$, so ist

$$\Phi = \Psi + (\Phi - \Psi),$$

und zwar wegen XXII (2), da nach XV bei unseren Voraussetzungen $\Phi - \Psi$ die Mächtigkeit einer Untermenge von α ist. Nun haben wir:

$$(\Omega - p)\Phi = (\Omega - p)\Psi + (\Omega - p)(\Phi - \Psi).$$

Es handelt sich also darum, die Zahlen $(\Omega - p)(\Phi - \Psi) + \sum_{i,1}^{p} \Phi_i$, $\sum_{i\,1}^{q+1} \Psi_i$ zu vergleichen.

Nun ist $\Phi - \Psi$ die Mächtigkeit einer Untermenge von α, sie ist also sicher von der Form (1) bzw. (2), und zwar für $m < n$.

Setzen wir $\Phi - \Psi = \sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i,0}^{q'} \beta_i \Omega^i$, so ist zu bemerken, daß

$$\Omega \sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i = \sum_{i,0}^{m} \alpha_i \Omega^{i+1} = \alpha_m \Omega^{m+1} + \sum_{i,1}^{m} \alpha_{i-1} \Omega^i = \sum_{i,1}^{\alpha_m} 1^i \Omega^{m+1} + \sum_{i,1}^{m} \alpha_{i-1} \Omega^i,$$

und zwar für $m + 1 \leqq n$.

Wir sehen also, daß $\Omega \sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i$ der Summe einer induktiven Anzahl von Mächtigkeiten von Untermengen von α gleich ist, woraus und aus XIX folgt, daß sie die Mächtigkeit einer innerlich vergleichbaren endlichen Menge ist. Dasselbe ist also auch für $(\Omega - p) \sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i$ der Fall, wir sehen also nach XXII (9), daß

$$(\Omega - p)(\Phi - \Psi) = (\Omega - p) \sum_{i,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - (\Omega - p) \sum_{i,0}^{q'} \beta_i \Omega^i,$$

und nach nochmaliger Anwendung von XXII (9):

$$(\Omega - p)(\Phi - \Psi) = \Big(\Omega \sum_{i,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - p \sum_{i,0}^{m} \alpha_i \Omega^i\Big) - \Big(\Omega \sum_{i,0}^{q'} \beta_i \Omega^i - p \sum_{i,0}^{q'} \beta_i \Omega^i\Big).$$

Daraus folgt nun, daß $(\Omega - p)(\Phi - \Psi)$ eine Summe von induktiver Anzahl von Mächtigkeiten von Untermengen von α ist, also nach XIX mit $\sum_{i\,1}^{q+1} \Psi_i$ vergleichbar sein muß. Daraus folgt nun nach XVIII, daß auch $(\Omega - p)(\Phi - \Psi) + \sum_{i,1}^{p} \Phi_i$, $\sum_{i,1}^{q+1} \Psi_i$ miteinander vergleichbar sein müssen.

Setzen wir nun: $\Phi - \Psi = \Omega^n - \Big(\sum_{i,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i,0}^{q'} \beta_i \Omega^i\Big)$, so ist leicht zu beweisen, daß $(\Omega - p)(\Phi - \Psi)$ größer als $\sum_{i,1}^{q+1} \Psi_i$ sein muß. Wir haben zunächst: $(\Omega - p)(\Phi - \Psi) \geqq (\Phi - \Psi) \cdot l$, wo l eine beliebige induktive Zahl ist. Nun genügt es zu zeigen, daß für ein genügend großes l die Ungleichheit

$$(\Phi - \Psi) l \geqq \sum_{i,1}^{q+1} \Psi_i$$

zutrifft.

Nun ist zu bemerken, daß aus XVII die folgenden Ungleichheiten folgen, wo l eine genügend große induktive Zahl ist:

$$\sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i\,0}^{q+1} \beta_i \Omega^i \leqq \max(\alpha_i)\cdot(m+1)\,\Omega^{n-1} \leqq l\cdot\Omega^{n-1},$$

$$\Phi - \Psi \geqq \Omega^n - \max(\alpha_i)(m+1)\,\Omega^{n-1} \geqq \Omega^n - l\cdot\Omega^{n-1},$$

$$\begin{aligned} l(\Phi-\Psi) &\geqq l\,\Omega^n - l^2\Omega^{n-1} \\ &\geqq (l-1)\,\Omega^n + (\Omega^n - l^2\Omega^{n-1}) \\ &\geqq (l-1)\,\Omega^n. \end{aligned}$$

Andererseits haben wir

$$\sum_{i\,1}^{q+1} \Psi_i \leqq s\cdot\Omega^n,$$

wo s eine ganz bestimmte induktive Zahl ist. Wählen wir also $l \geqq s+1$, so kommt $l\cdot(\Phi-\Psi) \geqq \sum_{i\,1}^{q+1} \Psi_i$. Wir sehen also, daß in beiden Fällen die Vergleichbarkeit von $(\Omega - p)(\Phi - \Psi)$ mit $\sum_{i\,1}^{q+1} \Psi_i$ bewiesen ist. Daraus folgt aber die Vergleichbarkeit von

$$(\Omega - p)\,\Phi + \sum_{i\,1}^{q} \Phi_i \quad \text{mit} \quad (\Omega - q)\Psi + \sum_{i\,1}^{q} \Psi_i.$$

Wir sehen also, daß β eine innerlich vergleichbare Menge ist. Daraus aber und aus XXIII folgt wegen XXII (9), (6), daß die Mächtigkeit einer beliebigen Untermenge von β auf die Form $\sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i\,0}^{q'} \beta_i \Omega^i$ zurückgeführt werden kann, wo $m \leqq n+1$, $q' \leqq n$, $\alpha_{n+1} = 1$.

Aus dieser Form sind nun die Formen (1) bzw. (2) wegen XVII ohne jede Schwierigkeit zu bekommen.

XXVI. *Haben wir $\Omega^n = Nc\,'\alpha$, wo n eine beliebige induktive Zahl ist, so ist α innerlich vergleichbar, wobei die Mächtigkeiten von Untermengen von α von der Form:*

$$\sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i\,0}^{p} \beta_i \Omega^i \quad \textit{oder} \quad \Omega^n - \Big(\sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i\,0}^{p} \beta_i \Omega^i\Big)$$

sind, wo $m < n$.

Beweis. Bemerken wir, daß $\Omega = 0$, oder die Mächtigkeit einer primitiven endlichen Menge ist, so folgt unser Satz aus XXV und XII durch vollständige Induktion.

XXVII. *Haben wir $\Omega^n = Nc\,'\alpha$, so ist die Mächtigkeit einer beliebigen Untermenge α von der Form:*

$$\sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i\,0}^{p} \beta_i \Omega^i,$$

wo $m \leqq n$.

Beweis. Dieser Satz folgt aus XXVI, XXIII und XII.

XXVIII. *Die Kardinalzahlen*

$$\sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i\,0}^{p} \beta_i \Omega^i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i\,0}^{m'} \alpha_i' \Omega^i - \sum_{i\,0}^{p'} \beta_i' \Omega^i$$

sind Mächtigkeiten von Untermengen einer innerlich vergleichbaren, endlichen Menge.

Beweis. Dieser Satz folgt aus XIIIa, XIVa, XXVII, XXVI und XVII.

Definition. Ich werde jede Mächtigkeit von der Form:

$$\sum_{i\,0}^{m} \alpha_i \Omega^i - \sum_{i\,0}^{p} \beta_i \Omega^i$$

als eine *ganze Zahl* bezeichnen.

XXIX. *Sind zwei beliebige ganze Zahlen λ, μ gegeben, so sind $\lambda + \mu$, $\lambda \times \mu$ und im Falle $\lambda \geqq \mu$ auch $\lambda - \mu$ ganze Zahlen.*

Beweis. Dieser Satz folgt aus XIIIa, XIVa, XVa und XXVIII.

XXX. *Ist λ die Mächtigkeit einer innerlich vergleichbaren endlichen nicht leeren Menge und haben wir $\lambda = \mu \cdot \nu$ und $\lambda = \mu \cdot \nu'$, so ist $\nu = \nu'$.*

Beweis. Es ist zunächst klar, daß wir $\lambda \geqq \nu$, $\lambda \geqq \nu'$ haben müssen, es ist also unserer Voraussetzung nach ν mit ν' vergleichbar. Setzen wir z. B. $\nu' = \nu + \delta$, so ist

$$\lambda = \mu(\nu + \delta), \qquad \lambda = \mu \cdot \nu.$$

Daraus folgt aber, daß $\lambda = \lambda + \delta$, was unserer Voraussetzung nach zu $\delta = 0$ führt. Es ist also $\nu' = \nu$, was zu beweisen war.

V.

Das verallgemeinerte Kontinuum.

Aus den Sätzen XXIX und XXX geht hervor, daß die vier fundamentalen arithmetischen Operationen im Bereiche der *ganzen* Zahlen eindeutig bestimmt sind. Nun können wir auf die übliche Weise die *positiven* und *negativen ganzen Zahlen*, sowie die *Brüche von ganzen Zahlen* definieren. Auf diese Weise bekommen wir den Körper der Brüche von ganzen Zahlen, welcher mittels des Schemas:

$$\frac{\sum_{i\,0}^{n} \alpha_i \Omega^i}{\sum_{i\,0}^{n} \beta_i \Omega^i}$$

bezeichnet werden kann, wo α_i, β_i positive oder negative ganze Zahlen, m, n induktive Kardinalzahlen sind, wobei $\sum_{i/0}^{n} \beta_i \Omega^i \neq 0$ vorausgesetzt ist.

Dieser Körper ist schon deswegen interessant, weil er Brüche von ganzen Zahlen enthält, welche von einer beliebigen reellen Zahl kleiner sind, welche also in der Arithmetik der reellen Zahlen die Rolle der „unendlich Kleinen" spielen dürfen.

Setzen wir nämlich

$$\varepsilon_m = \frac{m}{\Omega},$$

wo m eine beliebige induktive Kardinalzahl ist, so ist es klar, daß

$$\varepsilon_m < \alpha,$$

wo α eine beliebige reelle Zahl ist (XVII). Die Brüche von ganzen Zahlen, welche von einer beliebigen reellen Zahl kleiner sind, können wir als *Differentiale* gelten lassen.

Es ist leicht, zu zeigen, daß für ein beliebiges Differential ξ die Ungleichheit

$$\xi < \varepsilon_m$$

gilt, wo m eine genügend große induktive Kardinalzahl ist.

In bezug auf die traditionelle Theorie der unendlich Kleinen ist es wichtig, zu betonen, daß wir hier die Progression:

$$\varepsilon_m, \varepsilon_m^2, \varepsilon_m^3, \varepsilon_m^4, \ldots$$

von Differentialen ersten, zweiten, dritten usw. Grades bekommen, aber keine Mittel besitzen, zu noch kleineren Differentialen überzugehen.

Es ist ohne weiteres klar, daß jetzt der Begriff der Grenze auf eine einfache Weise definiert werden kann, und zwar für eine Funktion $f(x)$, welche auch für die Zahlen $x + \varepsilon_m$ definiert ist. Dann können wir die Zahlen

$$f(x_0 + \varepsilon_m)$$

als die „Grenzwerte" der Funktion $f(x)$ im Punkte x_0 definieren, wobei ein beliebiger Grenzwert $f(x_0 + \varepsilon_m)$, für welchen die Bedingung

$$|f(x_0 + \varepsilon_m) - f(x_0)| = \varepsilon_m \cdot M,$$

wo M größer als ε_m für ein beliebiges induktives m ist, als die „Grenze" von $f(x)$ im Punkte x_0 betrachtet werden kann.

Der Körper von Brüchen von ganzen Zahlen kann auf einen Unterkörper eines Zahlenringes zurückgeführt werden, welchen wir als den Ring der *Progressionszahlen* bezeichnen werden.

Ist irgendeine Progression

(1) $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$$

von reellen Zahlen gegeben, so ist dadurch die Menge X_{a_i} aller Progressionen von reellen Zahlen, welche mit der Progression (1) vom n-ten Gliede ab identiseh sind, eindeutig bestimmt. Diese Menge werden wir als die Progressionszahl $N_i(a_i)$ betrachten, so daß die Gleichheit:

$$X_{a_i} = N_i(a_i)$$

gelten darf.

Es ist klar, daß zwei beliebige Progressionszahlen $N_i(a_i)$, $N_i(\beta_i)$ kaum vergleichbar sind; gilt aber $a_k < \beta_k$ für $n < k$, wo n eine induktive Zahl ist, so können wir wohl schreiben:

$$N_i(a_i) < N_i(\beta_i).$$

Was nun die arithmetischen Operationen an den Progressionszahlen anbelangt, so sind sie auf sehr einfache Weise zu gewinnen. Lassen wir das Zeichen δ als ein beliebiges der Zeichen $+$, $-$, $\times$, $:$ gelten, wobei für einen gegebenen Satz der Sinn des Zeichens als fixiert angenommen wird, so haben wir:

$$N_i(a_i) \delta N_i(\beta_i) = N_i(a_i \delta \beta_i),$$

inwiefern $a_i \delta \beta_i$ für beliebige a_i, β_i eine reelle Zahl darstellt. — Daraus folgt eine Beschränkung der Division. Enthält die Progression β_i eine abzählbare Menge von Nullpunkten, so bezeichnet „$N_i(a_i) : N_i(\beta_i)$“ keine Zahl, enthält aber die Progression β_i eine induktive Anzahl von Nullpunkten, so gibt es eine induktive Zahl k, so daß:

$$\beta_{k+i} + 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nun ist offenbar

$$N_i(\beta_i) = N_i(\beta_i'),$$

wo

$$\beta_i' = 1 \quad \text{für} \quad i < k,$$

$$\beta_i' = \beta_i \quad \text{für} \quad i \geqq k.$$

Dann ist die Operation $N(a_i) : N(\beta_i')$ wohl bestimmt, und wir haben

$$N_i(a_i) : N_i(\beta_i') = N_i(a_i : \beta_i').$$

In diesem Falle haben wir also auch:

$$N_i(a_i) : N_i(\beta_i) = N_i(a_i : \beta_i').$$

Ist nun $f(x)$ irgendeine Funktion von reellen Zahlen, welche für die Glieder der Progression a_i eindeutig bestimmt ist, so kann diese Funktion auch für den Punkt $N(a_i)$ definiert werden und zwar mittels des Schemas:

$$f(N_i(a_i)) = N_i(f(a_i)).$$

Wir sehen, daß die Progressionszahlen dazu geeignet sind, die Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen in erheblichem Maße zu verallgemeinern.

Es ist nun leicht zu sehen, daß eine beliebige reelle Zahl α im Ringe der Progressionszahlen ihr Bild in eineindeutiger Weise finden wird, wenn man ihr die Progressionszahl $N_i(1^i, \alpha)$ entsprechen lassen wird. Es ist leicht zu zeigen, daß die arithmetischen Operationen an den Zahlen von der Form $N_i(1^i, \alpha)$ wieder zu Zahlen solcher Form führen. Vielmehr haben wir ja das Schema:

$$f(N_i(1^i \cdot \alpha)) = N_i(1^i f(\alpha)),$$

woraus folgt, daß die Funktionentheorie der reellen Zahlen mit der Funktionentheorie der Zahlen $N_i(1^i \cdot \alpha)$ isomorphisch ist. — Nun können wir auch den Körper der Brüche von ganzen Zahlen auf einen Unterkörper des Ringes der Progressionszahlen isomorphisch abbilden, indem wir der endlichen Zahl Ω die Zahl $N_i(i)$ entsprechen lassen. Dann ist eine beliebige Zahl von der Form

$$\frac{\sum_{l/0}^{m} \alpha_l \Omega^l}{\sum_{l/0}^{n} \beta_l \Omega^l},$$

wo α_l, β_l reelle Zahlen sind, auf folgende Weise durch eine Progressionszahl eindeutig zu ersetzen.

Bemerken wir zunächst, daß die Gleichung

$$\sum_{i \cdot 0}^{n} \beta_i x^i = 0$$

höchstens n Wurzel haben kann. Ist q eine induktive Zahl, welche von allen induktiven Wurzeln dieser Gleichung größer ist, und bilden wir die Progression σ_i, welche durch die Gleichheiten:

$$\sigma_i = q \quad \text{für} \quad i \leqq q,$$
$$\sigma_i = i \quad \text{für} \quad i \geqq q$$

definiert ist, so haben wir:

$$N_i(i) = N_i(\sigma_i),$$

und es ist klar, daß

$$\sum_{l/0}^{n} \beta_l \sigma_i^l \neq 0,$$

und zwar für ein beliebiges σ_i.

Wir sehen also, daß die Zahl

$$N_i\left(\frac{\sum_{l/0}^{m} \alpha_l \cdot i^l}{\sum_{l/0}^{n} \beta_l \cdot \sigma_i^l}\right)$$

auf eindeutige Weise bestimmt ist und als Bild der Zahl

$$\frac{\sum_{l\,0}^{m} \alpha_l \Omega^l}{\sum_{l\,0}^{n} \beta_l \Omega^l}$$

gelten darf.

Es ist zu bemerken, daß wegen des Isomorphismus dieser Abbildung die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik der Brüche der ganzen Zahlen als bewiesen betrachtet werden darf.

Die weitere Entwicklung der Theorie der Brüche der ganzen Zahlen ist also mit der Entwicklung der Theorie der Progressionszahlen eng verbunden. Diese Theorie, welche als eine weitgehende Verallgemeinerung der heutigen Funktionenlehre gelten dürfte, wäre in der Geometrie und in der theoretischen Physik schon deswegen wichtig, weil sie uns mit dem Begriff eines Differentials versöhnt, also die „sehr kleinen" Gebiete durch praktisch unendlich kleine Gebiete ersetzen erlaubt.

Die weitere Entwicklung der Theorie der Progressionszahlen ist die Sache der Zukunft. Hier möchte ich nur bemerken, daß die Fruchtbarkeit des Transcax durch die Theorie der Progressionszahlen gewissermaßen beschränkt zu werden scheint, da ja diese Theorie auch auf Grund der Cantorschen Mengenlehre gewonnen werden kann. Nichtsdestoweniger können wir bemerken, daß ohne die allgemeine Theorie der ganzen Zahlen, welche wir dem Transcax verdanken, die Theorie der Progressionszahlen ganz abstrakt wäre, da ja die Progressionszahl $N_i(i)$ an sich als keine Mächtigkeit betrachtet werden darf.

Bedenkt man, daß die mathematische Logik bis jetzt von der Mehrheit der Mengentheoretiker als ein Wortspiel betrachtet wird und daß man in den Lehrbüchern der Mengenlehre die induktiven Zahlen mit den endlichen Zahlen einfach identifiziert, wobei das Studium der endlichen Zahlen an sich außer acht gelassen wird, so ist daraus zu schließen, daß die Mathematik unter dem Einfluß der Logik eine ernsthafte Entwicklung erhoffen dürfte. Dabei aber muß die Idee vieler gleichberechtigter Systeme der Mengenlehre immer mehr in Vordergrund treten. Bedenkt man, daß noch Poincaré das sogenannte Prinzip der vollständigen Induktion als ein synthetisches Urteil a priori betrachtet hat und daß Zermelo und Whitehead und Russell dieses Prinzip zu beweisen bemüht waren, so ist es vielleicht nicht ohne Bedeutung, daß man einmal eben dieses Prinzip, als einen trivialen Satz der Kardinalzahlentheorie, dazu benutzt hat, eine Theorie der endlichen Zahlen zu entwickeln, für welche dieses keine Geltung hat.

VI.

Das Axiom der Affinität.

a) *Die Widerspruchslosigkeit des Axioms der Transzendenz.*

Die Widerspruchslosigkeit des Axioms der Transzendenz mit den Fundamentalsätzen der Logik und den Axiomen der primitiven Mengen (Sätze 1, 2, S. 445) kann einfach dadurch bewiesen werden, daß man den Begriff „Menge von Individuen" durch den Begriff „echte Menge von Individuen" ersetzt, wobei als *echte Mengen von Individuen* solche und nur solche Mengen von Individuen bezeichnet werden, für welche das Axiom der Transzendenz gültig ist. Auf diese Weise bekommt man ein beträchtlich verarmtes System der Mengenlehre, für welches aber die Huntingtonschen Postulate der Algebra der Mengen ihre Geltung aufbewahren.

Will man nun ein allgemeines System der auf dem Transcax begründeten Mengenlehre bekommen, so darf man den Begriff der *echten* Menge auch für höhere Typen einführen, wobei wir mit folgenden Begriffen zu tun haben müssen:

a) Die logische Summe $\mathfrak{S}\omega$ und das logische Produkt $\mathfrak{P}\omega$ der Menge ω von Mengen.

b) Die Nullmenge Λ_α und das Universum V_α von Mengen des Typus α; die komplementäre Menge $-\omega$ in bezug auf V_α.

c) Die Einheitsmenge $\iota`v$, deren einziges Element v ist, die Menge $\iota``\omega$ aller Einheitsmengen der Elemente von ω und $Cls`\omega$.

Um nun zu dem Begriffe einer *echten* Menge von Mengen zu gelangen, bemerken wir, daß wir höchstens über eine induktive Anzahl von Elementen beliebig entscheiden können, ob sie in einer Menge vorkommen oder nicht. Andere Elemente dürfen mittels einer allgemeinen Regel gewonnen werden. Diese Bemerkung führt uns zunächst auf den Begriff einer *einfachen* Menge von Mengen. Eine Menge ω wird dann und nur dann als *einfach* bezeichnet, wenn sie neben einem beliebigen Elemente σ die Menge $(\sigma \cap - \iota`u) \cup \iota`v$ als Element enthält, wo u ein beliebiges Element von $\sigma \cap - \mathfrak{P}\omega$, v aber ein beliebiges Element von $\mathfrak{S}\omega \cap -(\sigma \cup \mathfrak{P}\omega)$ ist, oder wenn sie die komplementäre Menge einer solchen Menge ist.

Wir werden eine einfache Menge dann und nur dann als *echt* bezeichnen, wenn ihre logische Summe und ihr logisches Produkt echte Mengen sind.

Ist ω eine einfache echte Menge, so ist es leicht zu zeigen, daß dann auch $\mathfrak{S}(-\omega)$ und $\mathfrak{P}(-\omega)$ echte Mengen sind.

Ein einfaches Kalkül zeigt, daß das logische Produkt zweier einfachen echten Mengen die komplementäre Menge der Summe zweier einfachen echten Mengen oder eine solche Summe sein muß.

Neben einfachen echten Mengen werden wir mit *wesentlich echten* Mengen zu tun haben, d. h. solchen Mengen von echten Mengen, deren beliebiger Untermenge ω eine echte logische Summe $\mathfrak{S}\omega$ und ein echtes logisches Produkt $\mathfrak{P}\omega$ zukommt.

Jetzt können wir zu der folgenden Definition einer *echten* Menge von Mengen übergehen:

Eine Menge von echten Mengen wird dann und nur dann als *echt* bezeichnet, wenn sie die logische Summe einer induktiven Menge von einfachen echten Mengen, wesentlich echten Mengen, komplementären Mengen von wesentlichen Mengen und induktiven Mengen, bzw. komplementären Mengen von induktiven Mengen ist oder als die komplementäre Menge einer solchen Menge betrachtet werden kann.

Diese Definition ist offenbar auf diese Weise konstruiert, daß die Huntingtonschen Postulate der Mengenalgebra für echte Mengen von Mengen erfüllt sind. Weiter können wir ohne jede Schwierigkeit ersehen, daß die unter a), b), c) angegebenen Operationen an echten Mengen zu echten Mengen führen müssen.

Von Mengen von Beziehungen sehen wir gänzlich ab, indem wir sie mit numerisch gleichen Mengen von Mengen ersetzen werden. Dabei handelt es sich offenbar um *homogene* Beziehungen, d. h. solche Beziehungen, welche zwischen Gegenständen desselben Typus vorkommen. Andere Beziehungen können in der ganzen Mathematik durch homogene Beziehungen mittels der Operation $\iota``\omega$ ersetzt werden[20]). Nun kann eine beliebige Beziehung, inwiefern sie homogen ist, als eine Menge von Mengenpaaren betrachtet werden. Ist die Beziehung R gegeben und haben wir uRv, so bilden wir die Menge der Mengen $\iota`(\iota`v \cup \iota`u) \cup \iota`\iota`v$, wo u, v beliebige Elemente desselben Typus sind. Diese Menge können wir als das Mengenbild von R bezeichnen.

Es ist leicht zu beweisen, daß einem geordneten Elementenpaare $u \downarrow v$ eine ganz bestimmte Menge entspricht, und daß einer beliebigen Menge: $`(\iota`v' \cup \iota`u') \cup \iota`\iota`v'$ ein ganz bestimmtes Elementenpaar $u' \downarrow v'$ entspricht. Auf diese Weise ist unsere Aufgabe vollständig gelöst[21]).

---

[20]) Diese Methode wurde insbesondere in meiner „Theory of constructive Types" benutzt.

[21]) Diese Reduktion wurde im Anschluß auf die Zermelosche Mengenlehre von Kuratowski gegeben (Sur la notion de l'ordre, Fundamenta Mathematicae 2).

In der Theorie der Kardinalzahlen sind folgende Operationen an Beziehungen zu benützen:

a) Die komplementäre Beziehung $-R$ einer Beziehung R.

b) Die konverse Beziehung $Cnv`R$.

c) Die Nullbeziehung, die universelle Beziehung und die Identitätsbeziehung.

d) Das relative Produkt $R|P$ der Beziehungen R, P, d. h. die Beziehung zwischen u, w, welche dann und nur dann besteht, wenn für ein gewisses v die Bedingungen uRv und vPw gelten.

e) Der äußere und der hintere Bereich der Beziehung R, mit $D`R$ bzw. mit $\mathcal{C}`R$ bezeichnet.

f) Das R-Bild von α, mit $R``\alpha$ bezeichnet, d. h. die Untermenge von $D`R$, deren Elementen mittels R ein Element von α zugesprochen wird.

g) Eine in bezug auf R *hereditäre* Menge, d. h. eine beliebige Menge α, in welcher $(Cnv`R)``\alpha$ als Untermenge enthalten ist.

h) Die zu R gehörende *anzestrale Beziehung* R_*, d. h. die Beziehung, welche zwischen einem beliebigen Elemente u von $D`R$ oder $\mathcal{C}`R$ und allen Elementen des logischen Produkts (Durchschnitts) aller hereditären Mengen besteht, welche u als Element enthalten.

i) Kardinalzahl (Mächtigkeit einer Menge), die arithmetischen Operationen $\lambda + \mu$, $\lambda - \mu$, $\lambda \times \mu$, λ^{μ} und die arithmetische Summe $\sum\omega$ und Produkt $\prod\omega$ einer Menge ω von Kardinalzahlen.

Eine Beziehung R wird dann und nur dann als *echt* bezeichnet werden, wenn das Mengenbild von R, sowie $D`R$ eine echte Menge ist, wenn dasselbe für das $R$-Bild bzw. $Cnv`R$-Bild einer beliebigen echten Menge der Fall ist und wenn die R_*-Bilder und $Cnv`R_*$-Bilder von Einheitsmengen wesentlich echte Mengen sind oder wenn R_* einer der Beziehungen $R, R|R, (R|R)|R \ldots$ gleich ist[22]).

Die Theorie der echten Beziehungen ist offenbar umfangreich und ohne strengen logischen Symbolismus kaum durchführbar. Doch ist es leicht zu ersehen, daß diese Anwendungen dieser Theorie, welche in der Kardinalzahlenlehre vorkommen, in jedem einzelnen Falle zu echten Mengen und Beziehungen führen dürfen. So erkennt man z. B., daß die Kardinalzahlen echte Mengen sind und daß eine beliebige Menge von Kardinalzahlen eine wesentlich echte Menge sein muß. Ist nämlich n eine Kardinalzahl, so ist offenbar $\mathfrak{P}n$ die Nullmenge, $\mathfrak{S}n$ aber das Universum

[22]) Diese Bedingungen sind keinesweges voneinander unabhängig.

von Mengen gewissen Typus bzw. von Individuen. Dasselbe muß offenbar auch für $\mathfrak{P}(-n)$ bzw. $\mathfrak{S}(-n)$ gelten und infolgedessen auch für $\mathfrak{P}\omega$ bzw. für $\mathfrak{S}\omega$, wo ω eine Menge von Kardinalzahlen, oder die komplementäre Menge einer solchen Menge ist.

Nun gehe ich zu dem Beweise des folgenden fundamentalen Satzes:

Satz. *Bezeichnen wir mit $\iota``\alpha$ die Menge aller Einheitsmengen der Elemente von $\alpha$, so ist in der Theorie der echten Mengen $\iota``\iota``V_x$ mit NC*induct, *d. h. mit der Menge der induktiven Zahlen unvergleichbar.*

Anmerkung. Ich bediene mich mit $\iota``\iota``V_x$ statt V_x, da wir uns auf homogene Beziehungen beschränkt haben.

Beweis. Nehmen wir an, daß es eine ein-eindeutige echte Beziehung R zwischen *NC*induct und einer echten Untermenge von $\iota``\iota``V_x$ gibt. Dann ist das R-Bild der gleichen Zahlen, sowie jenes der ungleichen Zahlen keine echte Menge. Wir kommen also auf einen Widerspruch. Angenommen $\iota``\iota``V_x$ ist mit einer Menge von induktiven Zahlen numerisch gleich, so muß diese Menge abzählbar sein. Da nun das relative Produkt zweier echten Beziehungen eine echte Beziehung ist, so darf es eine ein-eindeutige echte Beziehung zwischen $\iota``\iota``V_x$ und *NC*induct geben. Das aber wurde schon oben ausgeschlossen. Damit ist unser Satz bewiesen.

Aus diesem Satze folgt nun sofort die *Unabhängigkeit des Axioms der Trichotomie von den Axiomen der primitiven Mengen und den Fundamentalsätzen der Logik*[23]).

b) *Die Beschränkungen des Axioms der Trichotomie.*

Hat es sich nun einmal gezeigt, daß es ein System der Mathematik geben kann, in welchem das Axiom der Trichotomie nicht allgemein gültig ist, so finden wir daran eine Bestätigung der oben angeführten Behauptung, daß wir in diesem Falle keineswegs mit einem Fundamentalsatze der Mengenlehre, vielmehr aber mit einer Hypothese zu tun haben, welche als eine Beschränkung des primitiven Mengenbegriffes gelten darf. Ist es der Fall, so scheint es zunächst ratsam, das Axiom der Trichotomie soweit wie möglich zu beschränken. Es ist nun interessant, daß die Annahme des Axioms der Abzählbarkeit eine weitgehende Beschränkung des Axioms der Trichotomie zuläßt, wodurch aber ein System der Mengenlehre herauskommt, in welchem die numerische Vergleichbarkeit von zwei beliebigen Mengen bewiesen werden kann. Dazu genügt es, das Axiom

[23]) Der von Fraenkel (l. c.) gegebene Beweis der Unabhängigkeit des Auswahlprinzips von den Axiomen der Zermeloschen Mengenlehre konnte hier nicht benützt werden, da er der rein logischen Auffassung der Mengenlehre nicht angepaßt ist.

der Trichotomie durch den folgenden Satz zu ersetzen, den ich als das Axiom der Affinität (Affinax) gelten lassen möchte:

Sind α, β innerlich vergleichbare Mengen, und ist α numerisch vergleichbar mit β, so ist es auch für $Cls`\alpha$ der Fall.

Es ist leicht zu sehen, daß aus diesem Axiom und aus dem Axiom der Abzählbarkeit die Wohlordnung von V_x, $Cls`V_x$, $Cls`Cls`V_x$ usw. folgt. Bemerkt man nun, daß die Mengen von Beziehungen oben eliminiert wurden, so ist aus dem hier Gesagten zu folgern, daß in unserem Falle die Trichotomie von zwei beliebigen Mengen bekommen werden kann. Wir sind also zu einem System der Mengenlehre gelangt, welches dem Cantorschen System äquivalent ist.

Nun möchten wir fragen, ob ein System möglich ist, in welchem Transcax und Affinax als Hypothesen benützt werden[24]). Es ist leicht zu sehen, daß Affinax auf keinen Widerspruch mit Transcax führen kann, obwohl von einem Beweise dieser Tatsache kaum die Rede sein kann. Die Schwierigkeiten eines solchen Beweises sind ganz analog denen, mit welchen man im Falle des Axioms der Abzählbarkeit und des Affinax zu tun hat. Das Affinax erlaubt uns aus Transcax zu folgern, daß $\Omega^n \leqq 2^\Omega$ ist, sonst aber scheint es für endliche Zahlen ohne Bedeutung zu sein. Nun könnte man daran denken, das Affinax in der Weise zu beschränken, daß es in bezug auf endliche Mengen ganz unfruchtbar wäre. Das kann man zunächst dadurch erzielen, daß man von den in Affinax benutzten Mengen α, β fordert, daß sie transfinit seien, oder kann man einfach das folgende Axiom annehmen, das wir als das spezielle Affinax bezeichnen können:

Gibt es eine Wohlordnung von α, so ist es auch für $Cls`\alpha$ der Fall.

Es ist klar, daß das spezielle Affinax, welches nur auf wohlgeordnete Mengen angewandt werden kann, die Möglichkeit eines Widerspruchs mit Transcax in höchstem Grade unwahrscheinlich macht. Andererseits ist es für die Mengenlehre ebenso fruchtbar, wie das Axiom der Trichotomie. Bemerken wir nämlich, daß die Menge der induktiven Zahlen eine Wohlordnung besitzt, so folgt aus dem speziellen Affinax, daß es auch für $Cls`NC$induct, $Cls`Cls`NC$induct usw. der Fall sein muß. Wir sehen also, daß wenn wir die induktiven Zahlen als sui generis Individuen be-

[24]) Vgl. meine „Theory of constructive Types" l. c. S. 97. Zunächst habe ich das Axiom der Affinität in einer noch allgemeineren Weise formuliert und zwar in der folgenden: Sind α, β innerlich vergleichbar, so ist: $\alpha \overline{spec}\ \beta \equiv Cls`\alpha \overline{spec}\ \beta$. (Vgl. Atti del V. Congresso Internazionale di Filosofia, Napoli 1925). Diese Formulierung scheint trotz ihrer Allgemeinheit nicht mehr fruchtbar als die hier angegebene zu sein.

nützen, wir eben dasselbe für die Theorie der Kardinalzahlen gewinnen müssen, was uns das Axiom der Abzählbarkeit zusammen mit dem Axiom der Trichotomie gibt.

Wir kommen also zu dem folgenden Resultate:

Nehmen wir die Axiome der primitiven Mengen und das Axiom der speziellen Affinität an, so bekommen wir ein System, welches ebenso fruchtbar und in demselben Sinne widerspruchslos ist, wie die auf den Axiomen der Abzählbarkeit und der Trichotomie begründete Mengenlehre.

Nehmen wir noch das Axiom der endlichen Mengen (3′, S. 449) *an, bekommen wir eine verallgemeinerte Mengenlehre, welche neben der üblichen Theorien die Theorie der transzendenten Zahlen enthält.*

c) *Einige Bemerkungen über die endgültige Lösung des Trichotomieproblems.*

Auf jeden Fall besitzt das Affinax, sowohl wie das Axiom der Trichotomie den Nachteil, die Wohlordnung des Kontinuums im positiven Sinne zu entscheiden, was ja immer bezweifelt werden kann. Es ist bemerkenswert, daß wenn man statt des Affinax ein Auswahlprinzip annimmt, welches die Existenz einer ausgewählten Menge nur in bezug auf eine *wohlgeordnete Menge von Mengen* im Sinne Borels und Lebesgues zuläßt, so bekommt man ein fruchtbares System, welches die Wohlordnung des Kontinuums und die aus ihr bekommenen pseudo-paradoxalen Resultate von Hausdorff[25]) und Banach und Tarski[26]) nicht enthält. Dann aber schwebt man wirklich im Dunkeln, da ja so viel Arbeitshypothesen dieser Gattung, wie man will, angenommen werden können.

Die endgültige Lösung des Problems der Trichotomie kann meiner Überzeugung nach erst auf Grund der reinen Typenlehre erhofft werden, welche den Cantorschen Beweis der Existenz der Menge aller reellen Zahlen nicht zuläßt, nichtsdestoweniger aber mit beliebigen reellen Zahlen und sogar mit dem Lebesgueschen Maße zu tun hat[27]).

Diese Theorie, welche uns Mengen eines gegebenen Typus mit „konstruierbaren" Mengen dieses Typus zu identifizieren erlaubt, läßt uns das *Axiom der Abzählbarkeit in einem beliebigen Typus annehmen.* Auf diese Weise bekommen wir ein Untersystem der reinen Typenlehre, welches wir als das *System des Nominalismus* bezeichnen können. Dieses höchst intuitive System dürfte uns die Schwierigkeiten der modernen Mengenlehre und insbesondere die oben zitierten Probleme von Hausdorff und

[25]) Hausdorff, l. c. S. 469.

[26]) Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fundamenta Mathematicae 6.

[27]) Vgl. meine „Theory of constructive Types" und die auf S. 3 zitierten Arbeiten.

Banach-Tarski endgültig lösen lassen. Neben diesem System wären die auf Grund des Axioms der Abzählbarkeit und Affinax bzw. auf Transcax und Affinax begründeten Systeme als spezielle Systeme der Mengenlehre zu behandeln, und zwar das erstere als das *System des Realismus*, das andere aber als das *System des Hyperrealismus*[28]). Wird einmal das System der reinen Typenlehre mit den hier genannten Spezialsystemen fertiggestellt werden, so werden wir von der allgemeinen Mengenlehre sprechen können. Das ist aber die Sache der Zukunft.

[28]) Vgl. Theory of constructive Types, S. 96.

(Eingegangen am 5. Mai 1925.)

Existenzbeweise für algebraische Körper mit vorgeschriebenen Eigenschaften.

Von

Öystein Ore in Oslo (Norwegen).

In dieser Note werde ich einige Untersuchungen über die Existenz von algebraischen Körpern durchführen, worin gegebene Primzahlen vorgeschriebene Primidealzerlegungen haben sollen, und weiter die Körperdifferente durch gegebene Potenzen dieser Primideale teilbar sein soll.

Um diese Beweise durchzuführen, brauche ich verschiedene Sätze über Eisensteinsche Gleichungen, und diese Sätze werden anfangs abgeleitet.

Zuletzt löse ich noch die folgende Aufgabe: Wenn die Zahl n und die Primzahl p gegeben sind, welche ist die höchste Potenz von p, die als Diskriminantenteiler in einem algebraischen Körper n-ten Grades vorkommt? Diese Aufgabe läßt sich auf Grund der vorangehenden Untersuchungen einfach lösen.

§ 1.

Eine Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten a_i wird eine *Eisensteinsche Gleichung in bezug auf die Primzahl* p genannt, wenn in $f(x)$ alle Koeffizienten durch p teilbar sind. Die folgenden Sätze gelten aber auch unter anzugebenden Bedingungen für nicht-Eisensteinsche Gleichungen, d. h. Gleichungen, in denen nicht *alle* Koeffizienten durch p teilbar sind.

Im folgenden sollen Körper untersucht werden, welche durch eine irreduzible Eisensteinsche Gleichung n-ten Grades definiert sind.

Für die weitere Untersuchung der Eigenschaften eines solchen Körpers spielen die *Newtonschen Polygone von* $f(x)$ *in bezug auf* p eine wichtige Rolle. Wenn man annimmt, daß in (1) der Koeffizient a_i genau durch p^{α_i} teilbar ist, werden die Zahlenpaare

$$(0, 0)(1, \alpha_1), \ldots, (n, \alpha_n)$$

als Gitterpunkte bei rechtwinkligem Koordinatensystem gedeutet, und zu diesen Gitterpunkten konstruiert man das zugehörige Newtonsche Polygon S, das also immer in $(0, 0)$ anfängt.

Die Seiten von S seien mit

$$S_1, S_2, \ldots, S_k$$

bezeichnet, und

$$l_1, l_2, \ldots, l_k$$

bzw.

$$h_1, h_3, \ldots, h_k$$

seien die Projektionen dieser Seiten auf die X-Achse und Y-Achse. Die Zahlen l_i und h_i sind alle ganz rational; der größte gemeinsame Faktor von l_i und h_i soll mit e_i bezeichnet werden, so daß man

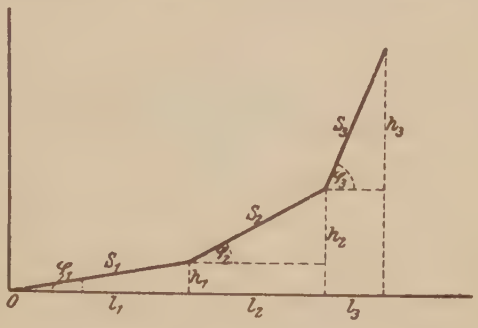


Fig. 1.

$$l_i = e_i \lambda_i, \qquad h_i = e_i \varkappa_i$$

schreiben kann, wobei λ_i zu $\varkappa_i$ relativ prim ist. Wenn in $f(x)$ nicht alle Koeffizienten durch p teilbar sind, kann die erste Seite S_1 mit der X-Achse zusammenfallen, und man setzt in diesem Falle $h_1 = \varkappa_1 = 0$ und $\lambda_1 = 1$.

Ich nehme nun in $f(x)$ die Glieder $a_s x^s$ aus, welche durch Punkte auf der i-ten Seite S_i des Polygones abgebildet werden. Bezeichnet man die Summe dieser Glieder mit $\psi_i(x)$, so hat $\psi_i(x)$, wie man leicht sieht, die Form

$$\psi_i(x) = x^\alpha p^\beta (b_{i,0} x^{l_i} + b_{i,1} p^{\varkappa_i} x^{l_i - \lambda_i} + b_{i,2} p^{2\varkappa_i} x^{l_i - 2\lambda_i} + \ldots + b_{i,e_i} p^{h_i}),$$

wobei α und β ganze positive Zahlen sind, während die Koeffizienten $b_{i,j}$ sämtlich ganze rationale Zahlen sind. Außerdem ist $b_{i,0}$ und b_{i,e_i} nicht durch p teilbar, indem sie dem Anfangspunkte und Endpunkte der Seite S_i entsprechen [1]).

Bestimmt man jetzt die Zahl A_i, so daß

$$A_i b_{i,0} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, und wird

$$A_i b_{i,j} = d_{i,j}$$

gesetzt, so soll das Polynom

$$f_i(x) = x^{e_i \lambda_i} + d_{i,1} p^{\varkappa_i} x^{(e_i - 1)\lambda_i} + \ldots + d_{i,e_i} p^{e_i \varkappa_i} \tag{2}$$

[1]) Eine ausführlichere Durchführung von diesen Verhältnissen findet man in der Arbeit: Ö. Ore, Zur Theorie der Eisensteinschen Gleichungen, Math. Zeitschr. 20 (1924), S. 267–279, § 2.

der Faktor der i-ten Seite heißen. Für jede Seite kann man also aus (1) einfach den entsprechenden Faktor (2) bestimmen. Aus $f_i(x)$ leitet man weiter das Polynom

$$F_i(y) = y^{e_i} + d_{i,1}\, y^{e_i-1} + \ldots + d_{i,e_i} \tag{3}$$

ab, das das zugeordnete Polynom der i-ten Seite heißen soll. Zwischen $f_i(x)$ und $F_i(y)$ besteht die Relation

$$p^{e_i \varkappa_i} F_i\left(\frac{x^{\lambda_i}}{p^{\varkappa_i}}\right) = f_i(x).$$

Für zwei Polynome $g(x)$ und $h(x)$ mit demselben geradlinigen Polygone S_i wird

$$h(x) \equiv g(x) \pmod{S_i}$$

gesetzt, wenn in der Differenz $h(x) - g(x)$ alle repräsentierende Punkte oberhalb S_i liegen.

Ein Polynom $f_i(x)$ wird für sein rechtliniges Polygon S_i reduzibel genannt, wenn eine Zerlegung

$$f_i(x) \equiv g(x)\, h(x) \pmod{S_i} \tag{4}$$

besteht. Hier haben die Faktoren $g(x)$ und $h(x)$ die Form

$$g(x) = x^{t_i \lambda_i} + g_1\, p^{\varkappa_i} x^{(t_i-1)\lambda_i} + \ldots + g_{t_i} p^{t_i \varkappa_i}$$
$$h(x) = x^{s_i \lambda_i} + h_1\, p^{\varkappa_i} x^{(s_i-1)\lambda_i} + \ldots + h_{s_i} p^{s_i \varkappa_i};$$

setzt man hier

$$G(y) = y^{t_i} + g_1\, y^{t_i-1} + \ldots + g_{t_i}$$
$$H(y) = y^{s_i} + h_1\, y^{s_i-1} + \ldots + h_{s_i},$$

so muß, wenn die Zerlegung (4) bestehen soll, auch für (3) die entsprechende Zerlegung

$$F_i(y) \equiv G(y)\, H(y) \pmod{p}$$

bestehen.

Wenn folglich

$$F_i(y) \equiv F_1^{(i)}(y)\, F_2^{(i)}(y) \ldots F_{t_i}^{(i)}(y) \pmod{p} \tag{5}$$

die Primfunktionszerlegung von $F_i(y) \pmod{p}$ ist, wobei

$$F_j^{(i)}(y) = y^{e_j^{(i)}} + d_{1,j}^{(i)}\, y^{e_j^{(i)}-1} + \ldots + d_{e_j^{(i)},j}^{(i)},$$

so folgt daraus die eindeutige Zerlegung von (2)

$$f_i(x) \equiv f_1^{(i)}(x)\, f_2^{(i)}(x) \ldots f_{t_i}^{(i)}(x) \pmod{S_i}, \tag{6}$$

wobei

$$f_j^{(i)}(x) = x^{e_j^{(i)} \lambda_i} + d_{1,j}^{(i)}\, p^{\varkappa_i} x^{(e_j^{(i)}-1)\lambda_i} + \ldots + d_{e_j^{(i)},j}^{(i)}\, p^{e_j^{(i)} \varkappa_i}$$

ist. Für die Zahlen $\varepsilon_j^{(i)}$ besteht natürlich die Relation

$$\varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)} + \ldots + \varepsilon_{t_i}^{(i)} = e_i.$$

§ 2.

Es soll nun die folgende Definition gegeben werden:

Eine irreduzible Eisensteinsche Gleichung $f(x) = 0$ heißt regulär in bezug auf die Primzahl p, wenn in der Primfunktionszerlegung (5) *der zugeordneten Polynome der Seiten* (mod p) *für jede Seite nur verschiedene Primfunktionen vorkommen.*

Für Körper, welche durch eine reguläre Eisensteinsche Gleichung in bezug auf p definiert sind, kann man eine Reihe von einfachen Sätzen ableiten. Es sei ϑ eine Wurzel der Gleichung (1) und $P(\vartheta)$ der aus ϑ abgeleitete Körper n-ten Grades. Wendet man dann meine allgemeinen Untersuchungen über algebraische Körper[2]) auf diesen Spezialfall an, so folgt einfach der Satz:

Satz 1. *Wenn die Gleichung* (1) *in bezug auf p regulär ist, so hat p in $P(\vartheta)$ die Primidealzerlegung*

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_1^{(1)} \mathfrak{p}_2^{(1)} \ldots \mathfrak{p}_{t_1}^{(1)})^{\lambda_1} (\mathfrak{p}_1^{(2)} \ldots \mathfrak{p}_{t_2}^{(2)})^{\lambda_2} \ldots (\mathfrak{p}_1^{(k)} \ldots \mathfrak{p}_{t_k}^{(k)})^{\lambda_k},$$

wobei

$$N\mathfrak{p}_j^{(i)} = p^{\varepsilon_j^{(i)}}$$

ist.

Weiter folgt aus denselben Untersuchungen[3]) die Zerlegung von $f(x)$ für Moduln, welche Potenzen von p sind, indem man den folgenden Satz beweisen kann:

Satz 2. *Wenn die Gleichung* (1) *in bezug auf p regulär ist, besteht eine Zerlegung*

$$f(x) \equiv [\Phi_1^{(1)}(x) \ldots \Phi_{t_1}^{(1)}(x)][\Phi_1^{(2)}(x) \ldots \Phi_{t_2}^{(2)}(x)] \ldots [\Phi_1^{(k)}(x) \ldots \Phi_{t_k}^{(k)}(x)] \pmod{p^\alpha},$$

wobei ein Faktor $\Phi_j^{(i)}(x)$ vom Grade $\varepsilon_j^{(i)} \lambda_i$ ist, und in bezug auf p ein geradliniges Polygon mit derselben Neigung wie S_i hat.

Wenn α hinreichend groß ist, d. h. jedenfalls wenn α größer als der Exponent ist, worin p in der Gleichungsdiskriminante von $f(x) = 0$ aufgeht, so werden die Faktoren $\Phi_j^{(i)}(x)$ (mod p^α) irreduzibel.

---

[2]) Man sehe: Ö. Ore, Zur Theorie der algebraischen Körper, Acta Math. 44 (1923), S. 219–314, Satz 24.

[3]) Man sehe auch: Ö. Ore, Bestimmung der Diskriminante eines algebraischen Körpers, Acta Math. 45 (1924), S. 303–344, Satz 1.

Man ersieht, wie es zu jedem Faktor $\Phi_j^{(i)}(x)$ auch ein entsprechendes Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ gibt, wie es nach dem Henselschen Hauptsatze sein muß.

Weiter kann man verschiedene interessante Sätze ableiten, welche sich auf die Diskriminante und Differente dieser Gleichung beziehen. Bezeichnet man die Gleichungsdiskriminante mit D und die Körperdiskriminante von $P(\vartheta)$ mit d, besteht bekanntlich die Beziehung

$$D = k^2 d, \tag{7}$$

wobei k eine ganze rationale Zahl ist, welche der *Index* von ϑ genannt wird. Für Eisensteinsche Gleichungen kann man nun sehr einfach bestimmen, welche Potenz von p die Zahl k enthält. Bezeichnet man nämlich mit L die Anzahl der Gitterpunkte, welche im Gebiete zwischen dem Polygon S und der X-Achse und der Endordinate des Polygones liegen, wobei man bei der Berechnung keine Punkte auf der X-Achse oder Endordinate mitrechnet, wohl aber solche, welche sonst auf dem Polygone S liegen, so gilt der einfache Satz [4]):

Satz 3. *Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ in bezug auf p regulär ist, und weiter L die Anzahl der Gitterpunkte ist, welche zwischen dem Polygone und der X-Achse liegen, so ist der Index k genau durch p^L teilbar. Für L hat man auch den Ausdruck*

$$L = l_2 h_1 + l_3(h_1 + h_2) + \ldots + l_k(h_1 + h_2 + \ldots + h_{k-1}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(h_i l_i - h_i - l_i - e_i).$$

Der letzte Ausdruck folgt durch eine einfache Berechnung von L.

Bezeichnet man weiter die Körperdifferente von $P(\vartheta)$ mit $\mathfrak{d}$, so besteht bekanntlich auch weiter die Relation

$$f'(\vartheta) = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{d}, \tag{8}$$

wobei das Ideal $\mathfrak{f}$ den Führer des Ringes

$$[1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{n-1}]$$

bezeichnet. Man hat dann den weiteren Satz über die Zusammensetzung des Ideals $\mathfrak{f}$: [5])

Satz 4. *Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ in bezug auf p regulär ist, wird der Führer $\mathfrak{f}$ durch das Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ genau in der Potenz*

$$\mathfrak{p}_j^{(i)(h_1+\ldots+h_l)\lambda_l+(l_{l+1}+\ldots+l_k)\varkappa_l-\lambda_l-\varkappa_l+1}$$

teilbar.

---

[4]) Die in [3]) zitierte Arbeit, Satz 8.

[5]) Man sehe: O. Ore, Bestimmung der Differente eines algebraischen Körpers, Acta Math. 46 (1925), S. 363—392, Satz 10.

Weiter bestimmt man die Körperdifferente, indem man findet[6]):

Satz 5. *Die Körperdifferente ist durch ein Primideal $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ genau in der Potenz*

$$\mathfrak{p}_j^{(i)\,\lambda_i - 1 + \varrho_j^{(i)}}$$

teilbar, wobei $\varrho_j^{(i)} = 0$, wenn λ_i nicht durch p teilbar, und $\varrho_j^{(i)} \geqq 1$, wenn λ_i durch p teilbar ist.

Die Zahl $\varrho_j^{(i)}$ heißt die *Supplementzahl* des Primideals $\mathfrak{p}_j^{(i)}$.

Durch die Sätze 4 und 5 folgt nach (8) auch sofort, welche Potenz von $\mathfrak{p}_j^{(i)}$ in der Differente $f'(\vartheta)$ der Zahl ϑ aufgeht.

Indem man sich erinnert, daß die Körperdiskriminante gleich der Norm der Körperdifferente ist, folgt aus Satz 5, daß die Körperdiskriminante durch die Potenz

$$p^{\sum\limits_{i,j} \varepsilon_j^{(i)} \left(\lambda_i - 1 + \varrho_j^{(i)}\right)} = p^{n + \sum\limits_{i,j} \left(\varrho_j^{(i)} - 1\right) \varepsilon_j^{(i)}} \tag{9}$$

von p genau teilbar ist. Nach Satz 3 und (7) folgt dann auch, welche Potenz von p die Gleichungsdiskriminante enthält.

Wie man bemerkt, beruht die obige Bestimmung der Körperdifferente und Körperdiskriminante auf der Kenntnis der Supplementzahlen $\varrho_j^{(i)}$ und eine Bestimmung dieser Zahlen ist daher erforderlich. Dies folgt aber einfach aus dem Satze 2; man wählt nämlich in der Zerlegung von $f(x) \pmod{p^a}$ den Exponenten a größer als den Exponenten, worin p in der Gleichungsdiskriminante D vorkommt, und bildet das Polynom

$$[\Phi_j^{(i)}(x)]' = \Phi_j'^{(i)}(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{\varepsilon_j^{(i)} \lambda_i - 1} x^{\varepsilon_j^{(i)} \lambda_i - 1}.$$

Wenn hier die Zahl b_s allgemein durch p^{β_s} genau teilbar ist, so hat man den folgenden Satz[7]):

Satz 6. *Wenn M die kleinste unter den Zahlen*

$$\beta_s \lambda_i + s \varkappa_i \qquad (s = 0, 1, \ldots, \varepsilon_j^{(i)} \lambda_i - 1)$$

bezeichnet, so ist

$$\varrho_j^{(i)} = M - \varepsilon_j^{(i)} \lambda_i \varkappa_i + \varkappa_i.$$

Nach diesem Satze können also immer die Supplementzahlen berechnet werden.

Für eine spätere Anwendung ist auch die folgende Bemerkung von Wichtigkeit:

---

[6]) Die in [5]) zitierte Arbeit, Satz 11.

[7]) Die in [5]) zitierte Arbeit, Satz 13.

Für die Zahlen $\varrho_j^{(i)}$ kann man einfach eine obere Grenze angeben; wenn nämlich die Zahl λ_i genau durch p^{e_i} teilbar ist, so hat man, wie zuerst von Herrn Hensel[8]) bewiesen ist, die Ungleichheit

$$\varrho_i \leqq e_i \lambda_i .$$

Nach (9) und Satz 3 folgt daher, daß man für eine in bezug auf p reguläre Gleichung eine solche, nur von der Form des Polygones abhängige Zahl G finden kann, daß wenn die Gleichungsdiskriminante D durch p^{Δ} genau teilbar ist, sicher $\Delta \leqq G$ wird.

§ 3.

Mittels des Satzes 1 läßt sich nun, wie ich schon früher gezeigt habe[9]), der folgende Existenzsatz einfach beweisen:

Satz 7. *Wenn ein System von ganzen rationalen und positiven Zahlen*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \tag{10}$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_r \tag{11}$$

so gegeben ist, daß

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots + \lambda_r m_r = n \tag{12}$$

ist, so existiert immer ein solcher Körper $F(\vartheta)$ n-ten Grades, daß in $P(\vartheta)$ eine beliebig gegebene Primzahl p die Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \mathfrak{p}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{\lambda_r}, \qquad N\mathfrak{p}_i = p^{m_i} \tag{13}$$

besitzt.

Die Aufstellung eines solchen Körpers geschah folgendermaßen: Zu jedem i wird eine Primfunktion $(\mathrm{mod}\ p)$ m_i-ten Grades

$$F_i(y) = y^{m_i} + a_{i,1} y^{m_i - 1} + \ldots + a_{i,m_i}$$

bestimmt, und es soll eine Gleichung $F(x) = 0$ bestimmt werden, so daß $F_i(y)$ das zugeordnete Polynom der i-ten Seite wird. Die Gleichung $F(x) = 0$ wird dann natürlich in bezug auf p regulär.

Man findet nun eine Reihe von Zahlen

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r,$$

so daß $\varkappa_i$ immer zu λ_i relativ prim ist und weiter

$$\frac{\varkappa_1}{\lambda_1} < \frac{\varkappa_2}{\lambda_2} < \ldots < \frac{\varkappa_r}{\lambda_r}.$$

---

[8]) K. Hensel, Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, Math. Annalen 55 (1902), S. 301–336.

[9]) Die in [1]) zitierte Arbeit, § 4.

Die Zahlen λ_i und $\varkappa_i$ können dann als die Projektionszahlen der Seiten eines Polygones S aufgefaßt werden, und aus $F_i(y)$ leitet man daher den Faktor der i-ten Seite S_i

$$f_i(x) = x^{m_i\lambda_i} + a_{i,1}\,p^{\varkappa_i}\,x^{(m_i-1)\lambda_i} + \ldots + a_{i,m_i}\,p^{m_i\varkappa_i} \tag{14}$$

ab. Weiter wird

$$\Pi(x) = f_1(x)\,f_2(x)\ldots f_r(x) \tag{15}$$

gesetzt, und man bildet das Polynom n-ten Grades

$$F(x) = \Pi(x) + p^{\alpha}M(x), \tag{16}$$

wobei $M(x)$ ein Polynom von höchstens $(n-1)$-ten Grade bezeichnet und

$$\alpha > m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_r\varkappa_r$$

gewählt worden ist. Die Gleichung $F(x) = 0$ definiert dann einen Körper mit der gewünschten Eigenschaft, wenn nur $F(x)$ irreduzibel ist; dies erreicht man aber einfach, indem man $M(x)$ so wählt, daß $F(x)$ in bezug auf einer anderen Primzahl q die Bedingungen des Eisensteinschen Satzes genügt.

Wie man bemerkt, hätte man auch statt (15) allgemeiner

$$\Pi(x) = (f_1(x) + A_1(x))\,(f_2(x) + A_2(x))\ldots(f_r(x) + A_r(x)) \tag{17}$$

setzen können, wenn nur die Polynome $A_i(x)$ so gewählt sind, daß der Grad von $A_i(x)$ kleiner als $m_i\lambda_i$ ist und weiter in $A_i(x)$ alle repräsentierenden Punkte oberhalb S_i liegen.

Ich bemerke auch, daß der Satz 7 sich auch auf eine beliebige endliche Anzahl

$$p_1, p_2, \ldots, p_t$$

von Primzahlen ausdehnen läßt, so daß, wenn die t Systeme von ganzen rationalen positiven Zahlen

$$\begin{matrix} \lambda_1^{(s)},\ \lambda_2^{(s)},\ \ldots.\ \lambda_{r_s}^{(s)} \\ m_1^{(s)},\ m_2^{(s)},\ \ldots,\ m_{r_s}^{(s)} \end{matrix} \qquad (s = 1, 2, \ldots, t)$$

so gegeben sind, daß

$$\sum_{i=1}^{r_s} \lambda_i^{(s)}\,m_i^{(s)} = n \qquad (s = 1, 2, \ldots, t)$$

ist, ein Körper $P(\vartheta)$ n-ten Grades gefunden werden kann, in dem die Primidealzerlegungen

$$p_s = \mathfrak{p}_1^{(s)\lambda_1^{(s)}}\,\mathfrak{p}_2^{(s)\lambda_2^{(s)}}\ldots\mathfrak{p}_{r_s}^{(s)\lambda_{r_s}^{(s)}}, \qquad N\mathfrak{p}_i^{(s)} = p^{m_i^{(s)}}$$

bestehen. Denn konstruiert man für jede Primzahl p_s ein Polynom $\Pi_s(x)$

von der Form (15), so kann man ein irreduzibles Polynom $F(x)$ n-ten Grades bestimmen, wofür

$$F(x) \equiv \Pi_s(x) \pmod{p^{a_s}} \qquad (s = 1, 2, \ldots, t)$$

und die Gleichung $F(x) = 0$ wird dann den gewünschten Körper definieren[10]).

§ 4.

Wenn im Körper $P(\vartheta)$ die Primzahl p die Primidealzerlegung (13) besitzt, so ist allgemein noch nicht vollständig bestimmt, in welcher Potenz die Primideale $\mathfrak{p}_i$ in der Körperdifferente $\mathfrak{d}$ von $P(\vartheta)$ aufgehen. Man kann darüber nur folgendes sagen:

Die Körperdifferente ist allgemein durch

$$\mathfrak{p}_i^{\lambda_i - 1 + \varrho_i}$$

genau teilbar, wobei ϱ_i die *Supplementzahl* des Primideals $\mathfrak{p}_i$ heißt. Hier ist $\varrho_i = 0$, wenn λ_i nicht durch p teilbar ist. Wenn aber λ_i genau durch p^{s_i} teilbar ist, hat man nach einem schon früher erwähnten Satze von Herrn Hensel

$$1 \leqq \varrho_i \leqq s_i \lambda_i .$$

An einer anderen Stelle[11]) habe ich eingehender untersucht, welche Zahlen, die den Ungleichungen

$$1 \leqq \varrho \leqq s\lambda \tag{18}$$

genügen, auch wirklich für ein gegebenes, genau durch p^s teilbares λ als Supplementzahlen vorkommen können, und es ergab sich das folgende Resultat:

Es können alle Zahlen ϱ, welche der Ungleichung (18) *genügen, als Supplementzahlen vorkommen, außer den Ausnahmewerten*

$$(19) \quad \begin{cases} p\,, & 2p\,, \ \ldots, & \lambda - p\,, \\ \lambda, & \lambda + p^2, & \lambda + 2p^2, \ \ldots, & 2\lambda - p^2, \\ 2\lambda, & 2\lambda + p^3, & 2\lambda + 2p^3, \ \ldots, & 3\lambda - p^3, \\ \ldots\ldots\ldots\

kann man $\varrho = a\lambda + b$ schreiben, wobei $0 \leqq b < \lambda$ ist. Wenn dann b durch genau p^β teilbar ist, $\beta \geqq 0$, so gehört ϱ zu den Ausnahmezahlen (19) dann und nur dann, wenn $\beta > a$ ist.

Es wird nun im folgenden die Bezeichnung angewandt: Die Zahl ϱ heißt für eine gegebene Zahl λ eine *mögliche Supplementzahl*, wenn $\varrho = 0$ ist, sobald λ nicht durch p teilbar ist, ist ferner λ genau durch p^s teilbar, so soll $1 \leqq \varrho \leqq s\lambda$ sein, aber gleichzeitig ϱ nicht zu den Ausnahmezahlen (19) gehören.

Man kann dann den folgenden Existenzsatz beweisen:

Satz 8. *Wenn drei Systeme von ganzen rationalen Zahlen*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r,$$
$$m_1, m_2, \ldots, m_r,$$
$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r,$$

so gegeben sind, daß

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots + \lambda_r m_r = n$$

und weiter immer die Zahl ϱ_i zu λ_i für eine Primzahl p eine mögliche Supplementzahl bildet, so kann man einen Körper $P(\vartheta)$ n-ten Grades so bestimmen, daß in $P(\vartheta)$ die Primzahl p die Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \mathfrak{p}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{\lambda_r}, \qquad N\mathfrak{p}_i = p^{m_i}$$

besitzt und weiter die Körperdifferente δ von $P(\vartheta)$ genau durch

$$\mathfrak{p}_i^{\lambda_i - 1 + \varrho_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

teilbar ist.

Aus § 3 folgt zunächst, daß man einen Körper $P(\vartheta)$ n-ten Grades mit der gewünschten Primidealzerlegung von p durch die Gleichung $F(\vartheta) = 0$ erhält, wobei

$$F(x) = \Pi(x) + p^a M(x) \tag{20}$$

ist, und wobei jetzt angenommen werden soll, daß $\Pi(x)$ die allgemeinere Form (17) hat. Es soll nun gezeigt werden, daß man durch passende Wahl der Polynome $A_i(x)$ in (17) erreichen kann, daß auch die Körperdifferente durch die vorgeschriebene Potenz von $\mathfrak{p}_i$ teilbar wird.

Nach der Schlußbemerkung des § 2 folgt, daß man eine nur von den Zahlen λ_i und $\varkappa_i$ abhängige Zahl G finden kann, so daß wenn die Gleichungsdiskriminante von $F(x) = 0$ genau durch p^Δ teilbar ist, $\Delta < G$ wird. Wählt man nun in (20) $\alpha \geqq G$, so folgt daher, daß der Exponent Δ von der Wahl von $M(x)$ unabhängig ist.

Nach (20) bekommt man nun

$$F(x) \equiv (f_1(x) + A_1(x))(f_2(x) + A_2(x)) \ldots (f_r(x) + A_r(x)) \pmod{p^a}$$

und jedem Primideale $\mathfrak{p}_i$ entspricht der irreduzible Faktor

$$\Phi_i(x) = f_i(x) + A_i(x) \,(\mathrm{mod}\, p^a),$$

wie es nach dem Satze 2 der Fall ist. Um nun die Körperdifferente zu bestimmen, braucht man nur den Satz 6 anzuwenden, und da $\Delta < \alpha$ ist, das Polynom

$$\Phi_i'(x) = f_i'(x) + A_i'(x)$$

zu untersuchen, wo also nach (14)

$$(21) \qquad f_i'(x) = m_i \lambda_i x^{m_i \lambda_i - 1} + a_{i,1}(m_i - 1)\lambda_i \cdot p^{\varkappa_1} x^{(m_i-1)\lambda_i - 1} + \ldots + a_{i,m_i-1}\lambda_i \cdot p^{(m_i-1)\varkappa_i} x^{\lambda_i - 1}$$

ist.

Es sollen nun die verschiedenen $A_i(x)$ passend gewählt werden. Im Falle, wo λ_i nicht durch p teilbar ist, hat man $\varrho_i = 0$, und es folgt aus der Primidealzerlegung von p von selbst, daß die Körperdifferente durch $\mathfrak{p}_i^{\lambda_i - 1}$ genau teilbar ist. Man kann folglich in diesem Falle $A_i(x)$ beliebig wählen, z. B. $A_i(x) = 0$.

Wenn aber λ_i genau durch p^{s_i} teilbar ist, hat man also $1 \leqq \varrho_i \leqq s_i \lambda_i$. Ich behandle nun erstens den Fall, daß ϱ_i den Maximalwert $s_i \lambda_i$ hat. In diesem Falle kann man auch $A_i(x) = 0$ setzen. Dann ist also $\Phi_i'(x) = f_i'(x)$, wobei nach (21) ein Glied in $\Phi_i'(x)$ die Form

$$a_{i,j}(m_i - j)\lambda_i p^{j\varkappa_i} x^{(m_i - j)\lambda_i - 1}$$

hat. Wenn man hier annimmt, daß die Zahl $a_{i,j}(m_i - j)$ genau durch p^{α_j} teilbar ist, soll man nach Satz 6 die Zahlen

$$[\alpha_j + s_i + j\varkappa_i]\lambda_i + [(m_i - j)\lambda_i - 1]\varkappa_i \qquad (j = 0, 1, \ldots, m_i)$$

oder folglich

$$(22) \qquad \alpha_j \lambda_i + s_i \lambda_i + m_i \lambda_i \varkappa_i - \varkappa_i \qquad (j = 0, 1, \ldots, m_i)$$

bilden. Hier ist aber nur α_j von j abhängig und man sieht leicht ein, daß nicht alle α_j von Null verschieden sein können. Denn ist $\alpha_j > 0$, so ist entweder $a_{i,j}$ oder $m_i - j$ durch p teilbar. Wenn $a_{i,j}$ durch p teilbar ist, kommt das entsprechende Glied $a_{i,j} y^{m_i - j}$ in der Primfunktion $F_i(y)$ nicht vor, wie man voraussetzen kann. Wenn aber der Exponent $m_i - j$ für die übrigen j alle durch p teilbar wären, würde $F_i(y)$ bekanntlich (mod p) eine p-te Potenz, und also keine Primfunktion (mod p). Es gibt also mindestens ein Glied, wofür $\alpha_j = 0$ ist und die kleinste unter den Zahlen (22) ist also

$$M = s_i \lambda_i + m_i \lambda_i \varkappa_i - \varkappa_i,$$

nach Satz 6 folgt daher $\varrho_i = s_i \lambda_i$, wie verlangt.

Wenn aber $\varrho_i < s_i \lambda_i$ ist, bestimmt man, wie immer möglich, die ganzen rationalen, nicht negativen Zahlen a und b so, daß

$$a\lambda_i + b\varkappa_i = \varrho_i + m_i\lambda_i\varkappa_i, \tag{23}$$

wobei man auch voraussetzen kann, daß $0 \leqq b < \lambda_i$ ist. Weiter soll die Zahl b genau durch p^β teilbar sein. Man kann dann

$$A_i(x) = p^{a-\beta}x^b$$

wählen und ich werde zeigen, daß in diesem Falle die Körperdifferente genau durch $\mathfrak{p}^{\lambda_i-1+\varrho_i}$ teilbar ist. Um dies zu zeigen, bildet man also

$$A_i'(x) = bp^{a-\beta}x^{b-1},$$

woraus man nach Satz 6 die Zahl

$$M = (\beta + a - \beta)\lambda_i + (b-1)\varkappa_i = \varrho_i + m_i\lambda_i\varkappa_i - \varkappa_i$$

ableitet. Diese Zahl ist kleiner als alle Zahlen (22) und man erhält also nach Satz 6, daß das Primideal $\mathfrak{p}_i$ genau die Supplementzahl ϱ_i hat. Doch sind aber alle diese Ausführungen unter der notwendigen Bedingung gemacht, daß das Polynom $A_i(x)$ so gewählt worden ist, daß die Glieder in $A_i(x)$ durch Punkte oberhalb S_i abgebildet werden, damit $\Phi_i(x) = f_i(x) + A_i(x)$ eben das geradlinige Polygon S_i erhält.

Damit aber diese Bedingung erfüllt ist, ist notwendig und hinreichend, daß in $A_i(x)$

$$(a-\beta)\lambda_i + b\varkappa_i > m_i\lambda_i\varkappa_i$$

ist, also muß man nach (23)

$$\varrho_i + m_i\lambda_i\varkappa_i - \beta\lambda_i > m_i\lambda_i\varkappa_i$$

oder

$$\varrho_i > \beta\lambda_i \tag{24}$$

voraussetzen.

Die Zahl ϱ_i sollte aber eine mögliche Supplementzahl zu λ_i sein und ich werde dann zeigen, daß die Ungleichheit (24) dann immer erfüllt ist. Man kann nämlich dann

$$\varrho_i = A\lambda_i + B, \quad 0 \leqq A < s_i, \quad 0 \leqq B < \lambda_i$$

schreiben, und wenn B genau durch p^γ teilbar ist, so hat man, da ϱ_i eine mögliche Supplementzahl war, $\gamma \leqq A$, also

$$\gamma\lambda_i \leqq A\lambda_i < A\lambda_i + B = \varrho_i,$$

folglich

$$\varrho_i > \gamma\lambda_i,$$

indem immer $B > 0$ ist für eine mögliche Supplementzahl. Die Richtigkeit von (24) ist also nachgewiesen, wenn man $\beta = \gamma$ zeigt. Nun ist

sicher $\beta < s_i$, denn sonst würde nach (23) die Zahl ϱ_i durch p^{s_i} teilbar werden, woraus folgen würde, daß auch B durch p^{s_i} teilbar wäre, also $\beta \geqq s_i$, was nie für eine mögliche Supplementzahl der Fall ist. Wenn aber $\beta < s_i$ ist, wird ϱ_i und folglich auch B durch p^{β} genau teilbar, also $\beta = \gamma$ wie bewiesen werden sollte. Der Satz 8 ist dadurch vollständig bewiesen.

Man beweist analog wie in § 3, daß dieser Satz sich auf eine beliebige endliche Anzahl von gegebenen Primzahlen ausdehnen läßt.

§ 5.

Ich behandle nun zuletzt die schon im Anfang erwähnte Aufgabe: *Man soll für eine gegebene Primzahl p die maximale Potenz bestimmen, worin p in der Körperdiskriminante eines Körpers $P(\vartheta)$ n-ten Grades vorkommen kann.*

Nimmt man erstens an, daß p in $P(\vartheta)$ die gegebene Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1}\mathfrak{p}_2^{\lambda_2}\dots\mathfrak{p}_r^{\lambda_r}, \qquad N\mathfrak{p}_i = p^{m_i} \tag{25}$$

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_r m_r = n \tag{26}$$

hat, so ist die Körperdiskriminante von $P(\vartheta)$ nach (9) genau durch

$$p^{\sum_{i=1}^{r} m_i(\lambda_i - 1 + \varrho_i)} = p^{n + \sum_{i=1}^{r} m_i(\varrho_i - 1)}$$

teilbar, wobei ϱ_i die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige Supplementzahl ist. Der Exponent

$$\sum_{i=1}^{r} m_i(\lambda_i - 1 + \varrho_i)$$

erhält aber seinen größten Wert, wenn die Zahlen ϱ_i am größten sind, also nach § 4 wenn $\varrho_i = s_i\lambda_i$ ist, wenn λ_i genau durch p^{s_i} teilbar ist. Wie man leicht sieht, gilt dies auch, wenn λ_i nicht durch p teilbar ist, also $\varrho_i = 0$. Es folgt also:

Wenn in einem Körper $P(\vartheta)$ n-ten Grades die Primzahl p die Primidealzerlegung (25) hat, so kommt p in die Körperdiskriminante von $P(\vartheta)$ höchstens in die Potenz

$$p^{\sum_{i=1}^{r} m_i((s_i+1)\lambda_i - 1)} = p^{n + \sum_{i=1}^{r} (s_i\lambda_i - 1)m_i} \tag{27}$$

vor, wobei also λ_i genau durch p^{s_i} teilbar ist.

Aus Satz 8 folgt auch, daß immer Körper gibt, worin die Körperdiskriminante durch die maximale Potenz (26) teilbar ist.

Ich werde nun untersuchen, wie die Primidealzerlegung (25) gewählt werden muß, damit in (27) der Exponent

$$n + \sum (s_i \lambda_i - 1) m_i \tag{28}$$

möglichst groß wird. Um dies zu erreichen, nehme ich zunächst an, daß die Zahlen λ_i und m_i nicht selbst gegeben sind, sondern ihr Produkt $\lambda_i m_i = a_i$, so daß man statt (26) die Zahlen a_i gegeben hat, wobei

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_r, \tag{29}$$

und die Zahlen λ_i und m_i können so variieren, daß immer $\lambda_i m_i = a_i$ ist. Dann geht (28) in

$$n + \sum_{i=1}^{r} (s_i a_i - m_i)$$

über, und man soll also für ein gegebenes a_i die Zahl $s_i a_i - m_i$ möglichst groß machen. Der kleinste Wert von m_i ist $m_i = 1$ und dann wird natürlich $\lambda_i = a_i$, und wenn a_i genau durch p^{σ_i} teilbar ist, erhält man für $m_i = 1$ auch s_i seinen größten Wert $s_i = \sigma_i$. Daraus folgt also:

Wenn in einem Körper $P(\vartheta)$ n-ten Grades p die Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \mathfrak{p}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{\lambda_r}, \qquad N\mathfrak{p}_i^{\lambda_i} = p^{a_i}$$

hat, so ist für ein gegebenes System von Zahlen a_i, so daß (29) erfüllt ist, die Körperdiskriminante von $P(\vartheta)$ höchstens durch

$$p^{n + \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i a_i - 1)} = p^{n - r + \sum_{i=1}^{r} \sigma_i a_i} = p^{\sum_{i=1}^{r} (\sigma_i + 1) a_i - r}$$

teilbar.

Diese maximale Potenz von p erhält man also in einem Körper, worin für die Primidealzerlegung von p

$$\lambda_i = a_i, \qquad m_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

ist.

Man braucht also jetzt nur zu untersuchen, wie die Zerlegung (29) von n gewählt werden soll, damit der Exponent

$$N = n - r + \sum_{i=1}^{r} \sigma_i a_i = n + \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i a_i - 1) \tag{30}$$

am größten wird. Schreibt man nun $a_i = b_i p^{\sigma_i}$, wobei b_i nicht durch p teilbar ist, hat man also nach (29)

$$n = b_1 p^{\sigma_1} + b_2 p^{\sigma_2} + \ldots + b_r p^{\sigma_r}, \tag{31}$$

wobei man die Glieder so ordnen kann, daß

$$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \ldots \geqq \sigma_r$$

ist. Wenn aber die Zahl N möglichst groß sein soll, kann man voraussetzen, daß alle σ_i voneinander verschieden sind. Denn wäre z. B. $\sigma_1 = \sigma_2$, so kommen also in der Summe (30) die Glieder

$$\sigma_1 a_1 - 1 + \sigma_1 a_2 - 1 = \sigma_1 (a_1 + a_2) - 2$$

vor. Setzt man nun $a_1 + a_2 = A$ und betrachtet man anstatt (29) die Zerlegung

$$n = A + a_3 + \ldots + a_r,$$

erhält man entsprechend eine Zahl N' aus (30), und man beweist dann leicht $N' > N$. Denn wenn A genau durch p^σ teilbar ist, wird $\sigma \geqq \sigma_1$, und also

$$A\sigma - 1 \geqq (a_1 + a_2)\sigma_1 - 1 > \sigma_1 (a_1 + a_2) - 2.$$

Man kann daher in (31)

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_r$$

voraussetzen.

Weiter kann man auch immer $1 \leqq b_i < p$ voraussetzen. Denn sonst wird man

$$b_i = c_i p + d_i, \quad c_i \geqq 1, \quad d_i \geqq 1$$

schreiben können, und man erhält eine neue Zerlegung (31), indem man a_i in zwei Addenden zerlegt

$$a_i = c_i p^{\sigma_i + 1} + d_i p^{\sigma_i},$$

wobei c_i durch p teilbar sein kann; man kann also voraussetzen, daß c_i durch p^{γ_i} genau teilbar ist, wobei $\gamma_i \geqq 0$. Man bildet nun die Zahl N' in (30) für diese neue Zerlegung von n, und man erhält N' aus N, indem man in der Summe (30) die Zahl $\sigma_i a_i - 1$ durch

$$\begin{aligned}(\sigma_i + \gamma_i + 1) c_i p^{\sigma_i + 1} - 1 + \sigma_i d_i p^{\sigma_i} - 1 \\ = \sigma_i a_i + (\gamma_i + 1) c_i p^{\sigma_i + 1} - 2 > \sigma_i a_i - 1,\end{aligned}$$

ersetzt, woraus sofort $N' > N$ folgt, gegen die Voraussetzung, daß N möglichst groß sein sollte.

Wenn aber in (31) die $b_i \pmod p$ auf ihre kleinsten Reste reduziert sind, gibt es nur eine Darstellung von n in der gewünschten Form, nämlich die Darstellung von n in einem Zahlensystem mit p als Grundzahl. Es ist daher bewiesen:

Satz 9. *Um die maximale Potenz zu finden, worin eine Primzahl p in der Körperdiskriminante eines Körpers n-ten Grades aufgeht, schreibt man n als Zahl in einem Zahlensystem mit p als Grundzahl*

$$n = a_1 p^{\alpha_1} + a_2 p^{\alpha_2} + \ldots + a_r p^{\alpha_r}, \quad 1 \leqq a_i \leqq p-1.$$

Dann ist die Körperdiskriminante höchstens durch

$$p^{\sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1) a_i p^{\alpha_i} - r} = p^{n - r + \sum_{i=1}^{r} a_i a_i p^{\alpha_i}}$$

teilbar. Es gibt auch Körper n-ten Grades, wobei die Körperdiskriminante durch diese maximale Potenz von p teilbar ist.

Die Richtigkeit der letzten Bemerkung folgt sofort aus Satz 8.

(Eingegangen am 28. Mai 1925.)

Über partiell differenzierbare Funktionen.

Von

Karl Bögel in Lauenburg (Pommern).

Seit einer Arbeit des Herrn Baire[1]) weiß man, daß jede Funktion $f(x, y)$, welche überall partiell stetig nach x und y ist, auf jeder Achsenparallelen dichtliegend zweidimensionale Stetigkeitspunkte besitzt. Die Bairesche Methode ist von Herrn Hahn[2]) auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausgedehnt und von mir[3]) auf allgemeinere Funktionstypen angewandt worden. Später konnte ich mit einer anderen Methode wesentlich schärfere Ergebnisse erreichen[4]); und von der Anwendung dieser neuen Methode auf die Untersuchung des speziellen Typus *der partiell differenzierbaren Funktionen und der partiellen Ableitungen selbst* soll hier die Rede sein.

Aus zwei Stetigkeitssätzen, die ich zunächst beweise, wird sich ergeben, daß sich Stetigkeitspunkte von f_2 nachweisen lassen, wenn man bei f *oder* f_2[5]) partielle Stetigkeit nach x voraussetzt. Ein einfacher Rückschluß auf die Funktion $f(x, y)$ selbst zeigt dann folgende grundlegende Eigenschaft der Funktionen zweier Veränderlichen: *Ist* $f(x, y)$ *nach einer Veränderlichen überall partiell differenzierbar, nach der anderen wenigstens überall partiell stetig, so liegen die Unstetigkeitspunkte von* $f(x, y)$ *nirgends dicht.*

---

[1]) Sur les fonctions de variables réelles, Ann. di matem. pura ed appl. 3 (1899), S. 27 u. 95.

[2]) Math. Ztschr. 4 (1919), S. 306.

[3]) Über die Stetigkeit und die Schwankung von Funktionen zweier reeller Veränderlichen. Math. Ann. 81 (1920), S. 64.

[4]) Über den Zusammenhang von eindimensionaler und mehrdimensionaler Schwankung einer Funktion mehrerer reellen Veränderlichen und über die Umkehrbarkeit der Differentiationsfolge. Diss., Bonn 1922.

[5]) Es bedeuten: $f_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$; $f_2 \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$; $f_{12} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial y}$; $f_{21} \equiv \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

Ferner lassen sich aus der Stetigkeitseigenschaft der partiellen Ableitungen noch zwei Sätze folgern, die aussagen, daß unter gewissen einfachen Voraussetzungen Punktmengen vorhanden sind, in denen die Gleichung $f_{12} = f_{21}$ gilt.

§ 1.

Beweis der Stetigkeitssätze.

Bezeichnungen: s und t sind reelle Veränderliche beliebiger Dimensionen, d. h. $s \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ variiert in einem m-dimensionalen Quader $S = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $t \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ in einem n-dimensionalen Quader $T = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

Hierbei bedeuten $X_1, X_2, \ldots, X_m$ und $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ offene eindimensionale Intervalle von der Form $a_k < x_k < b_k$ bzw. $c_k < y_k < d_k$.

$\Omega(\varphi, \mathfrak{M})$ ist die Schwankung der Funktion φ auf der Menge $\mathfrak{M}$. Es ist also Ω eine *Mengenfunktion*, definiert für alle Mengen, deren Durchschnitt mit dem Definitionsbereich von φ nicht leer ist.

Als *Grenzwerte von* Ω ergeben sich die *Punktfunktionen*:

$\omega(\varphi, p)$ die Schwankung von φ im Punkte p. (Zu bemerken ist, daß ω in allen Punkten des offenen Definitionsbereiches von φ *und in den* ***Randpunkten*** definiert ist.)

$\omega_s(\varphi, p)$ und $\omega_t(\varphi, p)$ die „partiellen" Schwankungen von φ im Punkte p.

Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge im Bereich (S, T), so bedeutet $\mathfrak{M}_s$ einen „Schnitt" durch diese Menge, der alle Punkte von $\mathfrak{M}$ mit der Koordinate s enthält. $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ ist die Vereinigungsmenge der beiden Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. Das Symbol ist auch angewandt auf Mengen, die durch Hinzufügung eines Punktes p aus einer andern Menge entstanden sind, z. B. bedeutet $\mathfrak{M} + p$ eine Menge, bestehend aus den Punkten von $\mathfrak{M}$ und dem Punkte p. Ist p in $\mathfrak{M}$ enthalten, so ist $\mathfrak{M} + p$ mit $\mathfrak{M}$ identisch. Gehört p keinesfalls zu den Elementen von $\mathfrak{M}$, so wird zur genaueren Kennzeichnung $\mathfrak{M} + p$ geschrieben.

Die beiden Veränderlichen s und t werden später durch x, y, z bzw. durch Komplexe dieser drei Veränderlichen ersetzt, z. B. $s \equiv (x, y)$; $t \equiv z$.

Als immer wiederkehrende Eigenschaft der betrachteten Funktionen $\varphi(s, t)$ sei festgelegt:

(A) *Ist* p_0 *ein beliebiger Punkt des Definitionsbereiches* $U = (S, T)$ *von* $\varphi(s, t)$, *ist ferner* $U' \prec U$ *eine Umgebung von* p_0, *so gebe es für jedes* $\varepsilon > 0$ *in* U' *ein* s*-Intervall* H, *für welches erfüllt ist*

$$\Omega(\varphi, H + p_0) < \varepsilon.$$

Nun lassen sich folgende Hilfssätze beweisen:

Hilfssatz 1. *In* $U=(S, T)$ *sei*

1. $\varphi(s,t)$ *definiert und genüge* (A);

2. *in jedem Teilbereich* U' *von der Form* (S', T) *sei* $\Omega(\varphi, U')\geqq\varkappa>0$.

Dann liegen die Werte von s, *für welche* $\Omega(\varphi, U_s)<\frac{\varkappa}{4}$ *gilt, nirgends dicht auf* S.

Beweis. Es sei $U'=(S', T)\prec U$ und $p\prec U'$. Dann enthält U' ein s-Intervall $H=(S'', t)$, für welches

$$\Omega(\varphi, H\dotplus p)<\frac{\varkappa}{8} \tag{1}$$

gilt. Der Bereich $U''=(S'', T)$ enthält nach Voraussetzung 2 ein p', für welches

$$\Omega(\varphi, p+p')>\frac{7}{16}\varkappa, \tag{2}$$

und ein Intervall $H'=(S''', t')$, für welches

$$\Omega(\varphi, H'\dotplus p')<\frac{\varkappa}{16} \tag{3}$$

gilt. Aus (1), (2) und (3) ergibt sich für jeden Schnitt U_s''' von $U'''=(S''', T)$ die Ungleichung $\Omega(\varphi, U_s''')>\frac{\varkappa}{4}$.

Hilfssatz 2. *In* $U=(S, T)$ *sei*

1. $\varphi(s,t)$ *definiert und genüge* (A);

2. *auf dem festen Schnitt* $H=(S, \bar{t})$ *sei überall* $\omega(\varphi)\geqq\varkappa>0$.

Dann bilden die s*-Koordinaten derjenigen Punkte von* H, *in denen* $\omega_t(\varphi)<\frac{\varkappa}{4}$ *ist, auf* S *eine Menge erster Kategorie.*

Beweis. Umgibt man H mit einer Folge ineinandergeschachtelter Bereiche $U^{(n)}=(S, T^{(n)})$, die nach H konvergieren, so gilt für jedes $U^{(n)}$ der erste Hilfssatz. Dieser besagt, daß *bei festgehaltenem* n die Werte von s, für welche $\Omega(\varphi, U_s^{(n)})<\frac{\varkappa}{4}$ gilt, auf S nirgends dicht liegen. *Bei festgehaltenem* $\bar{s}$ *und wachsendem* n ist aber der Grenzwert von $\Omega(\varphi, U_{\bar{s}}^{(n)})$ gleich $\omega_t(\varphi; \bar{p})$, wo $\bar{p}=(\bar{s}, \bar{t})$ ein Punkt von H ist. Hieraus und aus dem Vorhergehenden ergibt sich sofort die Behauptung.

Hilfssatz 3. *In* $U=(S, T)$ *sei*

1. $\varphi(s,t)$ *definiert und genüge* (A);

2. *auf dem festen Schnitt* $H=(S, \bar{t})$ *sei überall* $\omega_t(\varphi)=0$.[6])

[6]) Folgende noch geringere Forderung würde auch ausreichen: daß die s-Koordinaten derjenigen Punkte von H, in denen $\omega_t(\varphi)=0$ ist, auf jedem Teilintervall $S'\prec S$ eine Menge zweiter Kategorie bilden.

Dann bilden die s-Koordinaten derjenigen Punkte von H, in denen $\omega(\varphi) > 0$ ist (also der Unstetigkeitspunkte von φ auf H), auf S ein Menge erster Kategorie.

Beweis. Es genügt der Nachweis, daß für jedes $\varkappa > 0$ die s-Koordinaten derjenigen Punkte von H, in denen $\omega(\varphi) \geqq \varkappa$ gilt, auf S nirgends dicht liegen. Nun ist die Punktmenge, in welcher $\omega(\varphi) \geqq \varkappa$ gilt, abgeschlossen, *da ω auch in den Randpunkten von U definiert ist.* Läge diese Menge daher in einem Teilintervall $H' < H$ dicht, so würde für alle Punkte von H' die Ungleichung $\omega(\varphi) \geqq \varkappa$ gelten; nach Hilfssatz 2 würden daher die s-Koordinaten der Punkte von H', in denen $\omega_t(\varphi) < \frac{\varkappa}{4}$ gilt auf S eine Menge erster Kategorie bilden, im Widerspruch zu Voraussetzung 2.

Hilfssatz 4. *In $U = (S, T)$ sei*

1. *$\varphi(s,t)$ definiert und genüge* (A);

2. *überall sei $\omega(\varphi) \geqq \varkappa > 0$.*

Dann bilden die s-Koordinaten aller Punkte von U, in denen $\omega_t < \frac{\varkappa}{4}$ gilt, auf S eine Menge erster Kategorie.

Beweis. Greift man eine abzählbare Folge von Schnitten $H^{(n)} = (S, t_n)$ heraus, die auf U dicht liegen, so ist jeder Punkt des beliebigen Schnittes $U_{\bar{s}} = (\bar{s}\, T)$ Häufungspunkt der Schnittpunkte $H_{\bar{s}}^{(n)} = (\bar{s}, t_n)$. Wenn demnach bei festgehaltenem $s = \bar{s}$ für alle Schnittpunkte $H_s^{(n)}$ die Ungleichung $\omega_t(\varphi) \geqq \frac{\varkappa}{4}$ gilt, so gilt sie für alle Punkte von $U_{\bar{s}}$; denn die Menge der Punkte, für welche $\omega_t(\varphi) \geqq \frac{\varkappa}{4}$ gilt, ist auf $|U_s|$ abgeschlossen.

Die Menge der Schnitte U_s, in denen Punkte mit $\omega_t(\varphi) < \frac{\varkappa}{4}$ existieren, ist also identisch mit der Menge derjenigen Schnitte U_s, in denen mindestens ein Schnittpunkt $H_s^{(n)}$ mit $\omega_t(\varphi) < \frac{\varkappa}{4}$ existiert. Die s-Koordinaten dieser Schnittpunkte mit $\omega_t(\varphi) < \frac{\varkappa}{4}$ bilden aber nach Hilfssatz 2 die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Mengen erster Kategorie, die demnach selbst von der ersten Kategorie ist. Damit ist alles bewiesen.

Nunmehr ergeben sich sofort die Beweise für die angekündigten beiden Stetigkeitssätze.

1. Stetigkeitsatz. *In $U = (X, Y, Z)$ sei $f(x, y, z)$ definiert und*

1. *auf dem Schnitt $U_{\bar{z}} = (X, Y, \bar{z})$ sei überall $\omega_z(f) = 0$;*

2. *außerhalb dieses Schnittes sei überall $\omega_x(f) = \omega_y(f) = 0$.*

Dann enthält $U_{\bar{z}}$ Stetigkeitspunkte von f; die Koordinaten der auf $U_{\bar{z}}$ gelegenen Unstetigkeitspunkte bilden auf (X, Y) eine Menge erster Kategorie.

Beweis. Ist z_0 ein von $\bar{z}$ verschiedener fester Wert von z, so genügt die Funktion $f(x, y, z_0)$ auf *jedem* Schnitt $H = (X, y_0, z_0)$ ihres Definitionsbereiches (X, Y, z_0) den Forderungen des dritten Hilfssatzes, indem man $s \equiv x$ und $t \equiv y$ setzt; die Erfüllung der Bedingungen (A) ergibt sich aus der partiellen Stetigkeit von f nach x. Nach dem dritten Hilfssatz besitzt daher die Funktion auf jedem H dichtliegend Punkte mit $\omega_{xy}(f) = 0$. Dies ist der Satz von *Baire*.

Nun sei $p_0(x_0, y_0, z_0)$ ein beliebiger Punkt von U *außerhalb der Ebene* $z = \bar{z}$ und $U' \prec U$ eine Umgebung von p_0. Innerhalb U' läßt sich dann p_0 in ein x-Intervall $H'' = (X'', y_0, z_0)$ einschließen, für welches

$$\Omega(f, H'' + p_0) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

gilt. In H'' existiert nach dem eben bewiesenen ein Punkt p' mit $\omega_{xy}(f) = 0$; es läßt sich demnach p' innerhalb U' mit einer xy-Umgebung $J = (X''', Y'', z_0)$ versehen, für welche

$$\Omega(f, J + p') < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

gilt. Da H und J mindestens den Punkt p' gemeinsam haben, so folgt aus (4) und (5)

$$\Omega(f, J + p_0) < \frac{2}{3}\varepsilon. \tag{6}$$

Ist aber $\bar{p}_0 = (x_0, y_0, \bar{z})$ *ein Punkt der Ebene* $z = \bar{z}$ und $\bar{U}'$ eine Umgebung von $\bar{p}_0$, so besitzt $\bar{p}_0$ infolge der Stetigkeit von f nach z eine z-Umgebung K, die ganz in $\bar{U}'$ liegt, und für welche

$$\Omega(f, K + \bar{p}_0) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7}$$

gilt. Auf K greift man nun einen beliebigen von $\bar{p}_0$ verschiedenen Punkt p_0 heraus und konstruiert, in U' bleibend, nach dem Vorhergehenden ein xy-Intervall J, für welches zunächst (6) gilt. was im Verein mit (7)

$$\Omega(f, J + \bar{p}_0) < \varepsilon \tag{8}$$

ergibt.

Die beiden Ungleichungen (6) und (8) haben also den Nachweis erbracht, daß *in jeder Umgebung* U' *eines beliebigen Punktes* p_0 *von* U *ein* xy*-Bereich* J *existiert, für welchen* $\Omega(f, J + p_0) < \varepsilon$ *gilt.* Faßt man daher $f(x, y, z)$ als Funktion $\varphi(s, t)$ der zweidimensionalen Veränderlichen $s \equiv (x, y)$ und der eindimensionalen $t \equiv z$ auf, so genügt φ der Bedingung (A). Setzt man ferner $\bar{t} = \bar{z}$, so ist auf dem festen Schnitt $U_{\bar{t}}$ überall $\omega_t(\varphi) = 0$, so daß beide Voraussetzungen des dritten Hilfssatzes für φ erfüllt sind. Seine Anwendung auf φ und den festen Schnitt $(s, \bar{t})$ ist nun mit der Behauptung identisch.

Bemerkung. Ohne Schwierigkeit läßt sich dieser Satz auf Funktionen von n Veränderlichen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ausdehnen. Ist nämlich f auf dem Schnitt $x_n = \bar{x}_n$ überall stetig nach x_n, ist f außerhalb dieses Schnittes nach jeder einzelnen der anderen Veränderlichen stetig, so besitzt f auf dem Schnitt Punkte mit vollkommener Stetigkeit.

2. Stetigkeitssatz. *In $U = (X, Y)$ sei $f(x, y)$ definiert und*

1. *überall $\omega_x(f) = 0$;*

2. *es seien Schnitte $U_{\bar{x}}$ vorhanden mit folgender Eigenschaft: bei festgehaltenem $x = \bar{x}$ liegen die y-Koordinaten derjenigen Punkte von $U_{\bar{x}}$, für welche $\omega_y(f) = 0$ ist, dicht auf Y;*

3. *die x-Koordinaten dieser Schnitte U_x seien auf jedem $X' \prec X$ eine Menge zweiter Kategorie.*

Dann enthält U Stetigkeitspunkte von f; die Unstetigkeitspunkte bilden auf U eine Menge erster Kategorie.

Beweis. Es sei $U' \prec U$. Wegen Voraussetzung 1 ist mit $s \equiv x$ und $t \equiv y$ die Bedingung (A) reichlich erfüllt. Ist nun $\varkappa > 0$, so gibt es in U' mindestens einen Punkt p, für welchen $\omega(f, p) < \varkappa$ gilt, weil andernfalls Hilfssatz 4 einen Widerspruch mit den Voraussetzungen 2 und 3 herbeiführen würde. Der Punkt p besitzt demnach eine Umgebung $U'' \prec U'$, für welche $\Omega(f, U'') < \varkappa$ gilt; in allen Punkten von U'' ist also $\omega(f) < \varkappa$. Weil U' beliebig war, bedeutet dies aber, daß die Menge aller Punkte mit $\omega(f) \geqq \varkappa$ nirgends dicht auf U liegt für jedes $\varkappa > 0$, woraus sofort folgt, daß die Menge der Unstetigkeitspunkte (mit $\omega(f) > 0$) auf U von der ersten Kategorie ist.

§ 2.

Die Stetigkeit der partiellen Ableitung.

1. Ableitungssatz. *In $U = (X, Y)$ sei $f(x, y)$ definiert und*

1. *überall $f_2(x, y)$ vorhanden;*

2. *überall $\omega_x(f) = 0$.*

Dann besitzt die Ableitung f_2 Stetigkeitspunkte; ihre Unstetigkeitspunkte bilden auf U eine Menge erster Kategorie.

Beweis. Man bildet folgende Funktion von drei Veränderlichen:

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{f(x, y+z) - f(x, y)}{z} & \text{für} \quad z \gtrless 0, \\ f_2(x, y) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(x, y+z) - f(x, y)}{z} & \text{für} \quad z = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist zunächst nicht in einem Quader definiert, der die Form (X, Y, Z) besitzt. Man kann aber oben und unten von U einen Streifen

von der Breite δ abschneiden, so daß ein Teilrechteck $U' = (X, Y')$ entsteht; dann ist in dem Quader $(X, Y', |z| < \delta)$ die Funktion $\varphi(x, y, z)$ definiert. Da in dem Schnitt $z = 0$ überall $\omega_z(\varphi) = 0$ und außerhalb dieses Schnittes überall $\omega_x(\varphi) = \omega_y(\varphi) = 0$ ist, so ergibt der erste Stetigkeitssatz überall dicht auf U' dreidimensionale Stetigkeitspunkte von φ, und da δ beliebig klein gewählt werden kann, auch überall dicht auf U. A fortiori ist φ in diesen Punkten nach dem Komplex (x, y) allein stetig, d. h. aber $f_3(x, y)$ besitzt überall dicht auf U Stetigkeitspunkte.

2. Ableitungssatz. *In $U = (X, Y)$ sei $f(x, y)$ definiert und*

1. *überall $f_3(x, y)$ vorhanden;*

2. *überall $\omega_x(f_3) = 0$.*

Dann besitzt die Ableitung f_3 Stetigkeitspunkte; ihre Unstetigkeitspunkte bilden auf U eine Menge erster Kategorie.

Beweis. Man betrachtet bei festgehaltenem $x = \bar{x}$ die Funktion

$$\varphi(y, z) = \begin{cases} \dfrac{f(\bar{x}, y+z) - f(\bar{x}, y)}{z} & \text{für} \quad z \gtrless 0, \\ f_3(\bar{x}, y) & \text{für} \quad z = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion φ ist für $z \gtrless 0$ stetig nach y und nach z, für $z = 0$ ist sie stetig nach z. Der erste Stetigkeitssatz ergibt also auf der Strecke $(Y, z = 0)$ dichtliegend Stetigkeitspunkte von $\varphi(y, z)$; a fortiori sind dies Stetigkeitspunkte nach y allein. Mit anderen Worten: Auf jeder Parallelen $(\bar{x}, Y)$ zur y-Achse liegen die Stetigkeitspunkte von f_3 nach y (die Punkte mit $\omega_y(f_3) = 0$) dicht.

Nimmt man dies Ergebnis mit Voraussetzung 2 zusammen, so läßt sich nunmehr auf f_3 der zweite Stetigkeitssatz anwenden, der nun sofort überall dicht in U Stetigkeitspunkte von f_3 ergibt.

§ 3.

Die Stetigkeit der partiell differenzierbaren Funktionen.

Satz. *In $U = (X, Y)$ sei $f(x, y)$ definiert und*

1. *überall $f_3(x, y)$ vorhanden;*

2. *überall $\omega_x(f) = 0$.*

Dann liegen die Unstetigkeitspunkte von $f(x, y)$ auf U nirgends dicht.

Beweis. Es sei $U' \prec U$. Dann besitzt f_3 in U' nach dem ersten Ableitungssatz einen Stetigkeitspunkt; für diesen existiert eine Umgebung $U'' \prec U'$, in welcher f_3 beschränkt ist:

$$|f_3(x, y)| < c. \tag{9}$$

Es läßt sich nun zeigen, daß $f(x, y)$ in allen Punkten von U'' stetig ist. Ist nämlich $p_0 = (x_0, y_0)$ ein beliebiger fester Punkt von U'', und ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so läßt sich nach Voraussetzung 2 der Punkt p_0 in ein x-Intervall $H = (X''', y_0)$ einschließen, für welches $H \prec U''$ sowie

$$\Omega(f, H) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10}$$

gilt. Nimmt man nun alle diejenigen Punkte der Menge $\left(X''', |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{3c}\right)$, die zu U'' gehören, zusammen, so bilden sie eine rechteckige Umgebung $U''' \prec U''$ von p_0. Für einen beliebigen Punkt $p_1(x_1, y_1)$ von U''' aber gilt die Abschätzung

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)| = |y_1 - y_0| \cdot |f_2(x_1, \eta)| < \frac{\varepsilon}{3c} c = \frac{\varepsilon}{3}, \tag{11}$$

weil $|y_0 - \eta| < |y_0 - y_1|$ ist und im Punkte (x_1, η) somit die Abschätzung (9) gilt.

Da aber (x_1, y_0) ein Punkt von H ist, ergeben (10) und (11) zusammen

$$\Omega(f, U''') < \varepsilon, \tag{12}$$

womit alles bewiesen ist.

§ 4.

Die Umkehrbarkeit der Differentiationsfolge.

Seit der grundlegenden Arbeit von H. A. Schwarz[7]) über dieses Umkehrbarkeitsproblem sind mehrere Arbeiten darüber erschienen, deren Verfasser stets hinreichende Bedingungen aufstellten oder aufzustellen versuchten dafür, daß die Gleichung $f_{12} = f_{21}$ *in einem Punkte* oder *in einem ganzen Bereiche* gelte.

Von diesen Arbeiten wird hier benötigt ein Satz von Dini[8]), der besagt, daß *im Punkte* $p_0 = (x_0, y_0)$ *die Ableitung* $f_{21}(p_0)$ *existiert und gleich* $f_{12}(p_0)$ *ist, wenn in* p_0 *und einer Umgebung* f, f_1, f_2, f_{12} *existieren und außerdem* f_{12} *in* p_0 *stetig ist.*

Setzt man also Existenz von f, f_1, f_2 und f_{12} in einem Bereich voraus, so ist jede hinreichende Bedingung für die Existenz von Stetigkeitspunkten von f_{12} gleichzeitig eine hinreichende Bedingung für die Existenz von f_{21} in diesen Punkten und die Übereinstimmung von f_{12} und f_{21} in eben denselben Punkten. Um aber überall dicht Stetigkeitspunkte von f_{12} zu erhalten, genügt es, nach den beiden Ableitungssätzen des § 2, partielle

[7]) Ges. Abhandl. 2, S. 275.

[8]) Anal. infinit. 1878, S. 122. Der Satz von Dini ist noch schärfer; über den Beweis vgl. etwa Stolz, Grundzüge der Diff.- und Int.-Rechnung, Leipzig 1893, 1, S. 146.

Stetigkeit von f_1 oder von f_{12} nach x vorauszusetzen; man erhält daher folgende beiden Sätze:

Satz. *In $U=(X, Y)$ sei $f(x, y)$ definiert und*

1. *überall f_1, f_2 und f_{12} vorhanden;*
2. *überall f_1 stetig nach x.*

Dann enthält U Punkte, in denen auch f_{21} existiert und gleich f_{12} ist. Die Gegenmenge ist auf U von der ersten Kategorie.

Satz. *In $U=(X, Y)$ sei $f(x, y)$ definiert und*

1. *überall f_1, f_2 und f_{12} vorhanden;*
2. *überall f_{12} stetig nach x.*

Dann enthält U Punkte, in denen auch f_{21} existiert und gleich f_{12} ist. Die Gegenmenge ist auf U von der ersten Kategorie.

Lauenburg (Pommern), im August 1924.

(Eingegangen am 11. Juni 1925.)

Über einige spezielle diophantische Gleichungen.

Von

A. Brauer in Berlin.

Seit Fermat ist die diophantische Gleichung $x^3 + a = y^2$ in einer großen Anzahl von Arbeiten[1]) behandelt worden. Bisher kennt man die Lösungen nur für eine Reihe spezieller Werte von a; insbesondere ist der Fall $a = 2$ nicht erledigt. Die Frage, ob die Gleichung $x^3 + 2 = y^2$ außer den trivialen Lösungen $x = -1$, $y = \pm 1$ noch weitere hat, ist mehrfach[2]) aufgeworfen worden. Daß die Lösung, die E. Fauquembergue[3]) und E. Liminon[4]) gegeben haben, nicht ausreichend ist, hat L. Aubry[5]) gezeigt. Herr E. Landau[6]) hat bewiesen, daß die Lösung der Gleichung $x^3 + 2 = y^2$ gleichbedeutend mit der Lösung der Gleichung

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + 2\beta^3 = 1$$

ist. Ob diese letztere Gleichung nur die Lösung $\alpha = 1$, $\beta = 0$ hat, haben H. Brocard[7]) und Herr E. Landau[8]) als Frage gestellt; diese ist bisher nicht beantwortet worden. A. Boutin[9]), P. Tannery[10]) und

---

[1]) Ausführliche Literaturangaben findet man in L. E. Dickson, History of the theory of numbers 2 (Washington 1920), S. 533–539.

[2]) E. Gerono, Question 599, Nouvelle Correspondance Mathématique 6 (1880), S. 526. — Stenacensis, Question 3359, L'Intermédiaire des Mathématiciens 15 (1908), S. 73. — L. Aubry, Réponse 5085, ibid. (2) 2 (1923), S. 107. — I. L. Riley, The American Mathematical Monthly 24 (1917), S. 177.

[3]) Mathesis (2) 6 (1896), S. 191.

[4]) L'Intermédiaire des Mathématiciens 15 (1908), S. 191.

[5]) Sur l'équation $x^3 + 2 = y^2$, ibid. 18 (1911), S. 204.

[6]) Sur une démonstration d'Euler d'un théorème de Fermat, ibid. 8 (1901), S. 145–147.

[7]) Question 2241, ibid. 8 (1901), S. 309.

[8]) Question 2915, ibid. 12 (1905), S. 106.

[9]) Ibid. 9 (1902), S. 111.

[10]) Ibid. 9 (1902), S. 283–284.

A. Werebrusow[11]) haben rationale, aber nicht ganzzahlige Lösungen dieser Gleichung angegeben[12]). Herr E. Landau[13]) hat auf Grund eines Satzes von Thue[14]) gezeigt, daß diese Gleichung und daher auch $x^3+2=y^2$ nur endlich viele ganzzahlige Lösungen haben kann. Es soll im folgenden ohne Benutzung des Thueschen Satzes gezeigt werden, daß diese Gleichungen nur die Lösungen $x=-1$, $y=\pm 1$ bzw. $\alpha=1$, $\beta=0$ haben. Es erscheint dies als Spezialfall eines etwas allgemeineren Satzes.

Der Beweis dieses Satzes wird auf Grund der folgenden leichten Verallgemeinerung mehrerer Sätze von Pépin[15]) geführt.

Satz 1. *Ist* $rs\not\equiv -1 \pmod 4$ *und quadratfrei* $(r>0,\ s>0)$, $2m+1\geq 3$ *und teilerfremd zur Anzahl der Idealklassen des quadratischen Körpers* $\mathsf{P}(\sqrt{-rs})$, *so erhält man alle ganzzahligen teilerfremden Lösungen von*

$$r\xi^2+s\eta^2=\zeta^{2m+1}$$

aus den Gleichungen

$$\xi\sqrt{r}+\eta\sqrt{-s}=(\varkappa\sqrt{r}+\lambda\sqrt{-s})^{2m+1}$$

$$\zeta=r\varkappa^2+s\lambda^2,$$

wo $\varkappa, \lambda$ *teilerfremde, ganze rationale Zahlen sind*[16]).

Während Pépin seine Resultate mittels der Komposition der quadratischen Formen beweist, soll hier der Beweis idealtheoretisch erbracht werden: ξ, η, ζ müssen zu je zweien teilerfremd sein, da rs quadratfrei ist. Ebenso muß r zu ζ teilerfremd sein. Aus $r\xi^2+s\eta^2=\zeta^{2m+1}$ folgt nun

$$(r^{m+1}\xi+r^m\eta\sqrt{-rs})(r^{m+1}\xi-r^m\eta\sqrt{-rs})=r^{2m+1}\zeta^{2m+1}.$$

Man setze

$$\zeta=2^\tau\zeta' \qquad (\tau\geq 0,\ \zeta' \text{ ungerade}).$$

---

[11]) L'Intermédiaire des Mathématiciens **9** (1902), S. 284.

[12]) Siehe auch A. Werebrusow, Équation $x^3+3x^2y+6xy^2+2y^3=1$, ibid. **13** (1906), S. 196–197.

[13]) Ibid. **20** (1913), S. 154.

[14]) Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. Journal für die reine und angewandte Mathematik **135** (1909), S. 284–305.

[15]) Sur certains nombres complexes de la forme $a+b\sqrt{-c}$, Journal de Mathématiques pures et appliquées (3) **1** (1875), S. 332–335, 339–343. — Sur l'équation indéterminé $X^2+cY^2=Z^3$, Memorie della Pontificia Academia dei Nuovi Lincei **8** (1892), S. 42.

[16]) Ein ähnlicher Satz läßt sich auch für $rs\equiv -1 \pmod 4$ und ungerades ζ beweisen.

Da 2 und r in der Diskriminante des Körpers $\mathsf{P}(\sqrt{-rs})$ aufgehen, ist die Primidealzerlegung von $2^r r$ von der Form

$$2^r r \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{q}_1^2 \mathfrak{q}_2^2 \dots \mathfrak{q}_\varrho^2.$$

Nun sind $r^m(r\xi + \eta\sqrt{-rs})\cdot\mathfrak{o}$ und $r^m(r\xi - \eta\sqrt{-rs})\cdot\mathfrak{o}$ konjugierte Ideale des Normalkörpers $\mathsf{P}(\sqrt{-rs})$. Geht daher in dem ersten dieser Ideale ein Ideal $\mathfrak{k}$ auf, so geht in dem zweiten Ideal das zu $\mathfrak{k}$ konjugierte Ideal $\mathfrak{k}'$ auf. Hieraus folgt, da $\mathfrak{q}_\nu = \mathfrak{q}_\nu'$ ist, daß das Ideal $(\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_\varrho)^{2m+1}$ gleichzeitig in $r^m(r\xi + \eta\sqrt{-rs})\cdot\mathfrak{o}$ und in $r^m(r\xi - \eta\sqrt{-rs})\cdot\mathfrak{o}$ aufgehen muß. Soll ferner in diesen beiden konjugierten Idealen gleichzeitig ein Primideal $\mathfrak{p}$ von ζ' aufgehen, so muß es in $2r^{m+1}\xi$ aufgehen; dies ist unmöglich, da ζ' zu $2r^{m+1}\xi$ teilerfremd ist. Daher sind die Hauptideale

$$r^m(r\xi + \eta\sqrt{-rs})\cdot\mathfrak{o} = (\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_\varrho)^{2m+1}$$
$$r^m(r\xi - \eta\sqrt{-rs})\cdot\mathfrak{o} = (\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_\varrho)^{2m+1},$$

wo $\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{w} = \zeta'\mathfrak{o}$ und $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \mathfrak{o}$ ist. Gehört nun $\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_\varrho$ zur Idealklasse A, so muß A^{2m+1} die Hauptklasse sein. Da $2m+1$ zur Klassenanzahl teilerfremd war, muß A selbst die Hauptklasse sein. Also ist $\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_\varrho$ ein Hauptideal, folglich

$$r^m(r\xi + \eta\sqrt{-rs})\cdot\mathfrak{o} = [(\mu_1 + \lambda_1\sqrt{-rs})\cdot\mathfrak{o}]^{2m+1}.$$

Nun enthält der Körper $\mathsf{P}(\sqrt{-rs})$ nur die Einheiten ± 1, für $rs = 1$ außerdem noch $\pm i$, die sich sämtlich als $(2m+1)$-te Potenzen von ganzen Zahlen des Körpers darstellen lassen; daher ist

$$r^m(r\xi + \eta\sqrt{-rs}) = (\mu + \lambda\sqrt{-rs})^{2m+1} \quad (\mu, \lambda \text{ ganz und rational}).$$

Hieraus folgt, daß μ^{2m+1} durch r teilbar ist. Da r quadratfrei ist, muß $\mu = r\varkappa$ mit ganzem rationalen $\varkappa$ sein. Folglich ist

$$\xi\sqrt{r} + \eta\sqrt{-s} = (\varkappa\sqrt{r} + \lambda\sqrt{-s})^{2m+1}.$$

Man erhält also jedenfalls alle teilerfremden Lösungen ξ, η aus dieser Gleichung.

Satz 2. *Ist $a = 2b^3 > 0$, $6b$ quadratfrei und die Anzahl der Idealklassen des Körpers $\mathsf{P}(\sqrt{-6b})$ zu 3 teilerfremd, so lassen sich alle ganzzahligen Lösungen x, y der Gleichung $x^3 + a = y^2$ angeben*[17]).

[17]) Daß diese Gleichung jedenfalls nur endlich viele Lösungen haben kann, hat Mordell bewiesen („A statement by Fermat", Proceedings of the London Mathematical Society (2) 18 (1920), S. V–VI).

a) Es sollen zunächst die Lösungen mit teilerfremden x, y bestimmt werden. Setzt man $x = u - b$, so geht die Gleichung

$$x^3 + 2b^3 = y^2 \tag{1}$$

über in

$$(u+b)^3 = y^2 + 6bu^2. \tag{2}$$

Hierin sind y und u teilerfremd, da ein gemeinsamer Primteiler in b und daher auch in x aufgehen würde, so daß x und y nicht teilerfremd wären. Alle teilerfremden Lösungen von (2) erhält man aber, da die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind, aus der Gleichung

$$y + u\sqrt{-6b} = (p + q\sqrt{-6b})^3,$$

wo p, q teilerfremde, ganze rationale Zahlen sind. Hieraus folgt

$$y = p^3 - 18bpq^2$$
$$u = 3p^2q - 6bq^3.$$

Andererseits ist

$$(u+b)^3 = y^2 + 6bu^2 = (p^2 + 6bq^2)^3,$$

folglich, da nur reelle Lösungen in Betracht kommen,

$$u + b = p^2 + 6bq^2.$$

Daher ist

$$p^2 + 6bq^2 = 3p^2q - 6bq^3 + b$$
$$p^2(3q-1) = b(6q^3 + 6q^2 - 1). \tag{3}$$

Ein gemeinsamer Teiler von $6q^3 + 6q^2 - 1$ und $3q - 1$ müßte in

$$9(6q^3 + 6q^2 - 1) - (18q^2 + 24q + 8)(3q - 1) = -1$$

aufgehen. Also sind für alle Werte von q die Zahlen $3q - 1$ und $6q^3 + 6q^2 - 1$ teilerfremd, folglich $3q - 1$ ein Teiler von b. Wegen der Teilerfremdheit von y und u muß p zu b teilerfremd sein; also ist

$$3q - 1 = \pm b, \qquad \pm p^2 = 6q^3 + 6q^2 - 1.$$

Da -1 quadratischer Nichtrest (mod 6) ist, ist

$$-p^2 = 6q^3 + 6q^2 - 1, \qquad 3q - 1 = -b.$$

Man erhält also höchstens einen Wert für q, und daher aus

$$y = p^3 - 18bpq^2$$
$$x = 3p^2q - 6bq^3 - b$$

höchstens zwei teilerfremde Lösungspaare x, y.

b) Es müssen nun noch die nicht teilerfremden Lösungen von (1) bestimmt werden. Da $6b$ quadratfrei ist, geht der größte gemeinsame Teiler von x und y in b und daher in u und umgekehrt der von u und y in b und daher in x auf; also haben x und y denselben größten gemeinsamen Teiler wie u und y. Es genügt daher, die nicht teilerfremden Lösungen von (2) zu bestimmen. Es sei $(u, y) = t$; dann ist also t ein Teiler von b, folglich wegen (2) auch t^2 ein Teiler von y. Man setze

$$y = t^2 y_1, \qquad u = t u_1, \qquad b = t b_1.$$

Die Gleichung (2) geht dann über in

$$(4) \qquad (u_1 + b_1)^3 = t y_1^2 + 6 b_1 u_1^2.$$

Nun ist $(u_1 + b_1, y_1) = 1$, da ein gemeinsamer Primteiler in b_1 oder in u_1, also in beiden, aufgehen müßte; dies ist unmöglich, da u_1 und y_1 teilerfremd waren. Wegen $6b = 6tb_1$ sind die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt. Man erhält daher die teilerfremden Lösungen von (4) aus

$$y_1 \sqrt{t} + u_1 \sqrt{-6b_1} = (p_1 \sqrt{t} + q_1 \sqrt{-6b_1})^3;$$

also ist

$$y_1 = t p_1^3 - 18 b_1 p_1 q_1^2,$$
$$u_1 = 3 t p_1^2 q_1 - 6 b_1 q_1^3.$$

Andererseits ist

$$u_1 + b_1 = t p_1^2 + 6 b_1 q_1^2 = 3 t p_1^2 q_1 - 6 b_1 q_1^3 + b_1.$$

Hieraus folgt

$$p_1^2 t (3 q_1 - 1) = b_1 (6 q_1^3 + 6 q_1^2 - 1).$$

Diese Gleichung entspricht völlig der Gleichung (3); man kann daher alle für $q_1, p_1, t, u_1, y_1, u, y$ und x überhaupt in Betracht kommenden Werte angeben. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Die Voraussetzungen des Satzes sind z. B. [18]) für $b = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 35, 43, 47, 55 \ldots$ erfüllt.

Folgerung 1. *$x^3 + 2 = y^2$ hat nur die Lösungen $x = -1$, $y = \pm 1$.*

Es ist nämlich $b = 1$, $q = 0$, $p = \pm 1$, $q_1 = 0$, $t = 1$, $y = \pm 1$, $x = -1$.

Folgerung 2. *Die Gleichung $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + 2\beta^3 = 1$ hat nur die Lösung $\alpha = 1$, $\beta = 0$.*

---

[18]) Siehe die Tafel der Klassen binärer quadratischer Formen in Gauß' Werken 2 (Göttingen 1863), S. 450–474.

Denn auf Grund der Arbeit von Herrn E. Landau[19]) würde jede andere Lösung α_0, β_0 für $x^3 + 2 = y^2$ die Lösung

$$y = \alpha_0^3 + 6\alpha_0^2\beta_0 + 6\alpha_0\beta_0^2 + 4\beta_0^3,$$
$$x = -(\alpha_0^2 - 2\beta_0^2)$$

ergeben. Daher muß sein

$$\alpha_0^3 + 6\alpha_0^2\beta_0 + 6\alpha_0\beta_0^2 + 4\beta_0^3 = y = \pm 1$$
$$\alpha_0^3 + 3\alpha_0^2\beta_0 + 6\alpha_0\beta_0^2 + 2\beta_0^3 \quad = \quad 1.$$

Also ist entweder

$$3\alpha_0^2\beta_0 + 2\beta_0^3 = 0, \text{ d. h. } \beta_0 = 0, \ \alpha_0 = 1,$$

oder es ist

$$3\alpha_0^2\beta_0 + 2\beta_0^3 = -2, \qquad -x = \alpha_0^2 - 2\beta_0^2 = 1,$$

also

$$8\beta_0^3 + 3\beta_0 + 2 = 0.$$

Diese Gleichung hat aber keine ganze rationale Lösung.

Die gegebene Beweismethode läßt sich auch für eine Reihe weiterer spezieller diophantischer Gleichungen anwenden.

---

[19]) A. a. O. [6]).

(Eingegangen am 31. Juli 1925.)

Sur la nature analytique des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique.

Par

Serge Bernstein à Kharkow.

Extrait d'une correspondance avec M. Tibor Radó à Szeged.

Cher Monsieur, 7. 12. 1924.

Je vous prie de m'excuser de ne pas avoir répondu plus tôt à votre très intéressante lettre. Mais je ne voulais pas me borner à vous renvoyer à mon Mémoire russe paru en 1908 dans les Communications de la Société Mathématique de Kharkow, comme je l'avais fait à la page 100 de mon travail „Généralisation du problème de Dirichlet" des Mathematische Annalen t. LXIX.

Vos deux remarques sont parfaitement justifiées. Peu de temps après la publication du travail que vous vous êtes donné la peine de lire, je me suis aperçu de la difficulté que vous signalez pour le cas, où $p = 0$, $q = -1$. Il est évident que si je n'étais pas parvenu à la résoudre, non seulement ma démonstration du théorème de Hilbert devenait illusoire, mais je n'aurais pas pu entreprendre mes recherches ultérieures sur la généralisation du problème de Dirichlet. Heureusement, il est arrivé que la difficulté a pu être levée par la modification suivante que j'ai introduite dans la définition de la norme (Mémoire russe, Ch. II).

Soit

$$F(x) = \sum \sum A_{nk} x^k (R - x)^n.$$

J'appelle *norme réelle* la somme des modules maxima de tous ces termes, c'est-à-dire

$$\sum \sum |A_{nk}| \frac{k^k n^n}{(n+k)^{n+k}} R^{k+n}.$$

En posant ensuite

$$M_n = \sum_k |A_{nk}| \frac{k^k n^n}{(n+k)^{n+k}} R^{k+n},$$

je donne le nom de *norme à l'intérieur du contour* Γ_{0R_r} à la somme

$$(1) \qquad [F(x)]_{R_r} = M_0 + M_1 \frac{R+r}{R-r} + \ldots + M_n \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots .$$

Vous voyez bien que à fortiori si $[F(x)]_{R_r}$ est borné, la fonction est analytique à l'intérieur de Γ_{0R_r}; l'inégalité*) (25) se démontre aussi sans difficulté. Je passerai à présent à la démonstration des inégalités (26) et (27). Soit d'abord

$$I(x) = x^p \int_0^x F(x)\, x^q\, dx,$$

où

$$q \geqq 0, \qquad p+q+1 \geqq 0,$$

on a

$$(26) \qquad [I(x)]_{R_r} < \frac{R+r}{2r} \frac{R^{p+q+1}}{q+1} [F(x)]_{R_r}.$$

On a

$$x^p \int_0^x A_{nk} x^{q+k} (R-x)^n\, dx$$
$$= A_{nk} [a_{nk}^{(n)} x^{p+q+k+1} (R-x)^n + \ldots + a_{nk}^{(0)} x^{p+q+k+1+n}],$$

tous les coefficients du second membre étant positifs; donc le maximum de chaque terme du second membre est inférieur au maximum du premier membre et à fortiori inférieur à

$$|A_{nk}| \frac{n^n k^k}{(q+1)(n+k)^{n+k}} R^{n+k+p+q+1}.$$

Par conséquent, en écrivant

$$I(x) = \sum \sum B_{nk} x^k (R-x)^n,$$

et

$$L_n = \sum_k |B_{nk}| \frac{n^n k^k}{(n+k)^{n+k}} R^{n+k},$$

on a

$$L_n < \frac{R^{p+q+1}}{q+1} [M_n + M_{n+1} + \ldots]$$

Donc

$$[I(x)]_{R_r} = L_0 + L_1 \frac{R+r}{R-r} + \ldots + L_n \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots$$
$$< \frac{R^{p+q+1}}{q+1} \left[(M_0 + \ldots) + (M_1 + \ldots) \frac{R+r}{R-r} + \ldots + (M_n + \ldots) \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots\right]$$
$$< \frac{R^{p+q+1}}{q+1} \frac{R+r}{2r} [F(x)]_{R_r}.$$

*) Les numéros des formules sont ceux du Mémoire „Sur la nature analytique des solutions etc." Math. Annalen 59.

Passons à présent à la considération de l'intégrale

$$g(x) = x^p \int_x^R F(x) x^q \, dx,$$

où $p \geqq 0$, $p + q + 1 \geqq 0$. Il est essentiel d'admettre que $F(x)x^q$ est *régulière* à l'origine (ce qui est bien réalisé dans le cas des intégrales qui interviennent dans la solution de l'équation de Poisson — dans les formules 16 et 16bis A_n contient toujours ϱ^n en facteur).

Je commencerai par examiner le cas critique où $q = -1$.

On aura avec les mêmes notations ($k \geqq 1$):

$$x^p \int_x^R A_{nk} x^{k-1} (R-x)^n \, dx = A_{nk} a_{nk}^{(0)} x^p R^{k+n} - A_{nk} [a_{nk}^{(n)} x^{p+k} (R-x)^n + \ldots + a_{nk}^{(0)} x^{p+k+n}],$$

où

$$a_{nk}^{(0)} = \int_0^R x^{k-1} (R-x)^n \, dx = \frac{n!\,(k-1)!}{(k+n)!} R^{k+n} = \lambda \frac{n^n k^k}{(k+n)^{k+n}} \sqrt{\frac{n}{k(k+n)}} R^{k+n},$$

le coefficient λ étant borné (inférieur à 4) en vertu de la formule de Stirling. Par conséquent, le module maximum de chaque terme du second membre est inférieur à

$$8 \frac{n^n k^k}{(k+n)^{k+n}} R^{k+n+p} A_{nk}.$$

En reprenant donc le raisonnement fait plus haut, on a, en posant

$$g(x) = \Sigma \Sigma B_{nk} x^k (R-x)^n,$$

$$L_n = \sum_k |B_{nk}| \frac{n^n k^k}{(n+k)^{n+k}} < 8 R^p [M_n + M_{n+1} + \ldots],$$

d'où

$$[g(x)]_{Rr} < \frac{4(R+r)}{r} [F(x)]_{Rr} R^p. \qquad (27^{\text{bis}})$$

Vous voyez que l'on peut sans inconvénient supposer $p = 0$.

L'inégalité (27) pour le cas où $q \neq -1$, doit être établie par un raisonnement différent qui, en partant de la formule

$$x^p \int_x^R A_{nk} x^{k+q} (R-x)^n \, dx = A_{nk} (R-x)^{n+1} [\beta_0 x^{k+q+p} + \beta_1 x^{k+q+p-1} + \ldots + \beta_{k+q} x^p],$$

consiste à évaluer la somme des modules maxima des termes du second membre.

Pour simplifier l'écriture, je puis me borner au cas, où $p+q+1=0$, car pour passer au cas général il suffit de multiplier $g(x)$ par x^{p+q+1} en tenant compte de (25). Je suppose donc dans ce qui suit

$$p=-q-1\geqq 1, \qquad k+q\geqq 0.$$

Un calcul facile donne

$$\beta_0=\frac{1}{k+q+n+1},\ \beta_1=\frac{R(k+q)}{(k+q+n+1)(k+q+n)},\ \ldots,$$
$$\beta_{k+q}=\frac{R^{k+q}(k+q)!}{(k+q+n+1)\ldots(n+1)}.$$

Donc la somme des maxima du second membre est égale à

$$|A_{nk}|R^{n+k}(n+1)^{n+1}\left[\frac{(k-1)^{n-1}}{(k+n)^{k+n}}\frac{1}{k+q+n+1}\right.$$
$$\left.+\frac{(k-2)^{k-2}}{(k+n-1)^{k+n-1}}\frac{k+q}{(k+q+n+1)(k+q+n)}+\ldots\right].$$

Désignant par $M_{nk}=|A_{nk}|\frac{n^n k^k}{(n+k)^{n+k}}R^{n+k}$ le maximum du terme de $F(x)$ auquel correspondent tous les termes du second membre, et en écrivant les lettres $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pour désigner un facteur borné (indépendant de R, n, k, q, A_{nk}), nous pourrons mettre la somme considérée sous la forme

$$L_{nk}=\lambda M_{nk}\frac{n}{k(k+q+n+1)}\left[1+\frac{(k-2)^{k-2}(k+n)^{k+n}}{(k-1)^{k-1}(k+n-1)^{k+n-1}}\frac{k+q}{k+q+n}+\ldots\right].$$

Il s'agit évidemment de montrer que

$$L_{nk}<\frac{\lambda_1 M_{nk}}{|q+1|}, \tag{2}$$

car de là on conclura immédiatement que

$$L_{n+1}<\frac{\lambda_1 M_n}{|q+1|},$$

d'où

$$[g(x)]_{Rr}<\frac{\lambda_1}{|q+1|}\frac{R+r}{R-r}[F(x)]_{Rr}. \tag{27}$$

En utilisant la formule de Stirling, je transforme immédiatement chaque terme de la somme entre parenthèses (à un même facteur borné près) en

$$I_h=\sqrt{\frac{(k+n)(k-1)}{(k+n-h)(k-h-1)}}\cdot\frac{(k+n-1)\ldots(k+n-h)}{(k-1)\ldots(k-h)}\cdot\frac{(k+q)\ldots(k+q-h+1)}{(k+n+q)\ldots(k+n+q-h+1)},$$

de sorte que

$$L_{nk}=\lambda_2 M_{nk}\frac{n}{k(k+q+n+1)}\left[1+\sum_{h=1}^{k+q}I_h\right]. \tag{3}$$

Pour en déduire l'inégalité (2), examinons successivement les deux hypothèses: (A) $k-1<\frac{1}{2}n(p-\frac{5}{6})$ et ensuite l'hypothèse contraire (B) $k-1\geqq\frac{1}{2}n(p-\frac{5}{6})$.

(A). On a

$$\frac{I_h}{I_{h-1}}=\frac{k+q-h+1}{k+q+n-h+1}\cdot\frac{k+n-h}{k-h}\sqrt{\frac{(k+n-h+1)(k-h)}{(k+n-h)(k-h-1)}},$$

ou, en posant $k-h-1=s$,

$$\frac{I_h}{I_{h-1}}=\frac{s+q+2}{s+q+n+2}\sqrt{\frac{(s+n+2)(s+n+1)}{(s+1)s}}=\frac{1-\frac{p}{s+1}}{1-\frac{p}{s+n+1}}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{s+n+1}}{1-\frac{1}{s+1}}},$$

puisque $q+1=-p$. De plus $s\geqq p\geqq 1$, de sorte que $\frac{1}{s+1}\leqq\frac{1}{2}$; donc en remarquant que pour $x\leqq\frac{1}{2}$ on a

$$\sqrt{1+x}<\frac{1}{1-\frac{x}{2}},\qquad\frac{1}{\sqrt{1-x}}<1+\frac{5}{6}x,$$

nous voyons que

$$\frac{I_h}{I_{h-1}}<\frac{\left(1-\frac{p}{s+1}\right)\left(1+\frac{5}{6}\frac{1}{s+1}\right)}{\left(1-\frac{p}{s+n+1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{s+n+1}\right)}<\frac{1-\frac{p-\frac{5}{6}}{s+1}}{1-\frac{p+\frac{1}{2}}{s+n+1}}.$$

Il est aisé de vérifier que ce dernier rapport croit avec s tant que $s+1\leqq k-1<\frac{1}{2}n(p-\frac{5}{6})$. Donc sous la condition (A) les termes de notre somme décroissent plus rapidement que ceux de la progression géométrique ayant pour quotient

$$\frac{1-\frac{p-\frac{5}{6}}{k-1}}{1-\frac{p+\frac{1}{2}}{n+k-1}},$$

dont la somme est

$$\frac{(k-1)\left(n+k-p-\frac{3}{2}\right)}{n\left(p-\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{3}(k-1)}<\frac{3(k-1)\left(n+k-p-\frac{3}{2}\right)}{n\left(p-\frac{5}{6}\right)}.$$

Par conséquent

$$L_{nk}<\lambda_2 M_{nk}\frac{3}{p-\frac{5}{6}}<\frac{\lambda_2}{|q+1|}M_{nk}.$$

Considérons à présent l'hypothèse (B).

Écrivons le terme général I_h sous la forme

$$I_h = \prod_{s+1=k-1}^{s+1=k-h} \frac{1-\frac{p}{s+1}}{1-\frac{p}{s+n+1}} \sqrt{\frac{(k+n)(k-1)}{(k+n-h)(k-h-1)}} = P_h \sqrt{\frac{(k+n)(k-1)}{(k+n-h)(k-h-1)}}.$$

Or

$$\log \frac{1-\frac{p}{s+1}}{1-\frac{p}{s+n+1}} = p\left[\frac{1}{s+n+1} - \frac{1}{s+1}\right] + \frac{p^2}{2}\left[\frac{1}{(s+n+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}\right] + \ldots < p\left[\frac{1}{s+n+1} - \frac{1}{s+1}\right].$$

Donc

$$\log P_h < -p \sum_{x=k-h}^{x=k-1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}\right) < -p \int_{k-h}^{k} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}\right) dx$$

$$= -p \log \frac{k(k+n-h)}{(k-h)(k+n)}.$$

Par conséquent, on a pour toute valeur de h

$$I_h < \left[\frac{(k-h)(k+n)}{k(k+n-h)}\right]^p \sqrt{\frac{(k+n)(k-1)}{(k+n-h)(k-h-1)}}$$

$$< 2\frac{(k-h)^{p-\frac{1}{2}}}{(k+n-h)^{p+\frac{1}{2}}} \left(1+\frac{n}{k}\right)^p \sqrt{(k+n)(k-1)}.$$

Le maximum de

$$E_h = \frac{(k-h)^{p-\frac{1}{2}}}{(k+n-h)^{p+\frac{1}{2}}}$$

est atteint pour $k-h = n\left(p-\frac{1}{2}\right)$. Donc $E_h < \frac{1}{n\left(p+\frac{1}{2}\right)}$. Par conséquent, en tenant compte de (B),

$$I_h < \frac{2(k+n)}{n\left(p+\frac{1}{2}\right)} \left(1+\frac{2}{p-\frac{5}{6}}\right)^{p-\frac{1}{2}} < \frac{18(k+n)}{n\left(p+\frac{1}{2}\right)}.$$

Donc, en portant cette valeur dans l'égalité (3),

$$L_{nk} < \frac{18\lambda_2 n(k-p)(k+n)}{k(k+n-p)n\left(p+\frac{1}{2}\right)} M_{nk} < \frac{18\lambda_2}{p+\frac{1}{2}} M_{nk} < \frac{\lambda_1}{|q+1|} M_{nk},$$

ce qui justifie (27) dans toute sa généralité. J'ai à peine besoin d'ajouter que dans le cas de $q \geqq 0$ (qui n'est pas compatible avec la condition $p+q+1=0$) la formule (27) est une conséquence de (26).

L'application de ces inégalités à l'équation de Poisson ne présente pas de difficultés; vous pourriez consulter le § 13 de mon Mémoire russe,

où j'ai examiné avec tous les détails possibles les cas de $n = 0, 1, 2$ et $n > 2$.

Permettez-moi à présent de passer à votre seconde remarque.

Je signalerai d'abord (voyez page 70 du Mémoire russe) que pour la démonstration du théorème de la page 67 du Mémoire «Sur la nature etc.» il est inutile de supposer dérivables les fonctions D, E, F, car l'intégration par parties peut être limitée aux termes contenants $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Ainsi la démonstration que j'ai employée est suffisante pour l'équation elliptique

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0,$$

lorsque celle-ci est linéaire en r, s, t (c'est, en somme, ce que vous avez constaté vous-même à la fin de votre lettre).

Mais l'emploi de l'intégrale double de Picard est mal choisi pour la démonstration du fait que $z = u$ dans le cas général. Le procédé que je considère comme le plus simple est celui de Paraf (Annales de Toulouse t. VI, 1892) qui permet de fixer une limite supérieure du rayon du cercle où l'équation (42^{bis}) a une solution unique, indépendant des dérivées des coefficients de cette équation: on remarque d'abord que pour $F \cdot A < 0$ l'équation (42^{bis}) ne peut avoir de solution deux fois dérivable qui s'annulle sur un contour fermé sans être nulle identiquement. En effet (je développe un peu ce raisonnement, car Paraf lui-même après avoir transformé l'équation générale à la forme réduite ne considère que cette dernière; or la transformation elle-même peut être mise en doute, lorsque A, B, C ne sont pas supposés dérivables), soit $z_0 > 0$ le maximum de z; on a en ce point $p_0 = q_0 = 0$, $r_0 \leqq 0$, $t_0 \leqq 0$, $r_0 t_0 - s_0^2 \geqq 0$; si l'une au moins des quantités r_0, t_0 était différente de 0 (soit, par exemple, $r_0 < 0$) on aurait, en posant $r_0 t_0 - s_0^2 = \lambda$:

$$A r_0^2 + 2 B r_0 s_0 + C s_0^2 + C \lambda + F z_0 r_0 = 0,$$

ce qui est impossible, car tous les termes étant du même signe, le premier est non nul; donc on aurait nécessairement $r_0 = s_0 = t_0 = 0$; mais alors l'équation (42^{bis}) elle-même se réduirait au terme unique $F z_0 = 0$, ce qui est également impossible. Ce point étant établi, le changement de fonctions indiqué par Paraf conduit immédiatement au résultat voulu. Je crois qu'aucune méthode ne peut prétendre à remplacer avantageusement celle-ci. C'est pour ça (et aussi pour ne plus allonger cette lettre) que je me bornerai à indiquer brièvement le procédé de démonstration qui exige que dans l'équation (42^{bis}) écrite sous la forme

$$r + t = (1 - A) r - 2 B s + (1 - C) t - 2 D p - 2 E q - F z$$

les modules trigonométriques[1]) (pour la définition, voyez le § 10 du travail «Généralisation du problème de Dirichlet», Math. Annalen t. LXIX) des coefficients soient bornés et que de plus ceux de $(1-A)$, B, $(1-C)$ soient inférieurs (ce qui est réalisé actuellement) à un nombre fixe assez petit. Alors en utilisant des inégalités analogues à (36), où dans les premiers membres on a les modules trigonométriques de $r^k\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $r^k\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ etc. et dans le second celui de $r^k F(x,y)$, où k est un nombre positif non entier (page 63 de mon Mémoire russe) et $F(x,y)$ le second membre de l'équation de Poisson ($r=\sqrt{x^2+y^2}$), on reconnait que, M étant le plus grand des modules trigonométriques de $r^k\frac{\partial z}{\partial x}$, $r^k\frac{\partial z}{\partial y}$, $r^k z$, et M_1 le plus grand de ceux de $r^k\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $r^k\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $r^k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, on aura pour la solution z de l'équation (42^{bis}) s'annulant sur le cercle de rayon R

$$M_1 < \varepsilon M_1 + \lambda M, \qquad M < R[\varepsilon M_1 + \lambda M],$$

λ étant borné, et ε un nombre fixe très petit (par exemple, $\varepsilon=\frac{1}{4}$); donc, en prenant R assez petit pour que $\lambda R < \frac{1}{2}$, on aurait

$$M_1 < 2\varepsilon M_1,$$

ce qui exigerait que $M_1 = M = 0$. ... ...

S. Bernstein.

10. XII. 1924.

Monsieur, je me suis aperçu que la forme sous laquelle je vous ai présenté mes calculs ne comprend pas le cas de $n=0$. Mais ce cas est fort simple, car

$$x^p\int_x^R x^{q+k}\,dx = \frac{R-x}{k-p}\left[x^{k-1}+Rx^{k-2}+\ldots+R^{k+q}x^p\right],$$

en supposant toujours $p+q=-1$, $p\geqq 0$, $k+q\geqq 0$. Donc, la somme des maxima du second membre est inférieure à

$$\frac{R^k}{k-p}\left[\frac{1}{k}+\ldots+\frac{1}{p+1}\right] \leqq \frac{R^k}{|q|}\ldots.$$

S. Bernstein.

Monsieur, 16. II. 1925.

Je vous prie de m'excuser de ne pas vous avoir répondu plus tôt. La modification de la norme que vous proposez présente, peut-être, quel-

[1]) Les modules trigonométriques qui ne dépassent certainement pas les normes peuvent être limités supérieurement pour toute fonction dont la dérivée est bornée. Ainsi les deux fonctions z et u avec leurs dérivées des deux ordres ont leurs modules trigonométriques finis.

ques avantages au point de vue de la netteté des calculs, mais je ne la crois pas indispensable. En effet, du moment qu'on sait que la solution de l'équation de Poisson

$$v(x, y) = C_0 + \sum C_n \cos n\Theta + D_n \sin n\Theta$$

possède des coefficients de la forme

(1) $\quad C_n = \varrho^n \sum\sum c_{pq} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q, \quad D_n = \varrho^n \sum\sum d_{pq} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q,$

lorsque $F(x, y)$ est de la forme analogue, il suffit de dire que c'est la seule forme qu'on admet pour la représentation des fonctions qui se rencontrent dans les calculs. Par conséquent, si on définit la norme inférieure uniquement relativement aux développements de la nature indiquée, il n'y a aucun inconvénient, il me semble, d'opérer avec les normes telles que je les ai définies dans ma précédente lettre, en supposant que $(R^2 - \varrho^2)^q$ soit décomposée en une somme $(R - \varrho)^q (R^q + \ldots + \varrho^q)$. Mes normes seront certainement supérieures aux vôtres, mais l'essentiel est qu'elles seront finies pour toute fonction analytique et en particulier, pour la fonction $F(x, y)$ qui est dans le second membre de l'équation de Poisson, de sorte qu'elles le seront également pour la fonction $v(x, y)$ et ses dérivées des deux premiers ordres qui auront également la forme (1),

Je ne possède pas malheureusement d'exemplaire de mon mémoire russe, mais la rédaction de ce travail ne donne pas plus d'éclaircissement sur ce point que le mémoire que vous connaissez. De même, comme je vous l'ai dit dans ma dernière lettre, la question de l'unicité de la solution s'y trouve étudiée par le procédé de Picard qui est insuffisant pour le cas général; quant au procédé que je vous ai indiqué dans ma dernière lettre, je ne l'ai publié nulle part. La seule partie nouvelle de mon mémoire russe qui se rattache à l'analyticité de la solution est une méthode qui est basée sur l'emploi de la méthode des approximations successives à l'intérieur d'un anneau circulaire que je n'ai pas publié en français: la démonstration du théorème de M. Hilbert peut être faite, en procédant ainsi, sans l'emploi des séries normales. J'avais l'intention de développer tout ceci, ainsi que mes recherches sur la généralisation du problème de Dirichlet, dans un livre de la collection de M. Blumenthal, lorsque la guerre a éclaté. Depuis je me suis occupé d'autres questions, mais je vois qu'il faudra que je revienne sur ce sujet. ...

P. S. Mon mémoire russe ne contient également pas tous les développements de ma précédente lettre; je n'avais examiné d'une façon complète que le cas critique, où la définition primitive tombe en défaut $[p = 0, q = -1]$ ... .

S. Bernstein.

(Eingegangen am 5. November 1925.)

Das Hilbertsche Theorem über den analytischen Charakter der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*).

Von

Tibor Radó in Szeged (Ungarn).

Einleitung.

1. Die vorliegende Arbeit ist gelegentlich des Studiums der Abhandlung von Herrn S. Bernstein, *Sur la nature analytique* usw. (Math. Ann. **59** (1904), S. 20—76) entstanden. Es wird a. a. O. ein Beweis für das Hilbertsche Theorem gegeben, welches die Analytizität der dreimal stetig derivierbaren Lösungen der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus behauptet. Die erwähnte Arbeit ist schwer lesbar, außerdem gibt es verschiedene Stellen

*) Für das wichtige von Hilbert postulierte Theorem über den analytischen Charakter der Lösungen allgemeiner elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung lagen bis jetzt zwei verschiedene Beweise vor: 1. der von Herrn S. Bernstein in einer Annalen-Arbeit (1904), sowie einer später in russischer Sprache im XI. Bande der Kharkower Berichte veröffentlichten Abhandlung gegebene Beweis, 2. ein von Herrn Gevrey in den Annales de l'École Normale (1918) veröffentlichte, auf ganz anderen Prinzipien beruhende Beweis. Die erste Bernsteinsche Abhandlung ließ einige Fragen offen, die auch seine zweite, nur schwer zugängliche Arbeit nicht vollständig erledigte, so daß die Richtigkeit des Hilbertschen Theorems nicht ganz außer Zweifel stand, um so mehr, als die Gevreyschen Überlegungen nicht völlig lückenlos zu sein scheinen. (Man vergleiche übrigens die neuesten Ausführungen von Herrn Gevrey, Bulletin des sciences mathématiques, **50** (1926), S. 113—128, insbes. die Fußnote [1].) In seinen vorstehend abgedruckten brieflichen Mitteilungen an Herrn Radó hat Herr Bernstein die zweifelhaften Stellen seines Beweises vollständig erledigt. Es ist sehr erfreulich, daß Herr Radó sich auf Wunsch der Schriftleitung bereit erklärt hatte, seine Behandlung der Bernsteinschen, sich auf den Hilbertschen Satz beziehenden Untersuchungen zu einer lückenlosen Schlußkette auszugestalten. Wir geben im folgenden die elegante, völlig elementare, manche interessante Züge bietende Darstellung des Herrn Radó wieder.

Die Schriftleitung.

in der Beweisführung, die einer Modifikation oder einer genaueren Ausführung bedürfen; ähnlich verhält es sich mit einer zweiten Arbeit[1]), in welcher Herr S. Bernstein auf dieses Problem zurückkommt. Aus einem Briefwechsel mit Herrn S. Bernstein ging einmal hervor, daß er selbst eine Umarbeitung für nötig hielt, außerdem aber ergab sich die Möglichkeit, auf Grund seiner brieflichen Ausführungen und Andeutungen einen lückenlosen Beweis des Hilbertschen Theorems auszuarbeiten. Auf Anregung der Schriftleitung der *Mathematischen Zeitschrift* und im Einverständnis mit Herrn S. Bernstein wird in der vorliegenden Arbeit der auf diese Weise zustande gekommene Beweis mitgeteilt.

Eine ausführliche und in jeder Beziehung independente Darstellung lag im Plane der Veröffentlichung. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die folgenden Entwicklungen vollkommen elementar sind und insbesondere keine Kenntnisse über Potentialtheorie und Integralgleichungen voraussetzen.

An Literatur über das Hilbertsche Theorem kommt, außer den beiden erwähnten Arbeiten von Herrn S. Bernstein selbst, nur noch eine Arbeit von Herrn Gevrey in Betracht[2]). Herr Gevrey entwickelt eine direkte Methode, welche eine elegante Herleitung derjenigen Sätze über den analytischen Charakter der Lösungen gestattet, die dem Hilbertschen Theorem vorangegangen sind (Picard, Lütkemeyer, Holmgren); im allgemeinen Falle aber können gegen sein Verfahren verschiedene Bedenken geltend gemacht werden.

2. Eine ausführliche Besprechung der Ergebnisse, welche das Hilbertsche Theorem und die von Herrn S. Bernstein verwendeten Methoden vorbereitet haben, findet sich in der Einleitung und im Kapitel I seiner oben angeführten Annalenarbeit; wir wollen daher gleich das Hilbertsche Theorem selbst betrachten.

Sei $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t)$ eine Funktion, die für eine gewisse Stelle $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)$ verschwindet und in der Umgebung dieser Stelle eine analytische Funktion ihrer acht Argumente ist. Sei weiter $\zeta(x, y)$ eine dreimal stetig derivierbare Lösung von $\Phi = 0$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0), welche in diesem Punkte die Anfangswerte $z_0, \ldots, t_0$ annimmt, für welche also

$$\zeta(x_0, y_0) = z_0, \quad \ldots, \quad \zeta_{yy}(x_0, y_0) = t_0$$

---

[1]) Erschienen in russischer Sprache in Bd. XI der Communications de la Société Mathématique de Charkow.

[2]) Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) **35**, S. 127–190.

ist. Wird zur Abkürzung $(\Phi_r)_0 = \Phi_r(x_0, \ldots, t_0)$ usw. gesetzt, so lautet das Hilbertsche Theorem: *Wenn*

$$4(\Phi_r)_0(\Phi_t)_0 - (\Phi_s)_0^2 > 0$$

ist, so ist $\zeta(x, y)$ *in der Umgebung des Punktes* (x_0, y_0) *analytisch.*

Zur Erläuterung betrachten wir zunächst die Gleichung der Minimalflächen, wo also

$$\Phi = (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t$$

ist. Man hat jetzt

$$4\Phi_r\Phi_t - \Phi_s^2 = 4(1 + p^2 + q^2),$$

und dieser Ausdruck ist stets positiv. In einem solchen Falle können wir schlechthin sagen, die Gleichung $\Phi = 0$ sei vom elliptischen Typus; das Hilbertsche Theorem besagt dann, daß eine derartige Gleichung nur analytische Lösungen besitzt. Setzen wir aber etwa

$$\Phi = zr + t,$$

so wird $4\Phi_r\Phi_t - \Phi_s^2 = 4z$, und dieser Ausdruck hat dasselbe Vorzeichen wie die zu untersuchende Lösung z selbst; die Gleichung $zr + t = 0$ kann also an sich keinem Typus zugerechnet werden. Die Allgemeinheit des Hilbertschen Theorems zeigt sich eben darin, daß es auch in solchen Fällen eine Aussage über den analytischen Charakter der Lösungen gestattet. Für die Gleichung $zr + t = 0$ erhalten wir beispielsweise den Satz, daß jede positive Lösung analytisch ist.

Wenn die Gleichung $\Phi = 0$ in r, s, t *linear* ist, so kann das Hilbertsche Theorem wesentlich verschärft werden. In diesem Falle genügt es, die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen erster und zweiter Ordnung bei der zu untersuchenden Lösung vorauszusetzen, da unter Beibehaltung der übrigen Voraussetzungen die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen dritter Ordnung aus einem Satze von Herrn L. Lichtenstein unmittelbar folgt[3]).

3. Beim Hilbertschen Theorem wurde

$$4(\Phi_r)_0(\Phi_t)_0 - (\Phi_s)_0^2 > 0$$

angenommen. Diese Ungleichung ist gewiß erfüllt, wenn

$$(\Phi_r)_0 = (\Phi_t)_0 = 1, \quad (\Phi_s)_0 = 0$$

ist, und wir wollen gleich zeigen, daß die Voraussetzung dieses besonderen

[3]) Vgl. L. Lichtenstein, Über den analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie 1913, S. 915–941.

Sachverhaltes keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Wir setzen zur Abkürzung

$$(\Phi_r)_0 = \alpha, \quad (\Phi_s)_0 = 2\beta, \quad (\Phi_t)_0 = \gamma;$$

dann ist also $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$. Gewiß ist also $\alpha \neq 0$, und indem wir zur äquivalenten Gleichung $\frac{1}{\alpha}\Phi = 0$ übergehen, erkennen wir, daß $\alpha = 1$ vorausgesetzt werden darf; dann ist $\gamma - \beta^2 > 0$. Wir führen nun in Φ an Stelle von $x, y, \ldots, t$ neue Veränderliche $x', y', \ldots, t'$ durch die Formeln ein:

$$x = x', \quad y = \beta x' + (\gamma - \beta^2)^{1/2} y', \quad z = z',$$

$$p = p' - \frac{\beta}{(\gamma-\beta^2)^{1/2}} q', \quad q = \frac{1}{(\gamma-\beta^2)^{1/2}} q',$$

$$r = r' - \frac{2\beta}{(\gamma-\beta^2)^{1/2}} s' + \frac{\beta^2}{\gamma-\beta^2} t', \quad s = \frac{1}{(\gamma-\beta^2)^{1/2}} s' - \frac{\beta}{\gamma-\beta^2} t',$$

$$t = \frac{1}{\gamma-\beta^2} t'.$$

Wegen $\gamma - \beta^2 > 0$ ist diese lineare Transformation reell, ferner ist

$$\frac{\partial(x, y, \ldots, t)}{\partial(x', y', \ldots, t')} = \frac{1}{(\gamma-\beta^2)^{3/2}} \neq 0.$$

Es wird daher die Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ umkehrbar analytisch auf die Umgebung einer gewissen Stelle $(x_0', y_0', \ldots, t_0')$ abgebildet, und man hat:

$$\Phi(x, y, \ldots, t) = \Phi^*(x', y', \ldots, t'),$$

wo Φ^* in der Umgebung von $(x_0', y_0', \ldots, t_0')$ analytisch ist. Durch Ausrechnen findet man

$$(\Phi^*_{r'})_0 = (\Phi^*_{t'})_0 = 1, \quad (\Phi^*_{s'})_0 = 0.$$

Üben wir jetzt in $\zeta(x, y)$ die Transformation

$$x = x', \quad y = \beta x' + (\gamma - \beta^2)^{1/2} y'$$

aus, so wird $\zeta(x, y) = \zeta^*(x', y')$, wo ζ^* in der Umgebung von (x_0', y_0') dreimal stetig derivierbar ist. Gelingt es zu beweisen, daß ζ^* in der Umgebung von (x_0', y_0') analytisch ist, so gilt dasselbe offenbar für ζ in der Umgebung von (x_0, y_0). Setzen wir nun

$$\zeta(x, y) = z, \quad \ldots, \quad \zeta_{yy}(x, y) = t,$$

$$\zeta^*(x', y') = z', \quad \ldots, \quad \zeta^*_{y'y'}(x', y') = t',$$

so sieht man, daß $x, y, z, \ldots, t$ und $x', y', z', \ldots, t'$ eben durch die oben angeschriebene Transformation zusammenhängen; es folgt also

$$\zeta^*(x_0', y_0') = z_0', \quad \ldots, \quad \zeta^*_{y'y'}(x_0', y_0') = t_0',$$

$$\Phi^*(x', y', \zeta^*, \zeta^*_{x'}, \ldots, \zeta^*_{y'y'}) = 0,$$

und wir haben nun das Hilbertsche Theorem in einem Falle zu beweisen, wo $(\Phi_r^*)_0 = (\Phi_t^*)_0 = 1$, $(\Phi_s^*)_0 = 0$ ist.

Wir können und wollen also von vornherein

$$(\Phi_r)_0 = (\Phi_t)_0 = 1, \quad (\Phi_s)_0 = 0$$

annehmen. Bilden wir

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = r + t - \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

so ist f in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ analytisch, es gelten ferner die Beziehungen

$$r_0 + t_0 = f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0),$$
$$(f_r)_0 = (f_s)_0 = (f_t)_0 = 0.$$

Die zu untersuchende Funktion $\zeta(x, y)$ ist in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) dreimal stetig derivierbar, es ist

$$\zeta(x_0, y_0) = z_0, \quad \ldots, \quad \zeta_{yy}(x_0, y_0) = t_0,$$

und schließlich genügt sie in der Umgebung von (x_0, y_0) der Gleichung

$$r + t = f(x, y, z, p, q, r, s, t).$$

Aus diesen Voraussetzungen haben wir also die Analytizität von $\zeta(x, y)$ zu erschließen.

4. Dies gelingt, nach dem Vorbilde der grundlegenden Untersuchungen von Picard über lineare Gleichungen[4]), auf indirektem Wege. Wir werden zeigen: Wird ein Kreis mit dem Mittelpunkte (x_0, y_0) und mit hinreichend kleinem Radius angenommen, so kann durch sukzessive Approximationen eine Hilfslösung $u(x, y)$ gebildet werden, welche auf der Peripherie mit $\zeta(x, y)$ übereinstimmt und im Innern des Kreises analytisch ist. Aus dem Umstande, daß die beiden Lösungen $\zeta(x, y)$ und $u(x, y)$ auf der Peripherie einander gleich sind, werden wir dann ihre Identität im Innern des Kreises folgern, und damit wird das Hilbertsche Theorem bewiesen sein.

Eine genaue Besprechung dieses Gedankenganges, sowie die Angabe einer Schranke für die hinreichende Kleinheit des Radius des erwähnten Kreises, erfolgt in Teil II, § 2. Die Konstruktion der analytischen Hilfslösung $u(x, y)$ wird in Teil II, § 3 durchgeführt. Wir werden dabei die Voraussetzung, daß $\zeta(x, y)$ selbst eine Lösung ist, nicht ausnützen; wir werden nur davon Gebrauch machen, daß

$$\zeta(x_0, y_0) = z_0, \quad \ldots, \quad \zeta_{yy}(x_0, y_0) = t_0$$

[4]) Vgl. insbesondere: Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de Dirichlet, Acta Mathematica 25 (1902), S. 121–138.

ist, daß also $\zeta(x, y)$ die vorgelegte Gleichung im einzigen Punkte (x_0, y_0) befriedigt. Wir werden also die Randwertaufgabe im Kleinen für lediglich dreimal stetig derivierbare Randwerte lösen, und als besonders wichtiges Ergebnis ist zu betrachten, daß die gewonnene Lösung analytisch ist.

Die Begründung dieses Resultates erfolgt mit Hilfe der S. Bernsteinschen *Normen*; die Theorie derselben bildet den Inhalt von Teil I. Die Rolle dieser Normen tritt deutlich hervor, wenn man den Prozeß der Normbildung als eine Funktionaloperation auffaßt (vgl. Teil I, § 2); infolge der einfachen und wichtigen Eigenschaften, welche diese Funktionaloperation besitzt, dürfte die Bedeutung derselben über die hier gemachte Anwendung hinausgehen.

Die Identität der beiden Lösungen $\zeta(x, y)$ und $u(x, y)$ ergibt sich aus einem allgemeinen Unitätssatze, welcher in Teil II, § 1 durch eine einfache, von Paraf herrührende Methode erhalten wird.

Die folgenden Entwicklungen sind, wie bereits erwähnt, ganz elementar; es dürfte aber eine dankbare Aufgabe sein, insbesondere in der Theorie der Normen die hier mitgeteilten rechnerischen Methoden durch mehr begriffliche Betrachtungen zu ersetzen.

Teil I. Die S. Bernsteinschen Normen.

§ 1.

Formeln.

1. Die im folgenden durchzuführenden Überlegungen haben einen ausgesprochen elementaren Charakter; sie beruhen auf gewissen expliziten Formeln, die in diesem Zusammenhange wohl zuerst von Picard angewendet wurden [4]). Wir wollen diese Formeln zunächst zusammenstellen, um so mehr, da wir dieselben etwas genauer kennen müssen, als sie bei Picard stehen.

Sei $f(x, y)$ eine Funktion, welche in und auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte (x_0, y_0) und dem Halbmesser R nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig ist. Wir führen durch

$$x - x_0 = \varrho \cos\theta, \quad y - y_0 = \varrho \sin\theta \tag{1}$$

Polarkoordinaten ein und betrachten für $0 < \varrho \leqq R$ die Fourierreihe

$$f(x_0 + \varrho\cos\theta,\ y_0 + \varrho\sin\theta) \sim \frac{C_0(\varrho)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' (C_n(\varrho)\cos n\theta + D_n(\varrho)\sin n\theta), \tag{2}$$

wo also die Koeffizienten von ϱ abhängen. Man hat

$$(3)\qquad \begin{aligned} C_n(\varrho) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+\varrho\cos\theta, y_0+\varrho\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta,\\ D_n(\varrho) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+\varrho\cos\theta, y_0+\varrho\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Die Integrale rechts haben auch für negative Werte von n einen Sinn; es gilt

$$(4)\qquad C_{-n}=C_n,\quad D_{-n}=-D_n.$$

Aus den getroffenen Annahmen folgt sofort, daß die Koeffizienten für $0<\varrho<R$ zweimal stetig derivierbar sind.

Wir können nun auf dieselbe Weise die Ableitungen von $f(x,y)$ in Fourierreihen entwickeln, und wollen die Koeffizienten dieser Reihen explizite berechnen. Aus den Formeln

$$f_x=-\frac{f_\theta\sin\theta}{\varrho}+f_\varrho\cos\theta,$$

$$f_y=\frac{f_\theta\cos\theta}{\varrho}+f_\varrho\sin\theta,$$

erhalten wir durch elementare Rechnung die folgenden Ausdrücke, wobei die Fourierreihen in der üblichen Form

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)$$

anzusetzen sind.

Für f_x:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2}\Big(C'_{n+1}+\frac{n+1}{\varrho}C_{n+1}\Big)+\frac{1}{2}\Big(C'_{n-1}-\frac{n-1}{\varrho}C_{n-1}\Big),\\ \beta_n &= \frac{1}{2}\Big(D'_{n+1}+\frac{n+1}{\varrho}D_{n+1}\Big)+\frac{1}{2}\Big(D'_{n-1}-\frac{n-1}{\varrho}D_{n-1}\Big); \end{aligned}$$

für f_y:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2}\Big(D'_{n+1}+\frac{n+1}{\varrho}D_{n+1}\Big)-\frac{1}{2}\Big(D'_{n-1}-\frac{n-1}{\varrho}D_{n-1}\Big),\\ \beta_n &= \frac{1}{2}\Big(C'_{n-1}-\frac{n-1}{\varrho}C_{n-1}\Big)-\frac{1}{2}\Big(C'_{n+1}+\frac{n+1}{\varrho}C_{n+1}\Big). \end{aligned}$$

Indem wir diese Formeln zur Berechnung der Ableitungen von f_x und f_y anwenden, erhalten wir weiter

für f_{xx}:

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left(C_n'' + \frac{1}{\varrho}C_n' - \frac{n^2}{\varrho^2}C_n\right) + \frac{1}{4}\left(C_{n+2}'' + \frac{2n+3}{\varrho}C_{n+2}' + \frac{n(n+2)}{\varrho^2}C_{n+2}\right) + \frac{1}{4}\left(C_{n-2}'' - \frac{2n-3}{\varrho}C_{n-2}' + \frac{n(n-2)}{\varrho^2}C_{n-2}\right),$$

$$\beta_n = \frac{1}{2}\left(D_n'' + \frac{1}{\varrho}D_n' - \frac{n^2}{\varrho^2}D_n\right) + \frac{1}{4}\left(D_{n+2}'' + \frac{2n+3}{\varrho}D_{n+2}' + \frac{n(n+2)}{\varrho^2}D_{n+2}\right) + \frac{1}{4}\left(D_{n-2}'' - \frac{2n-3}{\varrho}D_{n-2}' + \frac{n(n-2)}{\varrho^2}D_{n-2}\right); \tag{7}$$

für f_{xy}:

$$\alpha_n = \frac{1}{4}\left(D_{n+2}'' + \frac{2n+3}{\varrho}D_{n+2}' + \frac{n(n+2)}{\varrho^2}D_{n+2}\right) - \frac{1}{4}\left(D_{n-2} - \frac{2n-3}{\varrho}D_{n-2}' + \frac{n(n-2)}{\varrho^2}D_{n-2}\right),$$

$$\beta_n = \frac{1}{4}\left(C_{n-2}'' - \frac{2n-3}{\varrho}C_{n-2}' + \frac{n(n-2)}{\varrho^2}C_{n-2}\right) - \frac{1}{4}\left(C_{n+2}'' + \frac{2n+3}{\varrho}C_{n+2}' + \frac{n(n+2)}{\varrho^2}C_{n+2}\right); \tag{8}$$

für f_{yy}:

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left(C_n'' + \frac{1}{\varrho}C_n' - \frac{n^2}{\varrho^2}C_n\right) - \frac{1}{4}\left(C_{n+2}'' + \frac{2n+3}{\varrho}C_{n+2}' + \frac{n(n+2)}{\varrho^2}C_{n+2}\right) - \frac{1}{4}\left(C_{n-2}'' - \frac{2n-3}{\varrho}C_{n-2}' + \frac{n(n-2)}{\varrho^2}C_{n-2}\right),$$

$$\beta_n = \frac{1}{2}\left(D_n'' + \frac{1}{\varrho}D_n' - \frac{n^2}{\varrho^2}D_n\right) - \frac{1}{4}\left(D_{n+2}'' + \frac{2n+3}{\varrho}D_{n+2}' + \frac{n(n+2)}{\varrho^2}D_{n+2}\right) - \frac{1}{4}\left(D_{n-2}'' - \frac{2n-3}{\varrho}D_{n-2}' + \frac{n(n-2)}{\varrho^2}D_{n-2}\right). \tag{9}$$

Um alles beisammen zu haben, merken wir noch die Ausdrücke für die Fourierkoeffizienten von $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ an. Den angeschriebenen Formeln entnimmt man:

für Δf:

$$\alpha_n = C_n'' + \frac{1}{\varrho}C_n' - \frac{n^2}{\varrho^2}C_n,$$

$$\beta_n = D_n'' + \frac{1}{\varrho}D_n' - \frac{n^2}{\varrho^2}D_n. \tag{10}$$

In diesen Formeln treten für $n = 0$ und $n = 1$ Glieder mit negativem Zeiger auf; diese sind im Sinne der Formeln (4) zu verstehen.

Wir wollen an diese Formeln eine Bemerkung knüpfen, welche die Vorsicht erklären soll, mit welcher wir später gelegentlich vorgehen werden. Sei insbesondere $f(x, y)$ analytisch; dann erkennt man leicht, daß ihre Koeffizienten $C(\varrho)$ und $D(\varrho)$ für $\varrho = 0$ analytisch sind. Man erkennt weiter, daß $\varrho = 0$ für $C_n(\varrho)$ und $D_n(\varrho)$ eine n-fache Nullstelle

ist; es beginnen also die Potenzreihen von $C_n(\varrho)$ und $D_n(\varrho)$ mit einem Glicde ϱ^n. Es ist also etwa

$$C_n(\varrho) = a_n \varrho^n + b_n \varrho^{n+1} + \dots .$$

Nun sind alle Ableitungen von $f(x, y)$ ebenfalls analytisch; wenn wir also etwa den Koeffizienten α_6 von f_{xx} derart berechnen, daß wir in den Formeln (7) die Koeffizienten C durch ihre Potenzreihen ersetzen, so *müssen* wir eine Potenzreihe erhalten, welche mit einem Gliede ϱ^6 beginnt. Durch Ausrechnung findet man aber:

$$\alpha_6 = -b_4 \varrho^3 + \text{höhere Glieder.}$$

Es *muß* also b_4 verschwinden. In der Tat erkennt man leicht direkt, daß in der Potenzreihe von $C_n(\varrho)$ nur Glieder von der Form ϱ^{n+3m} auftreten, und dann verifiziert man leicht, daß alles in Ordnung ist. In der Folge werden wir aber die Koeffizienten C und D in solche Reihen entwickeln, welche durch die dargestellte Funktion nicht eindeutig bestimmt sind; eine derartige Reihe kann sehr wohl die Null darstellen, ohne daß ihre Glieder einzeln verschwinden. Dann haben wir kein Recht mehr, a priori zu behaupten, daß gewisse unbequeme Glieder sich schließlich wegheben, wir werden dies beweisen müssen. Das Beispiel der Potenzreihen lehrt, daß das Gelingen dieses Nachweises nur dann erhofft werden kann, wenn die verwendeten Reihen eine *geeignete Form* haben.

2. Sei nun $F(x, y)$ in und auf dem Kreise mit dem Mittelpunkte (x_0, y_0) und dem Halbmesser R stetig, und man betrachte die Poissonsche Gleichung $\Delta f = F$. Wenn von $F(x, y)$ nur Stetigkeit verlangt wird, so kann man bekanntlich die Existenz der Lösungen nicht behaupten. Wir setzen aber voraus, daß aus anderweitigen Bedingungen die Existenz der am Rande des Kreises verschwindenden Lösung $f(x, y)$ irgendwie erschlossen worden sei, und daß die Ableitungen erster und zweiter Ordnung dieser Lösung am Rande noch stetig bleiben. Hier handelt es sich nur darum, explizite Ausdrücke für diese Funktionen aufzustellen. Zu dem Ende gehen wir von der Fourierreihe von $F(x, y)$ aus:

$$(11) \qquad F(x_0 + \varrho\cos\theta, y_0 + \varrho\sin\theta) \sim \frac{A_0(\varrho)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta).$$

Die Lösung $f(x, y)$ werde ebenfalls in Fourierreihe entwickelt:

$$f(x_0 + \varrho\cos\theta, y_0 + \varrho\sin\theta) \sim \frac{C_0(\varrho)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n(\varrho)\cos n\theta + D_n(\varrho)\sin n\theta).$$

Da nun $\Delta f = F$ sein soll, so erhalten wir nach (10) die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(12) \qquad C_n'' + \frac{1}{\varrho} C_n' - \frac{n^2}{\varrho^2} C_n = A_n, \qquad D_n'' + \frac{1}{\varrho} D_n' - \frac{n^2}{\varrho^2} D_n = B_n,$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

aus welchen wir die C und D leicht bestimmen können. Wir wollen den Gang der Rechnung kurz andeuten. Sei etwa $n \geqq 1$. Für die homogene Gleichung

$$\eta''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} \eta'(\varrho) - \frac{n^2}{\varrho^2} \eta(\varrho) = 0$$

sind ϱ^n und ϱ^{-n} zwei linear unabhängige Lösungen. Indem wir, nach der Methode der Variation der Konstanten, eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$\gamma_1(\varrho)\varrho^n + \gamma_2(\varrho)\varrho^{-n}$$

ansetzen, erhalten wir

$$\gamma_1'(\varrho) = \frac{1}{2n} \frac{A_n(\varrho)}{\varrho^{n-1}},$$

$$\gamma_2'(\varrho) = -\frac{1}{2n} A_n(\varrho)\varrho^{n+1}.$$

Wir können also setzen

$$\gamma_1(\varrho) = \frac{1}{2n} \int_R^\varrho \frac{A_n(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^{n-1}},$$

$$\gamma_2(\varrho) = -\frac{1}{2n} \int_0^\varrho A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\, d\varrho.$$

Demnach hat $C_n(\varrho)$ die Form

$$(13) \quad C_n(\varrho) = \frac{\varrho^n}{2n} \int_R^\varrho \frac{A_n(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^{n-1}} - \frac{1}{2n} \frac{1}{\varrho^n} \int_0^\varrho A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\, d\varrho + a_1\varrho^n + a_2\varrho^{-n},$$

wobei a_1 und a_2 Konstanten sind, welche durch das Verhalten von $C_n(\varrho)$ für $\varrho \to 0$ und $\varrho \to R$ auf die folgende Weise bestimmt werden. Es ist

$$C_n(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + \varrho\cos\theta, y_0 + \varrho\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x_0 + \varrho\cos\theta, y_0 + \varrho\sin\theta) - f(x_0, y_0)]\cos n\theta\, d\theta$$

$$+ \frac{f(x_0, y_0)}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta\, d\theta.$$

Da auf dem Kreise selbst die Funktion $f(x, y)$ nach Voraussetzung verschwindet, so folgt $C_n(R) = 0$, und aus der zweiten Darstellung folgt mit Rücksicht auf $n \geqq 1$, daß $C_n(\varrho) \to 0$ für $\varrho \to 0$. Beachten wir nun, daß infolge der Stetigkeit von $F(x, y)$ der Koeffizient $A_n(\varrho)$ für $0 \leqq \varrho \leqq R$ stetig, also insbesondere beschränkt ist, so ersehen wir unmittelbar, daß für $\varrho \to 0$ die ersten drei Glieder in der Formel (13) gegen Null gehen. Daraus folgt $a_2 = 0$; sonst könnte die rechte Seite von (13) für $\varrho \to 0$ nicht gegen Null konvergieren, was doch der Fall sein muß. Die Konstante a_1 bestimmt sich nun unmittelbar aus $C_n(R) = 0$, und so erhalten wir schließlich die Formel

$$(14_0) \quad C_n(\varrho) = \frac{\varrho^n}{2n} \int_R^\varrho \frac{A_n(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^{n-1}} - \frac{1}{2n} \frac{1}{\varrho^n} \int_0^\varrho A_n(\varrho) \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{1}{2n} \frac{\varrho^n}{R^{2n}} \int_0^R A_n(\varrho) \varrho^{n+1} d\varrho.$$

Durch Differentiation ergibt sich weiter

$$(14_1) \quad C_n'(\varrho) = \frac{1}{2} \varrho^{n-1} \int_R^\varrho \frac{A_n(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^{n-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_0^\varrho A_n(\varrho) \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{1}{2} \frac{\varrho^{n-1}}{R^{2n}} \int_0^R A_n(\varrho) \varrho^{n+1} d\varrho,$$

$$(14_2) \quad C_n''(\varrho) = A_n(\varrho) + \frac{n-1}{2} \varrho^{n-2} \int_R^\varrho \frac{A_n(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^{n-1}} - \frac{n+1}{2} \frac{1}{\varrho^{n+2}} \int_0^\varrho A_n(\varrho) \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{n-1}{2} \frac{\varrho^{n-2}}{R^{2n}} \int_0^R A_n(\varrho) \varrho^{n+1} d\varrho.$$

Für $n = 0$ erhält man auf ähnliche Weise

$$(16_0) \quad C_0(\varrho) = \int_R^\varrho \frac{dh}{h} \int_0^h A_0(\tau) \tau\, d\tau,$$

$$(16_1) \quad C_0'(\varrho) = \frac{1}{\varrho} \int_0^\varrho A_0(\varrho) \varrho\, d\varrho,$$

$$(16_2) \quad C_0''(\varrho) = A_0(\varrho) - \frac{1}{\varrho^2} \int_0^\varrho A_0(\varrho) \varrho\, d\varrho.$$

Ersetzt man in diesen Formeln die A durch die B, so ergeben sich die Koeffizienten D; wegen $B_0(\varrho) \equiv 0$ ist auch $D_0(\varrho) \equiv 0$, wie es sein muß.

3. Damit sind die Koeffizienten der Lösung $f(x, y)$ durch die Koeffizienten von $F(x, y)$ ausgedrückt. Für die Ableitungen von $f(x, y)$ erhalten wir explizite Ausdrücke, indem wir die Werte (14) und (16) in die Formeln (5) bis (9) einführen. Jedes Glied der Reihe (11) liefert dabei eine gewisse Anzahl von Gliedern, und wir wollen noch diese Beiträge anmerken. Indem wir mit einem vorgesetzten $*$ einen numerischen Faktor (evtl. die Null) bezeichnen, dessen absoluter Betrag Eins nicht übertrifft, und unter $D_1 f$ irgendeine Ableitung erster, unter $D_2 f$ irgendeine Ableitung zweiter Ordnung von $f(x, y)$ verstehen, erhalten wir durch Ausrechnen folgendes. Das Glied $\frac{A_0(\varrho)}{2}$ der Reihe (11) liefert

zu $f(x, y)$:

$$(17_0) \qquad * \int_{\varrho}^{R} \frac{d\hbar}{\hbar} \int_{0}^{\hbar} A_0(\tau)\, \tau\, d\tau,$$

zu $D_1 f$:

$$(17_1) \qquad * \left(\frac{1}{\varrho} \int_{0}^{\varrho} A_0(\varrho)\, \varrho\, d\varrho \right) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \theta,$$

zu $D_2 f$:

$$(17_2) \qquad * A_0(\varrho) + * \left(A_0(\varrho) - \frac{2}{\varrho^2} \int_{0}^{\varrho} A_0(\varrho)\, \varrho\, d\varrho \right) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} 2\theta.$$

Das Glied $A_n(\varrho) \cos n\theta$, wo $n \geqq 1$, liefert

zu $f(x, y)$:

$$(18_0) \qquad * \left(\frac{\varrho^n}{n} \int_{\varrho}^{R} \frac{A_n(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^{n-1}} \right) \cos n\theta + * \left(\frac{1}{n\varrho^n} \int_{0}^{\varrho} A_n(\varrho)\, \varrho^{n+1} d\varrho \right) \cos n\theta$$

$$+ * \left(\frac{\varrho^n}{nR^{2n}} \int_{0}^{R} A_n(\varrho)\, \varrho^{n+1} d\varrho \right) \cos n\theta,$$

zu $D_1 f$:

$$(18_1) \qquad * \left(\varrho^{n-1} \int_{\varrho}^{R} \frac{A_n(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^{n-1}} \right) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (n-1)\theta + * \left(\frac{\varrho^{n-1}}{R^{2n}} \int_{0}^{R} A_n(\varrho)\, \varrho^{n+1} d\varrho \right) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (n-1)\theta$$

$$+ * \left(\frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_{0}^{\varrho} A_n(\varrho)\, \varrho^{n+1} d\varrho \right) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (n+1)\theta,$$

zu $D_2 f$:

$$(18_2) \qquad *\left((n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-2)\theta$$

$$+ *\left(\frac{(n-1)\varrho^{n-2}}{R^{2n}}\int_{0}^{R}A_n(\varrho)\,\varrho^{n+1}\,d\varrho\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-2)\theta + *\,A_n(\varrho)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-2)\theta$$

$$+ *\,A_n(\varrho)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\theta + *\left(A_n(\varrho)-\frac{2(n+1)}{\varrho^{n+2}}\int_{0}^{\varrho}A_n(\varrho)\,\varrho^{n+1}\,d\varrho\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+2)\theta.$$

Man hat dabei für f_x, f_{xx}, f_{yy} überall *cosinus*, für f_y, f_{xy} überall *sinus* zu nehmen. Schreibt man in diesen Formeln B für A und vertauscht die Rollen von *cosinus* und *sinus*, so erhält man die Beiträge der Sinusglieder $B_n(\varrho)\sin n\theta$ (wobei zu beachten ist, daß $B_0(\varrho)\equiv 0$).

§ 2.

Einführung der S. Bernsteinschen Normen.

1. Die nunmehr einzuführenden Normen sollen uns instand setzen, den Prozeß der sukzessiven Approximation bei der Lösung der Randwertaufgabe im Kleinen (Teil II, § 3) zu beherrschen. Zwecks Erklärung dieser Normen wurden von Herrn S. Bernstein die Normalreihen eingeführt. Nach der Art und Weise, wie wir die Normen anwenden werden, wird es vollkommen klar sein, daß es ganz belanglos ist, auf welche besondere Art die Normen erklärt wurden, es kommt einzig und allein auf die für dieselben geltenden Beziehungen an; mit anderen Worten, die Normbildung kann als eine Funktionaloperation aufgefaßt werden, deren explizite arithmetische Erklärung weiter keine Rolle spielt, die nur eine Reihe von Eigenschaften besitzen muß, um mit ihrer Hilfe gewisse unendliche Prozesse beherrschen zu können.

Dieser Auffassung entsprechend, werden wir zunächst die Normbildung gewissermaßen axiomatisch erklären, und wir werden dann die Existenz einer Funktionaloperation nachweisen, welche alle die geforderten Eigenschaften besitzt.

2. In der xy-Ebene sei ein fester Punkt (x_0, y_0) vorgegeben; es werden die Kreise mit diesem Mittelpunkte betrachtet. Der einzelne Kreis ist dann durch Angabe seines Halbmessers R bestimmt und kann kurz als Kreis R bezeichnet werden. Ist dann $F(x, y)$ eine Funktion, welche in und auf einem Kreise R eindeutig erklärt ist, so wird eine Bedingung aufgestellt, damit auf diese Funktion der Prozeß der Normbildung angewendet werden kann. Ist diese Bedingung erfüllt, so heißt $F(x, y)$ im

Kreise R normal, und durch die Normbildung wird der Funktion eine nicht-negative Zahl, ihre Norm, zugeordnet, die mit $N[F]_R$ bezeichnet werde. Eine und dieselbe Funktion kann auch in verschiedenen Kreisen R_1 und R_2 normal sein, die Normen $N[F]_{R_1}$ und $N[F]_{R_2}$ sind dann im allgemeinen verschieden.

Wir wollen nun zunächst drei Postulate aufzählen, welche in gewissem Sinne die Rolle von Anfangsbedingungen für die Operation der Normbildung spielen.

E_1. Ist $u(x, y)$ im Kreise R harmonisch, so ist sie daselbst dann und nur dann normal, wenn sie am Rande stetig bleibt, und wenn für die Fourierreihe ihrer Randwerte

$$u(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

die Reihe

$$\frac{|\alpha_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n| + |\beta_n|)$$

konvergiert (also eine endliche Summe hat). Es ist dann:

$$N[u]_R = \frac{|\alpha_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n| + |\beta_n|).$$

E_2. Wenn $F(x, y)$ im Kreise R normal ist, so soll dort die Ungleichung gelten:

$$|F| \leqq N[F]_R.$$

E_3. Ist $F(x, y)$ im Kreise R normal, so soll sie innerhalb dieses Kreises analytisch sein und auf der Peripherie stetig bleiben. (Damit soll keineswegs gesagt sein, daß auch die Umkehrung bestehen muß.)

Jetzt folgen die Rechenregeln:

E_4. Sind $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ im Kreise R normal, so soll sowohl ihre Summe wie auch ihr Produkt im Kreise R normal sein, und es sollen die Ungleichungen gelten

$$N[F_1 + F_2]_R \leqq N[F_1]_R + N[F_2]_R, \quad N[F_1 F_2]_R \leqq N[F_1]_R N[F_2]_R.$$

Nun kommen die wesentlichsten Forderungen an die Reihe.

E_5. Seien $F_1, F_2, \ldots$ im Kreise R normal. Wenn die Reihe

$$N[F_1]_R + N[F_2]_R + \cdots$$

konvergiert, so soll die Reihe

$$F_1 + F_2 + \cdots$$

im Kreise R gleichmäßig konvergieren, und ihre Summe $F(x, y)$ soll im Kreise R ebenfalls normal sein. Es soll ferner die Ungleichung bestehen

$$N[F]_R \leqq N[F_1]_R + N[F_2]_R + \cdots .$$

E_6. Sei $F(x, y)$ im Kreise R normal. Dann soll die auf der Peripherie dieses Kreises verschwindende Lösung der Poissonschen Gleichung $\Delta f = F$ existieren; sowohl diese Lösung wie auch ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung sollen im Kreise R wieder normal sein, es sollen ferner die Ungleichungen bestehen

$$N[f]_R \leqq \lambda R^2 N[F]_R ,$$

$$N[D_1 f]_R \leqq \lambda R N[F]_R ,$$

$$N[D_2 f]_R \leqq \lambda N[F]_R ,$$

wobei λ eine absolute Konstante ist.

Wir bemerken gleich, daß für die im folgenden zugrunde gelegte Normbildung etwa $\lambda = 5 \cdot 3^{10}$ ein brauchbarer Wert ist. Wesentlich ist nur der Umstand, daß λ weder vom Radius R noch von der Funktion $F(x, y)$ abhängt.

3. Zu diesen Postulaten wollen wir jetzt nur folgendes bemerken. Durch dieselben wird das Funktionenfeld, auf welches die Operation der Normbildung angewendet werden kann, nicht erschöpfend beschrieben. Nur für harmonische Funktionen wird ein direktes Kriterium gegeben, für andere Funktionen können wir nur dann behaupten, daß sie normal sind, wenn sie durch bestimmte Prozesse erreicht werden können, nämlich durch diejenigen Prozesse, die in E_4, E_5, E_6 beschrieben sind. Dies genügt aber, um nachweisen zu können, daß alle diejenigen Lösungen gewisser Differentialgleichungen, von welchen im Hilbertschen Theorem die Rede ist, in einem geeigneten Kreise normal, also analytisch sind. In der Tat, in Teil II werden wir uns nur der Eigenschaften E_1 bis E_6 bedienen und nirgends auf die explizite arithmetische Erklärung der Normbildung zurückgehen. *Es ist also die Behauptung der bloßen Existenz einer Funktionaloperation mit den Eigenschaften E_1 bis E_6 ein folgenschwerer Satz.* Diesen Existenzbeweis führen wir im folgenden mit Hilfe der Normalreihen; es wäre aber sehr erfreulich, wenn es gelingen würde, einen einfacheren Existenzbeweis zu konstruieren, da die Normbildung bei verschiedenen wichtigen Problemen vorteilhafte Verwendung zu gestatten scheint.

Sieht man bei dem Postulate E_6 von der Forderung bezüglich der zweiten Ableitungen $D_2 f$ ab, so hat man die Eigenschaften derjenigen

Normbildung vor sich, deren sich Picard[5]) und nach ihm Holmgren[6]) bedient haben, um die besonderen Sätze zu beweisen, welche das allgemeine Theorem vorbereitet haben. In der Tat hat Herr S. Bernstein in seiner Dissertation sein Problem dahin formuliert, ein analytisches Werkzeug zu schaffen, welches auch die Erfassung der zweiten Ableitungen der Lösung der Poissonschen Gleichung gestattet.

4. Um nun die Normbildung durch einen expliziten arithmetischen Prozeß übersichtlich erklären zu können, empfiehlt es sich, schrittweise vorzugehen. Wir erklären zunächst *Normalausdrücke* für den Kreis R, und zwar bezeichnen wir so die Ausdrücke

$$a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q\cos n\theta,$$
$$a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q\sin n\theta.$$

Dabei sind ϱ und θ die durch

$$x-x_0=\varrho\cos\theta,\qquad y-y_0=\varrho\sin\theta$$

bestimmten Polarkoordinaten, und n, p, q sind beliebige nicht-negative ganze Zahlen; a bedeutet einen beliebigen reellen Koeffizienten. Man stellt leicht die wichtige Tatsache fest, daß diese Ausdrücke Polynome von x und y darstellen. Man hat nämlich, wenn i die imaginäre Einheit bezeichnet:

$$a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q\cos n\theta$$
$$=a\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^p\left(R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2\right)^q\Re(x-x_0+i(y-y_0))^n,$$
$$a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q\sin n\theta$$
$$=a\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^p\left(R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2\right)^q\Im(x-x_0+i(y-y_0))^n.$$

Das Symbol

$$\Re\left[a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q\cos n\theta\right]_R$$

heiße die *Frakturnorm* des Normalausdruckes und bedeute die Zahl

$$|a|\,\sigma^q\max_{0\leqq\varrho\leqq R}\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q.$$

Dabei bedeutet σ eine absolute Konstante, die *Grundzahl der Normbildung*. Als solche könnten wir irgendeine positive Zahl größer als Eins wählen; wir setzen im folgenden der Bestimmtheit wegen

$$\sigma=3.$$

---

[5]) L. c. [4]).

[6]) Über eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, Math. Ann. 57 (1903), S. 409—420.

Die Frakturnorm von $a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q \sin n\theta$ ist ebenfalls gleich

$$|a|\sigma^q \max_{0\leqq\varrho\leqq R} \varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q;$$

überhaupt hat der Faktor $\cos n\theta$ bzw. $\sin n\theta$ auf den Wert der Frakturnorm keinen Einfluß.

Ist P ein Normalausdruck für den Kreis R, so gilt offenbar in und auf diesem Kreise

$$|P| \leqq \mathfrak{N}[P]_R.$$

Sind also $P_1, P_2, \ldots$ Normalausdrücke für den Kreis R, und ist die Reihe ihrer Frakturnormen konvergent, so ist die Reihe $P_1+P_2+\ldots$ im abgeschlossenen Kreise R gleichmäßig konvergent und die Reihensumme ist daselbst stetig. Wir definieren nun:

Eine Reihe $P_1+P_2+\ldots$ von Normalausdrücken für den Kreis R heißt eine *Normalreihe* für diesen Kreis, wenn die Reihe der Frakturnormen konvergiert. Jede Normalreihe für den Kreis R konvergiert also in und auf diesem Kreise gleichmäßig und stellt eine daselbst stetige Funktion dar. Die Summe der Frakturnormen heißt die Frakturnorm der Normalreihe.

Die Frakturnormen sind also nur für ganz bestimmte *Ausdrücke* bzw. für Reihen von solchen erklärt. Die nunmehr zu erklärende Normbildung hingegen betrifft Funktionen.

Ist $F(x, y)$ in und auf dem Kreise R erklärt, so heißt sie in diesem Kreise *normal*, wenn sie daselbst durch eine Normalreihe für diesen Kreis dargestellt werden kann. Die untere Grenze der Frakturnormen aller Normalreihen, welche eine solche Darstellung von $F(x, y)$ liefern, heißt die Norm schlechthin von $F(x, y)$ und wird mit $N[F]_R$ bezeichnet.

5. Damit ist die Funktionaloperation der Normbildung explizite definiert. Wir bemerken sogleich, daß die gegebene Definition mit derjenigen von Herrn S. Bernstein nicht ganz übereinstimmt, und wollen gleichzeitig nachdrücklich betonen, daß trotzdem die folgenden Überlegungen gerade in ihren schwierigeren Teilen auf den Untersuchungen des Herrn S. Bernstein beruhen. Dies wird am deutlichsten aus einer kurzen Besprechung des Unterschiedes der beiden Definitionen hervorgehen.

Wir werden bald erkennen, daß die Verifikation des besonders wichtigen Postulates E_4 letzten Endes auf den Beweis einer Reihe von Sätzen (der Sätze (1^*) bis (10^*) in Teil I, § 4) hinausläuft, welche Ausdrücke der Form

$$a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q$$

betreffen. Jeder dieser Sätze besteht aus zwei Teilen; der erste Teil behauptet das Bestehen gewisser Identitäten, der zweite Teil das Bestehen

gewisser Ungleichungen. Es ist a priori klar, daß nur der zweite Teil eigentliche Schwierigkeiten bereiten kann; und die Beweise dieser schwierigeren zweiten Teile haben wir aus einer bereits erwähnten brieflichen Mitteilung des Herrn S. Bernstein fast unmittelbar übernehmen können. Allerdings beziehen sich die Sätze von Herrn S. Bernstein auf die allgemeineren Ausdrücke

$$a\varrho^k(R-\varrho)^\lambda.$$

Um aus diesen Sätzen die entsprechenden Tatsachen für die spezielleren Ausdrücke

$$a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q$$

zu erhalten, hätten wir nach ihm so zu verfahren, daß wir diesen Ausdruck durch Anwendung der Relation

$$(R^2-\varrho^2)^q=(R-\varrho)^q(R^q+\ldots+\varrho^q)$$

zunächst in eine Summe der Form

$$a'\varrho^{k'}(R-\varrho)^{\lambda'}+a''\varrho^{k''}(R-\varrho)^{\lambda''}+\ldots$$

verwandeln. Auch die Normen hätten wir durch Vermittelung dieser Relation zu bilden, wobei sich größere Werte ergeben würden wie bei uns. Bei der genauen Durchführung schien es aber ratsamer zu sein, die Betrachtung auf die spezielleren Ausdrücke zu beschränken, da auf diese Weise auch die Identitäten betreffenden ersten Teile der erwähnten Sätze (1^*) bis (10^*) in § 4 in übersichtlicher Weise verifiziert werden konnten. Dies erklärt sich aus der Bemerkung am Schlusse der Nr. 1, § 1: bei dieser Art von Überlegungen können nur solche Ausdrücke verwendet werden, die eine geeignete Form haben. Dementsprechend haben wir die Erklärung der Normen auf die zwar spezielleren, aber dafür handlicheren Ausdrücke gegründet.

Bevor wir dazu übergehen, das Erfülltsein der Postulate E_1 bis E_6 zu verifizieren, wollen wir an die Definition der Normbildung eine prinzipielle Bemerkung knüpfen, daß nämlich die Klasse der in einem Kreise R normalen Funktionen durch keine einfache funktionale Eigenschaft charakterisiert worden ist. Im Innern des Kreises sind, wie zu zeigen sein wird, diese Funktionen analytisch, auf der Peripherie hingegen können sie ein recht allgemeines Verhalten aufweisen, wie dies aus dem Postulate E_1 ersichtlich ist; ist eine Funktion im Kreise R normal, so zeigt dasselbe Postulat E_1, daß die Ableitungen erster Ordnung im allgemeinen nicht mehr normal sind. Daraus erklärt sich der umständliche Charakter der folgenden Überlegungen, da wir das Erfülltsein der Postulate E_1 bis E_6 nicht durch begriffliche Schlüsse, sondern im wesentlichen durch Rechnung erbringen werden müssen. Eine wesentliche Vereinfachung scheint erst

möglich zu sein, wenn es gelingt, die in einem Kreise normalen Funktionen durch eine einfache funktionale Eigenschaft zu charakterisieren [7]).

§ 3.

Verifikation der Postulate E_1 bis E_5.

Ad E_1. Es werde erstens angenommen, daß die harmonische Funktion $u(x, y)$ im Kreise R normal ist. Sei dann ΣP_ν irgendeine Normalreihe für $u(x, y)$. Diese Reihe konvergiert im abgeschlossenen Kreise gleichmäßig, und ihre Summe ist daselbst stetig; dies liegt im Begriffe der Normalreihe. Ist also n ein bestimmter Index, so können wir den Fourierkoeffizienten

$$A_n(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + \varrho\cos\theta, y_0 + \varrho\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta$$

durch gliedweise Integration der Normalreihe erhalten. Seien nun

$$a'\varrho^{n+2p'}(R^2-\varrho^2)^{q'}\cos n\theta, \quad a''\varrho^{n+2p''}(R^2-\varrho^2)^{q''}\cos n\theta, \ \ldots$$

diejenigen Glieder der Reihe ΣP_ν, welche $\cos n\theta$ enthalten; die übrigen liefern keinen Beitrag zu $A_n(\varrho)$, und man erhält:

$$A_n(\varrho) = a'\varrho^{n+2p'}(R^2-\varrho^2)^{q'} + a''\varrho^{n+2p''}(R^2-\varrho^2)^{q''} + \ldots .$$

Folglich ist für $0 < \varrho < R$

$$|A_n(\varrho)| \leqq |a'| \max_{0\leqq\varrho\leqq R} \varrho^{n+2p'}(R^2-\varrho^2)^{q'} + |a''| \max_{0\leqq\varrho\leqq R} \varrho^{n+2p''}(R^2-\varrho^2)^{q''} + \ldots .$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite werden nicht verkleinert, wenn man noch die Faktoren $\sigma^{q'}, \sigma^{q''}, \ldots$ hinzufügt, da $\sigma = 3 > 1$ ist. Es folgt also:

$$\max_{0\leqq\varrho\leqq R} |A_n(\varrho)| \leqq \sum_{(\cos n\theta)} \Re[P_\nu]_R,$$

wobei das Zeichen $\sum_{(\cos n\theta)}$ darauf hinweist, daß die Summierung nur auf solche Reihenglieder zu erstrecken ist, welche $\cos n\theta$ enthalten. Indem man die Sinuskoeffizienten

$$B_n(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + \varrho\cos\theta,\ y_0 + \varrho\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

---

[7]) Es läßt sich leicht zeigen, daß eine Funktion $F(x, y)$ in einem Kreise R gewiß dann normal ist, wenn sie in einem etwas größeren Kreise analytisch ist. Diese hinreichende Bedingung kommt aber für unsere Zwecke nicht in Betracht, da wir bei der Lösung der Randwertaufgabe im Kleinen (Teil II, § 3) mit solchen Funktionen arbeiten werden, deren Analytizität auf der Kreisperipherie a priori nicht feststeht.

ebenso behandelt, erhält man die Ungleichung

$$\max_{0\leqq\varrho\leqq R}\frac{|A_0(\varrho)|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{0\leqq\varrho\leqq R}|A_n(\varrho)|+\max_{0\leqq\varrho\leqq R}|B_n(\varrho)|\right)\leqq\sum\mathfrak{N}[P_\nu]_R.$$

Da aber $u(x, y)$ harmonisch ist, so ist

$$A_n(\varrho)=\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\alpha_n,\qquad B_n(\varrho)=\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\beta_n,$$

wobei

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)$$

die Fourierreihe der Randfunktion $u(x_0+R\cos\theta, y_0+R\sin\theta)$ ist. Wir haben also

$$\max_{0\leqq\varrho\leqq R}|A_n(\varrho)|=|\alpha_n|,\qquad \max_{0\leqq\varrho\leqq R}|B_n(\varrho)|=|\beta_n|,$$

und es folgt

$$\frac{|\alpha_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|)\leqq\sum\mathfrak{N}[P_\nu]_R.$$

Nun war ΣP_ν irgendeine Normalreihe für $u(x, y)$; aus der Erklärung von $N[u]_R$ als untere Grenze folgt also weiter

$$\frac{|\alpha_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|)\leqq N[u]_R.$$

Wir haben noch zu zeigen, daß hier das Gleichheitszeichen gilt. Es ist

$$\begin{aligned}u(x, y)&=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)\\&=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{R^n}\varrho^n\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{R^n}\varrho^n\sin n\theta.\end{aligned}$$

Das einzelne Glied dieser Reihe hat die Form $a\varrho^m\cos m\theta$ bzw. $a\varrho^m\sin m\theta$, ist also ein Normalausdruck mit der Frakturnorm $|a|R^m$. Die Summe der Frakturnormen ist eben

$$\frac{|\alpha_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|).$$

Die Fourierreihe der normalen harmonischen Funktion $u(x, y)$ ist also bereits eine Normalreihe; nach der Definition von $N[u]_R$ als untere Grenze ist also $N[u]_R$ nicht größer als die Summe der Frakturnormen, und da bereits gezeigt wurde, daß $N[u]_R$ nicht kleiner als diese Summe ist, so folgt in der Tat

$$N[u]_R=\frac{|\alpha_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|).$$

Wenn umgekehrt

$$\frac{|\alpha_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$$

konvergiert, so stellt man wie oben fest, daß die Fourierreihe der harmonischen Funktion $u(x, y)$ eine Normalreihe ist, also $u(x, y)$ normal ist; die Gleichung

$$N[u]_R=\frac{|\alpha_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$$

wird genau wie oben erhalten.

Ad E_2. Ist ΣP_ν irgendeine Normalreihe für $F(x, y)$, so folgt

$$|F|\leqq\Sigma|P_\nu|\leqq\Sigma\,\mathfrak{N}[P_\nu]_R.$$

Da ΣP_ν irgendeine Normalreihe für $F(x, y)$ war, so folgt hieraus

$$|F|\leqq N[F]_R.$$

Ad E_3. Aus Gründen der Bequemlichkeit führen wir einige Bezeichnungen ein. Sei (x_1, y_1) ein Punkt im Innern des Kreises R und

$$\mathfrak{P}(x-x_1, y-y_1)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty}c_{\alpha\beta}(x-x_1)^{\alpha_1}(y-y_1)^{\beta}$$

eine Potenzreihe mit diesem Mittelpunkte. Die Variablen sind in der Folge immer reell, die Koeffizienten werden gelegentlich auch komplex sein. Ist

$$\mathfrak{P}^*(x-x_1, y-y_1)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty}c^*_{\alpha\beta}(x-x_1)^{\alpha}(y-y_1)^{\beta}$$

eine zweite Potenzreihe mit nicht-negativen reellen Koeffizienten, so soll

$$\mathfrak{P}\prec\mathfrak{P}^*$$

bedeuten, daß für alle Werte von α und β die Beziehung

$$|c_{\alpha\beta}|\leqq c^*_{\alpha\beta}$$

gilt. Wir setzen schließlich, unter δ eine positive Zahl verstanden,

$$\mathfrak{P}(\delta)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty}|c_{\alpha\beta}|\,\delta^{\alpha+\beta},$$

falls die rechte Seite konvergiert. In diesem Falle ist die Potenzreihe im Quadrate

$$|x-x_1|<\delta,\quad |y-y_1|<\delta$$

gewiß konvergent, und es gilt dort offenbar $|\mathfrak{P}|\leqq\mathfrak{P}(\delta)$.

Haben $\mathfrak{P}_1^*(x-x_1, y-y_1)$, $\mathfrak{P}_2^*(x-x_1, y-y_1)$ nicht-negative reelle Koeffizienten, und gilt

$$\mathfrak{P}_1\prec\mathfrak{P}_1^*,\quad \mathfrak{P}_2\prec\mathfrak{P}_2^*,$$

so gilt für $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$:

$$\dot{\mathfrak{P}}(\delta) \leqq \mathfrak{P}_1^*(\delta)\, \mathfrak{P}_2^*(\delta).$$

Ist weiter

$$\mathfrak{P}_1(x - x_1, y - y_1), \ldots, \mathfrak{P}_k(x - x_1, y - y_1), \ldots$$

eine unendliche Folge von Potenzreihen, und ist $\sum_k \dot{\mathfrak{P}}_k(\delta)$ endlich, so kann in der Umgebung von (x_1, y_1) auch die Summe der Reihe $\sum \mathfrak{P}_k(x - x_1, y - y_1)$ in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_1, y - y_1)$ entwickelt werden, und man hat

$$\dot{\mathfrak{P}}(\delta) \leqq \sum \dot{\mathfrak{P}}_k(\delta).$$

Die Beweise sind unmittelbar.

Dies vorausgeschickt, werden wir folgendes zeigen. Sei $F(x, y)$ im Kreise R normal. Sei (x_1, y_1) ein innerer Punkt des Kreises, und sei $\varrho_1 < R$ die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte (x_0, y_0). Man bestimme eine positive Zahl δ, welche den Ungleichungen genügt

$$\varrho_1 + 2\delta < R, \tag{22}$$

$$\frac{R^2 - \varrho_1^2 + 4\varrho_1\delta + 2\delta^2}{R^2 - (\varrho_1 + 2\delta)^2} < \sigma. \tag{23}$$

Hier ist $\sigma = 3$ die Grundzahl der Normbildung. Da die linke Seite der Ungleichung (23) für $\delta \to 0$ gegen Eins geht, so ist eine derartige Wahl der positiven Zahl δ gewiß möglich. Dann kann, wie wir zeigen werden, die Funktion $F(x, y)$ in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_1, y - y_1)$ entwickelt werden, und es gilt die Ungleichung

$$\dot{\mathfrak{P}}(\delta) \leqq N[F]_R.$$

Zum Beweise betrachten wir eine Normalreihe $\sum P_\nu$ der Funktion $F(x, y)$. Wir behandeln die Reihenglieder wie folgt. Sei etwa

$$P_\nu = a\varrho^{n+2p}(R^2 - \varrho^2)^q \cos n\theta.$$

Dann ist

$$\varrho^n \cos n\theta = \frac{(x - x_0 + i(y - y_0))^n + (x - x_0 - i(y - y_0))^n}{2},$$

wo (x_0, y_0) der Mittelpunkt des Kreises R ist. Wir haben nun

$$x - x_0 \pm i(y - y_0)$$
$$= x_1 - x_0 \pm i(y_1 - y_0) + (x - x_1) \pm i(y - y_1) \prec \varrho_1 + (x - x_1) + (y - y_1),$$

wo $\varrho_1 = ((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2)^{\frac{1}{2}}$. Daraus folgt in leicht verständlicher Bezeichnung

$$\varrho^n \cos n\theta \prec (\varrho_1 + (x - x_1) + (y - y_1))^n.$$

Weiter ist

$$\varrho^2 = (x - x_0 + i(y - y_0))(x - x_0 - i(y - y_0)),$$

also

$$\varrho^2 \prec (\varrho_1 + (x - x_1) + (y - y_1))^2,$$
$$\varrho^{2p} \prec (\varrho_1 + (x - x_1) + (y - y_1))^{2p}.$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} R^2 - \varrho^2 &= R^2 - \varrho_1^2 - 2(x_1 - x_0)(x - x_1) - 2(y_1 - y_0)(y - y_1) \\ &\quad - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 \\ &\prec R^2 - \varrho_1^2 + 2\varrho_1(x - x_1) + 2\varrho_1(y - y_1) + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2. \end{aligned}$$

Wenn wir also das Polynom P_ν nach Potenzen von $x - x_1$ und $y - y_1$ ordnen, so erhalten wir eine endliche Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(x - x_1, y - y_1)$, und nach den gemachten Bemerkungen gilt die Beziehung:

$$\mathfrak{P}_\nu \prec |a|(\varrho_1 + (x - x_1) + (y - y_1))^{n+2p} \times$$
$$\times (R^2 - \varrho_1^2 + 2\varrho_1(x - x_1) + 2\varrho_1(y - y_1) + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^q,$$

also

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{P}}_\nu(\delta) &\leqq |a|(\varrho_1 + 2\delta)^{n+2p}(R^2 - \varrho_1^2 + 4\varrho_1\delta + 2\delta^2)^q \\ &= |a|(\varrho_1 + 2\delta)^{n+2p}(R^2 - (\varrho_1 + 2\delta)^2)^q \left(\frac{R^2 - \varrho_1^2 + 4\varrho_1\delta + 2\delta^2}{R^2 - (\varrho_1 + 2\delta)^2}\right)^q. \end{aligned}$$

und nach (22), (23):

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{P}}_\nu(\delta) &\leqq \sigma^q |a\ (\varrho_1 + 2\delta)^{n+2p}(R^2 - (\varrho_1 + 2\delta)^2)^q \\ &\leqq \sigma^q |a| \max_{0 \leqq \varrho \leqq R} \varrho^{n+2p}(R^2 - \varrho^2)^q = \mathfrak{N}[P_\nu]_R. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\sum_\nu \dot{\mathfrak{P}}_\nu(\delta) \leqq \sum_\nu \mathfrak{N}[P_\nu]_R,$$

wobei die rechtsstehende Reihe nach Voraussetzung konvergiert. Nach einer oben gemachten Bemerkung kann also die Funktion

$$F = \sum P_\nu = \sum \mathfrak{P}_\nu$$

in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_1, y - y_1)$ entwickelt werden, und es gilt

$$\dot{\mathfrak{P}}(\delta) \leqq \sum \dot{\mathfrak{P}}_\nu(\delta) \leqq \sum \mathfrak{N}[P_\nu]_R.$$

Da aber $\sum P_\nu$ irgendwelche Normalreihe der Funktion $F(x, y)$ war, so folgt hieraus

$$\dot{\mathfrak{P}}(\delta) \leqq N[F]_R.$$

Ad E_4. Seien $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ im Kreise R normal; wir betrachten das Produkt $F_1 F_2$. Es genügt zu zeigen: Sind

$$\sum P_\nu^{(1)},\ \sum P_\nu^{(2)}$$

beliebige Normalreihen für F_1 bzw. F_2, so kann man aus denselben eine Normalreihe ΣP_ν für das Produkt $F_1 F_2$ herleiten, so daß die Ungleichung

$$\Sigma \mathfrak{N}[P_\nu]_R \leqq (\Sigma \mathfrak{N}[P_\nu^{(1)}]_R)(\Sigma \mathfrak{N}[P_\nu^{(2)}]_R)$$

besteht. Nun darf man die absolut konvergenten Reihen $\Sigma P_\nu^{(1)}$ und $\Sigma P_\nu^{(2)}$ gliedweise multiplizieren, und man erhält

$$F_1 F_2 = (\Sigma P_\nu^{(1)})(\Sigma P_\nu^{(2)}) = \sum_\nu \sum_\mu P_\nu^{(1)} P_\mu^{(2)}.$$

Sei etwa

$$P_\nu^{(1)} = a' \varrho^{n'+2p'} (R^2 - \varrho^2)^{q'} \cos n'\theta,$$

$$P_\mu^{(2)} = a'' \varrho^{n''+2p''} (R^2 - \varrho^2)^{q''} \cos n''\theta,$$

und $n' \geqq n''$. Auf Grund der Formel

$$\cos n'\theta \cos n''\theta = \frac{1}{2}\cos(n'+n'')\theta + \frac{1}{2}\cos(n'-n'')\theta$$

kann man schreiben

$$P_\nu^{(1)} P_\mu^{(2)} = \frac{1}{2} a' a'' \varrho^{n'+n''+2(p'+p'')} (R^2 - \varrho^2)^{q'+q''} \cos(n'+n'')\theta$$

$$+ \frac{1}{2} a' a'' \varrho^{n'-n''+2(n''+p'+p'')} (R^2 - \varrho^2)^{q'+q''} \cos(n'-n'')\theta.$$

Damit ist $P_\nu^{(1)} P_\mu^{(2)}$ als Summe zweier Normalausdrücke dargestellt. Da das Maximum eines Produktes das Produkt der Maxima der Faktoren nicht übertrifft, so folgt, daß die Summe der Frakturnormen dieser beiden Ausdrücke nicht größer als

$$\frac{1}{2}\mathfrak{N}[P_\nu^{(1)}]_R \mathfrak{N}[P_\mu^{(2)}]_R + \frac{1}{2}\mathfrak{N}[P_\nu^{(1)}]_R \mathfrak{N}[P_\mu^{(2)}]_R = \mathfrak{N}[P_\nu^{(1)}]_R \mathfrak{N}[P_\mu^{(2)}]_R$$

ist. Jedes Glied der Produktreihe kann auf diese Weise als Summe von zwei Normalausdrücken dargestellt werden, und man erhält für $F_1 F_2$ eine Reihe, deren Glieder Normalausdrücke sind, und für welche die Summe der Frakturnormen nicht größer als

$$\sum_\nu \sum_\mu \mathfrak{N}[P_\nu^{(1)}]_R \mathfrak{N}[P_\mu^{(2)}]_R = (\Sigma \mathfrak{N}[P_\nu^{(1)}]_R)(\Sigma \mathfrak{N}[P_\nu^{(2)}]_R)$$

ist; damit ist E_4 für das Produkt $F_1 F_2$ erwiesen, für die Summe $F_1 + F_2$ hat man analog zu verfahren.

Ad E_5. Mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ bezeichnen wir positive Konstanten, so daß die Reihe $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ konvergiert; die Summe sei ε. Dann können wir, nach der Definition der Norm, die Funktion $F_k(x, y)$ durch eine Normalreihe $\sum_\nu P_\nu^{(k)}$ darstellen, so daß

$$\sum_\nu \mathfrak{N}[P_\nu^{(k)}]_R < N[F_k]_R + \varepsilon_k.$$

Die Glieder der Doppelreihe $\sum_{\nu}\sum_{k} P_{\nu}^{(k)}$ sind dann Normalausdrücke, und die Summe der Frakturnormen ist nicht größer als

$$\varepsilon + \sum_{k} N[F_k]_R.$$

Die Summe

$$F = \sum_{k} F_k = \sum_{\nu}\sum_{k} P_{\nu}^{(k)}$$

ist also normal und man hat

$$N[F]_R \leqq \varepsilon + \sum_{k} N[F_k]_R.$$

Da hier ε willkürlich ist, so folgt daraus

$$N[F]_R \leqq \sum_{k} N[F_k]_R.$$

§ 4.

Zum Postulate E_6. Reduktion.

1. Wir gehen nun an die Verifikation des Postulates E_6. Um Wendungen wie Normalausdruck für den Kreis R abkürzen zu können, wollen wir verabreden, daß sich die folgenden Betrachtungen auf einen festen Kreis R beziehen, die Gültigkeit der Resultate für jeden Wert von R wird daraus hervorgehen, daß wir die Konstante λ a priori fixieren können; wir werden zeigen, daß etwa $\lambda = 5 \cdot 3^{10}$ ein brauchbarer Wert ist.

Zunächst wollen wir uns überzeugen, daß es genügt, die folgende Tatsache zu erweisen.

Hilfssatz 1. Sei $F(x, y)$ insbesondere ein Normalausdruck (darin ist speziell enthalten, daß $F(x, y)$ ein Polynom ist). Dann existiert die am Rande des Kreises R verschwindende Lösung der Poissonschen Gleichung $\Delta f = F$; sowohl diese Lösung wie auch ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung können als Summen von endlich vielen Normalausdrücken dargestellt werden, und zwar so, daß dabei die Summe der Frakturnormen für f kleiner als $\lambda R^2 \mathfrak{N}[F]_R$, für $D_1 f$ kleiner als $\lambda R \mathfrak{N}[F]_R$ und für $D_2 f$ kleiner als $\lambda \mathfrak{N}[F]_R$ ist. Hier bedeutet λ eine absolute Konstante, für welche etwa $5 \cdot 3^{10}$ eingesetzt werden kann.

Wir bemerken gleich, daß nach der Definition der Normen die hier behaupteten Ungleichungen besagen, daß

$$N[f]_R \leqq \lambda R^2 \mathfrak{N}[F]_R,$$
$$N[D_1 f]_R \leqq \lambda R \mathfrak{N}[F]_R,$$
$$N[D_2 f]_R \leqq \lambda \mathfrak{N}[F]_R.$$

Wir dürfen aber die Frakturnormen rechts nicht ohne weiteres durch Normen ersetzen, da ja

$$\mathfrak{N}[F]_R \geqq N[F]_R.$$

Ein genaueres Eingehen auf diese Frage ist indessen für das Folgende belanglos.

Nehmen wir Hilfssatz 1 als erwiesen an, so können wir das Erfülltsein von E_6 wie folgt einsehen. Sei $F(x, y)$ im Kreise R normal; dann können wir also $F(x, y)$ durch eine Normalreihe darstellen:

$$F = \sum P_\nu,$$

wobei

$$\sum \mathfrak{N}[P_\nu]_R < \varepsilon + N[F]_R,$$

wo ε eine beliebig kleine positive Konstante bedeutet. Nach Hilfssatz 1 existiert die auf der Peripherie des Kreises R verschwindende Lösung f_ν der Gleichung

$$\Delta f_\nu = P_\nu,$$

und es gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} N[f_\nu]_R &\leqq \lambda R^2 \mathfrak{N}[P_\nu]_R, \\ N[D_1 f_\nu]_R &\leqq \lambda R \mathfrak{N}[P_\nu]_R, \\ N[D_2 f_\nu]_R &\leqq \lambda \mathfrak{N}[P_\nu]_R. \end{aligned}$$

Es gilt also weiter

$$\begin{aligned} \sum N[f_\nu]_R &\leqq \lambda R^2 \varepsilon + \lambda R^2 N[F]_R, \\ \sum N[D_1 f_\nu]_R &\leqq \lambda R \varepsilon + \lambda R N[F]_R, \\ \sum N[D_2 f_\nu]_R &\leqq \lambda \varepsilon + \lambda N[F]_R. \end{aligned}$$

Nach dem bereits erwiesenen Postulate E_2 konvergieren also die Reihen

$$\sum f_\nu, \quad \sum D_1 f_\nu, \quad \sum D_2 f_\nu$$

im abgeschlossenen Kreise R gleichmäßig, und nach E_5 sind ihre Summen normal. Es ist also $f = \sum f_\nu$ eine im abgeschlossenen Kreise R stetige, auf der Peripherie verschwindende normale Funktion, deren Ableitungen durch die Reihen

$$D_1 f = \sum D_1 f_\nu, \quad D_2 f = \sum D_2 f_\nu$$

gegeben sind, eben weil diese Reihen gleichmäßig konvergieren. Es folgt dann weiter

$$\Delta f = \sum \Delta f_\nu = \sum P_\nu = F,$$

womit die Existenz der Lösung erwiesen ist; nach E_5 folgt aus den angeschriebenen Ungleichungen

$$\begin{aligned} N[f]_R &\leqq \sum N[f_\nu]_R \leqq \lambda R^2 \varepsilon + \lambda R^2 N[F]_R, \\ N[D_1 f]_R &\leqq \sum N[D_1 f_\nu]_R \leqq \lambda R \varepsilon + \lambda R N[F]_R, \\ N[D_2 f]_R &\leqq \sum N[D_2 f_\nu]_R \leqq \lambda \varepsilon + \lambda N[F]_R. \end{aligned}$$

Da hier ε beliebig klein ist, so sind damit die Ungleichungen in E_6 begründet.

2. Was nun Hilfssatz 1 anbelangt, so ist die daselbst behauptete Existenz der Lösung evident, da jetzt $F(x, y)$ ein Normalausdruck, also ein Polynom ist; man kann sogar ganz elementar zeigen, daß die Lösung wieder ein Polynom ist. Da die Existenz der Lösung feststeht, so können wir die in § 1 angegebenen expliziten Formeln anwenden. Wenn wir diese Formeln durchgehen, so erkennen wir, daß zum Beweise des Hilfssatzes 1 eine Reihe von Tatsachen zu erweisen sind, welche Eigenschaften der Ausdrücke

$$a \varrho^{n+2p} (R^2 - \varrho^2)^q$$

betreffen. Wir werden diese Tatsachen zunächst aufzählen, dann werden wir angeben, wie aus ihnen Hilfssatz 1 folgt, und schließlich werden wir dieselben einzeln beweisen; diese Beweise bilden den Abschluß des Existenzbeweises für die in § 2 erklärte Funktionaloperation.

3. Es wird sich von hier ab nur um die Ausdrücke

$$a \varrho^{n+2p} (R^2 - \varrho^2)^q$$

handeln, und wir wollen einen solchen Ausdruck als einen *Normalkoeffizienten der Höhe n* bezeichnen. Durch Angabe des Normalkoeffizienten ist die Höhe nicht eindeutig bestimmt; so ist z. B.

$$\varrho^7 (R^2 - \varrho^2)^3$$

von der Höhe 1, 3, 5 oder 7, nicht aber von der Höhe 2, da der Exponent 7 nicht in die Form $7 = 2 + 2p$ mit ganzzahligem nicht-negativen p gesetzt werden kann. Wird ein Normalkoeffizient der Höhe n mit $\cos n\theta$ oder $\sin n\theta$ multipliziert, so ergibt sich ein Normalausdruck; wird aber etwa $\varrho^7 (R^2 - \varrho^2)^3$ mit $\cos 2\theta$ oder $\sin 9\theta$ multipliziert, so ist das Produkt kein Normalausdruck im Sinne unserer Erklärung, ist nicht einmal ein Polynom in x und y, und hat eine Singularität für den Mittelpunkt des Kreises R. Dieser Umstand würde zwar nicht verhindern, auch Ausdrücke wie

$$\varrho^7 (R^2 - \varrho^2)^3 \cos 2\theta,$$

die also keine Normalausdrücke sind, in Betracht zu ziehen; man könnte ja diesem Ausdrucke ohne weiteres die Frakturnorm

$$\sigma^3 \max_{0 \leqq \varrho \leqq R} \varrho^7 (R^2 - \varrho^2)^3$$

zuschreiben. Dieses Vorgehen wäre aber aus dem Grunde sehr bedenklich, weil wir die Klasse der normalen Funktionen nicht durch funktionale Eigenschaften, sondern durch die Darstellbarkeit durch gewisse Reihen erklärt haben, wobei diese Reihen nach Form und Konvergenzcharakter genau umschrieben wurden. Würden wir nun unterwegs neue Reihenformen einführen, so würde dies auf eine Änderung der ursprünglichen Definitionen hinauslaufen, was natürlich unstatthaft ist.

Wir erklären auch für die Normalkoeffizienten Frakturnormen, und zwar wieder durch

$$\mathfrak{N}[a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q]_R = \sigma^q |a| \max_{0\leqq\varrho\leqq R} \varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q,$$

wo $\sigma = 3$ die Grundzahl der Normbildung ist. Nach dieser Definition ist

$$\mathfrak{N}\left[a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\theta\right]_R = \mathfrak{N}[a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q]_R.$$

Wir behaupten nun, daß die Richtigkeit von Hilfssatz 1 aus den jetzt aufzuzählenden Tatsachen über Normalkoeffizienten unmittelbar folgt. Es werde gleich bemerkt, daß die meisten dieser Tatsachen evident sind, wir führen sie nur deswegen alle an, damit wir mit Hilfe derselben Hilfssatz 1 ohne Unterbrechung verifizieren können.

Es sei in der Folge immer $A_n(\varrho) = a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q$. Dann gelten folgende Sätze.

(1*). Der Ausdruck

$$\int_\varrho^R \frac{dh}{h} \int_0^h A_0(\tau)\tau\, d\tau$$

ist darstellbar als eine endliche Summe von Normalkoeffizienten der Höhe 0, wobei die Summe der Frakturnormen $\leqq 3^{10}R^2\mathfrak{N}[A_0]_R$ ist.

(2*). Für $n = 1, 2, \ldots$ ist der Ausdruck

$$\frac{\varrho^n}{nR^{2n}} \int_0^R A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\, d\varrho$$

ein Normalkoeffizient der Höhe n, dessen Frakturnorm $\leqq R^2\mathfrak{N}[A_n]_R$ ist.

(3*). Für $n = 1, 2, \ldots$ ist der Ausdruck

$$\frac{\varrho^{n-1}}{R^{2n}} \int_0^R A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\, d\varrho$$

ein Normalkoeffizient der Höhe $n-1$, dessen Frakturnorm $\leqq R\mathfrak{N}[A_n]_R$ ist.

(4*). Für $n = 2, 3, \ldots$ ist der Ausdruck

$$\frac{(n-1)\varrho^{n-2}}{R^{2n}} \int_0^R A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\,d\varrho$$

ein Normalkoeffizient der Höhe $n-2$, dessen Frakturnorm $\leqq \mathfrak{N}[A_n]_R$ ist.

(5*). Für $n = 1, 2, \ldots$ ist der Ausdruck

$$\frac{1}{n\varrho^n} \int_0^\varrho A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\,d\varrho$$

darstellbar als eine endliche Summe von Normalkoeffizienten der Höhe n, wobei die Summe der Frakturnormen $\leqq R^2\,\mathfrak{N}[A_n]_R$ ist.

(6*). Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_0^\varrho A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\,d\varrho$$

darstellbar als eine endliche Summe von Normalkoeffizienten der Höhe $n+1$, wobei die Summe der Frakturnormen $\leqq R\,\mathfrak{N}[A_n]_R$ ist.

(7*). Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist der Ausdruck

$$A_n(\varrho) - \frac{2(n+1)}{\varrho^{n+2}} \int_0^\varrho A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\,d\varrho$$

darstellbar als eine endliche Summe von Normalkoeffizienten der Höhe $n+2$, wobei die Summe der Frakturnormen $\leqq 2\,\mathfrak{N}[A_n]_R$ ist.

(8*). Für $n = 1, 2, \ldots$ ist der Ausdruck

$$\frac{\varrho^n}{n} \int_\varrho^R \frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}}$$

darstellbar als eine endliche Summe von Normalkoeffizienten der Höhe n, wobei die Summe der Frakturnormen $\leqq 3^{10} R^2\,\mathfrak{N}[A_n]_R$ ist.

(9*). Für $n = 1, 2, \ldots$ ist der Ausdruck

$$\varrho^{n-1} \int_\varrho^R \frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}}$$

darstellbar als eine endliche Summe von Normalkoeffizienten der Höhe $n-1$, wobei die Summe der Frakturnormen $\leqq 3^{10} R\,\mathfrak{N}[A_n]_R$ ist.

(10*). Für $n = 2, 3, \ldots$ ist der Ausdruck

$$(n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}}$$

darstellbar als eine endliche Summe von Normalkoeffizienten der Höhe $n-2$, wobei die Summe der Frakturnormen $\leqq 3^{10}\,\mathfrak{N}[A_n]_R$ ist.

4. Im Besitze dieser Sätze (1*) bis (10*) können wir, unter Beachtung der Formeln (17) und (18) in § 1, den Hilfssatz 1 fast mechanisch verifizieren. Sei etwa

$$F = a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q\cos n\theta = A_n(\varrho)\cos n\theta;$$

im Falle $n = 0$ sind dann die Formeln (17), im Falle $n \geqq 1$ die Formeln (18) heranzuziehen.

Sei zunächst $n \geqq 1$. Die Ableitung $D_2 f$ ist jetzt dem Ausdrucke (18_2) genau gleich, da im vorliegenden Falle die Fourierreihe von $F(x, y)$ eben nur aus dem einzigen Gliede $A_n(\varrho)\cos n\theta$ besteht. Das erste Glied der genannten Formel (18_2) lautet:

$$*\left((n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}}\right)\cos(n-2)\theta.$$

Für $n = 1$ verschwindet dies; für $n > 1$ ist der Faktor von $\cos(n-2)\theta$ nach (10*) durch eine endliche Summe von Normalkoeffizienten der Höhe $n-2$ darstellbar, und jeder dieser Normalkoeffizienten, mit $\cos(n-2)\theta$ multipliziert, ergibt einen Normalausdruck, eben deswegen, weil alle diese Normalkoeffizienten die Höhe $n-2$ haben. Ebenso behandeln wir das zweite Glied in Formel (18_2) mit Hilfe von Satz (4*), das fünfte Glied mit Hilfe von Satz (7*). Das vierte Glied ist bereits selbst ein Normalausdruck, ebenso das dritte

$$A_n(\varrho)\cos(n-2)\theta = a\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q\cos(n-2)\theta,$$

denn für $n = 1$ ist es gleich

$$a\varrho^{1+2p}(R^2-\varrho^2)^q\cos\theta,$$

und für $n > 1$ gleich

$$a\varrho^{n-2+2(p+1)}(R^2-\varrho^2)^q\cos(n-2)\theta.$$

Damit ist also erkannt, daß $D_2 f$ als eine endliche Summe von Normalausdrücken dargestellt werden kann. Über die Summe der Frakturnormen geben die herangezogenen Sätze (10*), (7*), (4*) ebenfalls Aufschluß, wobei man nur zu beachten hat, daß nach Definition die Frakturnorm eines Normalausdruckes gleich der Frakturnorm des in demselben auftretenden Normalkoeffizienten ist; das dritte Glied in Formel (18_2) hat

die Frakturnorm $\mathfrak{N}[A_n]_R$, ebenso das vierte, und wir erhalten so, daß die Summe der Frakturnormen nicht größer als

$$(3^{10}+1+1+1+2)\,\mathfrak{N}[A_n]_R,$$

also kleiner als $5\cdot 3^{10}\,\mathfrak{N}[A_n]_R$ ist, wie behauptet wurde. Genau so hat man $D_1 f$ und f zu behandeln; für $D_1 f$ wird man die Formel (18_1) und die Sätze (9^*), (3^*), (6^*), für f die Formel (18_0) und die Sätze (8^*), (5^*), (2^*) heranziehen.

Im Falle $n=0$ verwendet man für $D_2 f$ die Formel (17_2) und den Satz (7^*), für $D_1 f$ die Formel (17_1) und den Satz (6^*), für f die Formel (17_0) und den Satz (1^*). Auf diese Weise erkennt man, daß die Sätze (1^*) bis (10^*) einerseits hinreichen, um die Richtigkeit von Hilfssatz 1 darzutun, andererseits aber gerade für die angegebenen Werte von n tatsächlich herangezogen werden müssen.

Zur Entschuldigung der umständlichen Formulierung der Sätze (1^*) bis (10^*) wollen wir noch über das in Formel (18_2) vorkommende Glied

$$\Big(A_n(\varrho)-\frac{2(n+1)}{\varrho^{n+2}}\int_0^{\varrho}A_n(\varrho)\,\varrho^{n+1}\,d\varrho\Big)\cos(n+2)\theta$$

eine Bemerkung machen, daß es nämlich durchaus ungenügend wäre, dasselbe in

$$A_n(\varrho)\cos(n+2)\theta$$

und

$$\Big(\frac{2(n+1)}{\varrho^{n+2}}\int_0^{\varrho}A_n(\varrho)\,\varrho^{n+1}\,d\varrho\Big)\cos(n+2)\theta$$

zu zerlegen, und dann diese Ausdrücke einzeln abzuschätzen. Es ist nämlich

$$A_n(\varrho)\cos(n+2)\theta = a\,\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q\cos(n+2)\theta$$

nur dann ein Normalausdruck, wenn $p>0$, für $p=0$ hingegen nicht. Wenn also $p=0$, so könnten wir auf diese Weise zwar eine Abschätzung erhalten; diese Abschätzung würde sich aber nicht auf die ursprünglich eingeführten Normalausdrücke beziehen und es wäre auch nicht erwiesen, daß die Ableitung $D_2 f$ durch Normalausdrücke dargestellt werden kann. Für den Beweis des Postulates E_6 würde dies zur Folge haben, daß der normale Charakter der zweiten Ableitungen nicht erwiesen wäre. Man sieht auch, wenn wir in Formel (18_2) das letzte Glied um eine Kleinigkeit ungenauer kennen würden, etwa nur so viel wüßten, daß es die Form

$$*\,A_n(\varrho)\cos(n+2)\theta + *\Big(\frac{2(n+1)}{\varrho^{n+2}}\int_0^{\varrho}A_n(\varrho)\,\varrho^{n+1}\,d\varrho\Big)\cos(n+2)\theta$$

hat, so könnten wir über die zweiten Ableitungen keine zwingenden Schlüsse ziehen.

§ 5.

Zum Postulate E_6.

Verifikation der Sätze (1*) bis (9*) in § 4.

Wir wollen zunächst zeigen, daß nur eine geringe Anzahl der Sätze (1*) bis (10*) in § 4 einen tatsächlichen Beweis erfordert, indem die meisten auf die übrigen zurückgeführt werden können, und einige fast selbstverständlich sind. Wir können dabei annehmen, daß

$$A_n(\varrho) = \varrho^{n+2p}(R^2 - \varrho^2)^q$$

ist; einen numerischen Faktor a vorzusetzen erübrigt sich deswegen, weil alle die Identitäten und Ungleichungen, welche in den fraglichen Sätzen behauptet werden, offenbar richtig bleiben, wenn man auf beiden Seiten mit demselben numerischen Faktor multipliziert.

Ad (1*). Für den Integranden schließen wir aus (6*):

$$\frac{1}{\varrho}\int_0^{\varrho} A_0(\varrho)\,\varrho\,d\varrho = B_1(\varrho) + \ldots + C_1(\varrho),$$

wobei $B_1(\varrho), \ldots, C_1(\varrho)$ Normalkoeffizienten der Höhe 1 bedeuten, für welche

$$\mathfrak{N}[B_1]_R + \ldots + \mathfrak{N}[C_1]_R \leqq R\,\mathfrak{N}[A_0]_R$$

gilt. Wir haben weiter zu bilden:

$$\int_{\varrho}^{R} B_1(\varrho)\,d\varrho + \ldots + \int_{\varrho}^{R} C_1(\varrho)\,d\varrho.$$

Nun ist nach (9*):

$$\int_{\varrho}^{R} B_1(\varrho)\,d\varrho = H_0(\varrho) + \ldots + K_0(\varrho),$$

wo $H_0(\varrho), \ldots, K_0(\varrho)$ Normalkoeffizienten der Höhe 0 sind, für welche

$$\mathfrak{N}[H_0]_R + \ldots + \mathfrak{N}[K_0]_R \leqq 3^{10} R\,\mathfrak{N}[B_1]_R$$

ist. Auf diese Weise wird der Ausdruck in (1*) als eine endliche Summe von Normalkoeffizienten der Höhe 0 dargestellt, wobei die Summe der Frakturnormen

$$\leqq 3^{10} R(\mathfrak{N}[B_1]_R + \ldots + \mathfrak{N}[C_1]_R),$$

also

$$\leqq 3^{10} R^2\,\mathfrak{N}[A_0]_R$$

ist. Es folgt hiernach (1*) aus (6*) und (9*).

Ad (2*). Der zu untersuchende Ausdruck ist ein Normalkoeffizient der Höhe n, da er die Form hat

$$a\varrho^n,$$

wo a eine Konstante ist, nämlich

$$a = \frac{1}{n R^{2n}} \int_0^R A_n(\varrho)\, \varrho^{n+1}\, d\varrho .$$

Es ist nun $\mathfrak{N}[a\varrho^n]_R = |a| R^n$. Wegen $|A_n(\varrho)| \leqq \mathfrak{N}[A_n]_R$ folgt:

$$|a| \leqq \frac{\mathfrak{N}[A_n]_R}{n R^{2n}} \int_0^R \varrho^{n+1}\, d\varrho = \frac{1}{n(n+2)} \frac{1}{R^{n-2}} \mathfrak{N}[A_n]_R ,$$

und schließlich

$$\mathfrak{N}[a\varrho^n]_R \leqq \frac{1}{n(n+2)} R^3 \mathfrak{N}[A_n]_R \leqq R^2 \mathfrak{N}[A_n]_R ,$$

da $n \geqq 1$ vorausgesetzt wurde.

Die Sätze (3*) und (4*) werden genau so eingesehen.

Ad (5*). Der fragliche Ausdruck kann nach (6*) wie folgt entwickelt werden:

$$\frac{\varrho}{n} \frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_0^\varrho A_n(\varrho)\, \varrho^{n+1}\, d\varrho = \frac{\varrho}{n} (B_{n+1}(\varrho) + \ldots + C_{n+1}(\varrho)),$$

wobei $B_{n+1}(\varrho), \ldots, C_{n+1}(\varrho)$ Normalkoeffizienten der Höhe $n+1$ sind, für welche

$$\mathfrak{N}[B_{n+1}]_R + \ldots + \mathfrak{N}[C_{n+1}]_R \leqq R\, \mathfrak{N}[A_n]_R$$

gilt. Folglich sind

$$\frac{\varrho}{n} B_{n+1}(\varrho), \ldots, \frac{\varrho}{n} C_{n+1}(\varrho)$$

Normalkoeffizienten der Höhe $n+2$, also auch der Höhe n; es gilt ferner offenbar

$$\mathfrak{N}\left[\frac{\varrho}{n} B_{n+1}(\varrho)\right]_R \leqq \mathfrak{N}\left[\frac{\varrho}{n}\right]_R \mathfrak{N}[B_{n+1}]_R = \frac{R}{n} \mathfrak{N}[B_{n+1}]_R$$

usw., also

$$\mathfrak{N}\left[\frac{\varrho}{n} B_{n+1}(\varrho)\right]_R + \ldots + \mathfrak{N}\left[\frac{\varrho}{n} C_{n+1}(\varrho)\right]_R$$

$$\leqq \frac{R}{n} (\mathfrak{N}[B_{n+1}]_R + \ldots + \mathfrak{N}[C_{n+1}]_R) \leqq \frac{1}{n} R^2 \mathfrak{N}[A_n]_R \leqq R^2 \mathfrak{N}[A_n]_R ,$$

da $n \geqq 1$ ist.

Ad (8*). Der fragliche Ausdruck ist nach (9*) gleich

$$= \frac{\varrho}{n} \varrho^{n-1} \int_\varrho^R \frac{A_n(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^{n-1}} = \frac{\varrho}{n} B_{n-1}(\varrho) + \ldots + \frac{\varrho}{n} C_{n-1}(\varrho),$$

und damit ist derselbe durch Normalkoeffizienten der Höhe n dargestellt. Für die Summe der Frakturnormen erhalten wir nach (9^*):

$$\leqq \frac{R}{n} 3^{10} R \mathfrak{N}[A_n]_R \leqq 3^{10} R^2 \mathfrak{N}[A_n]_R,$$

da $n \geqq 1$ ist.

Genau so folgt (9^*) aus (10^*), nur muß man beachten, daß (10^*) nur für $n = 2, 3, \ldots$ herangezogen werden darf, während (9^*) auch für $n = 1$ behauptet wird. Wir können also zusammenfassend sagen, daß nunmehr nur noch (6^*), (7^*), (9^*) für $n = 1$ und (10^*) bewiesen werden müssen.

Zum Beweise von (6^*) und (7^*) benötigen wir eine Formel, die wir zunächst angeben wollen. Unter k und q nicht-negative ganze Zahlen verstanden, setzen wir

$$J_{k,q} = \int_0^\varrho \varrho^{2k+1} (R^2 - \varrho^2)^q d\varrho.$$

Durch partielle Integration erhalten wir die Rekursionsformel

$$J_{k,q} = \frac{1}{2(k+1)} \varrho^{2(k+1)} (R^2 - \varrho^2)^q + \frac{q}{k+1} J_{k+1, q-1},$$

aus welcher man leicht die Formel ableitet:

$$(24) \qquad J_{k,q} = \frac{1}{2(k+1)} \varrho^{2(k+1)} (R^2 - \varrho^2)^q + \alpha \varrho^{2(k+2)} (R^2 - \varrho^2)^{q-1} + \ldots$$
$$+ \beta \varrho^{2(k+q)} (R^2 - \varrho^2) + \frac{1}{2} \frac{k!\, q!}{(k+q+1)!} \varrho^{2(k+q+1)}.$$

Dabei bedeuten $\alpha, \ldots, \beta$ numerische Faktoren, die noch von k und q abhängen, und auf deren Bestimmung es hier nicht ankommt; sehr wesentlich ist aber der Umstand, daß $\alpha, \ldots, \beta$ positiv sind. Man bestätigt unmittelbar, daß Formel (24) auch für $q = 0$ richtig bleibt.

Ad (6^*). Es ist

$$\frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_0^\varrho A_n(\varrho) \varrho^{n+1} d\varrho = \frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_0^\varrho \varrho^{2(n+p)+1} (R^2 - \varrho^2)^q d\varrho,$$

also nach Formel (24):

$$= \varepsilon' \varrho^{n+1+2p} (R^2 - \varrho^2)^q + \alpha' \varrho^{n+1+2(p+1)} (R^2 - \varrho^2)^{q-1} + \ldots$$
$$+ \beta' \varrho^{n+1+2(p+q-1)} (R^2 - \varrho^2) + \gamma' \varrho^{n+1+2(p+q)},$$

wobei $\varepsilon', \alpha', \ldots, \beta', \gamma'$ positive Konstanten bedeuten; damit ist zunächst eine Darstellung der gewünschten Form gewonnen. Wir betrachten nun

die Glieder an der rechten Seite einzeln. Das allgemeine Glied hat die Form:

$$\eta\,\varrho^{n+1+2(p+h)}(R^2-\varrho^2)^{q-h},$$

und da auf der rechten Seite für $0<\varrho<R$ alles positiv ist, so ist für $0<\varrho<R$ jedes Glied rechts $\leqq$ als die linke Seite. Wir haben also für $0<\varrho<R$

$$\eta\,\varrho^{n+1+2(p+h)}(R^2-\varrho^2)^{q-h}\leqq\frac{1}{\varrho^{n+1}}\int_0^{\varrho}A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\,d\varrho$$

$$\leqq\left(\frac{1}{\varrho^{n+1}}\int_0^{\varrho}\varrho^{n+1}\,d\varrho\right)\max_{0\leqq\varrho\leqq R}A_n(\varrho)=\frac{\varrho}{n+2}\max_{0\leqq\varrho\leqq R}A_n(\varrho)\leqq\frac{R}{n+2}\max_{0\leqq\varrho\leqq R}A_n(\varrho)$$

$$=\frac{1}{n+2}\frac{1}{\sigma^q}R\,\mathfrak{N}[A_n]_R.$$

Daraus folgt weiter

$$\mathfrak{N}[\eta\,\varrho^{n+1+2(p+h)}(R^2-\varrho^2)^{q-h}]_R=\sigma^{q-h}\max_{0\leqq\varrho\leqq R}\eta\,\varrho^{n+1+2(p+h)}(R^2-\varrho^2)^{q-h}$$

$$\leqq\frac{R}{n+2}\frac{1}{\sigma^h}\mathfrak{N}[A_n]_R.$$

Man hat nun diese Ungleichungen für $h=0,1,2,\ldots,q$ zu bilden und zu addieren. Für die rechte Seite der resultierenden Ungleichung ergibt sich

$$\frac{R}{n+2}\mathfrak{N}[A_n]_R\left(1+\frac{1}{\sigma}+\ldots+\frac{1}{\sigma^q}\right),$$

also wegen $\sigma=3$:

$$\leqq\frac{3}{2}\frac{R}{n+2}\mathfrak{N}[A_n]_R\leqq R\,\mathfrak{N}[A_n]_R.$$

Damit ist auch (6*) erwiesen.

Ad (7*). Unter Beachtung der Formel (24) erhalten wir

$$(25)\qquad\frac{2(n+1)}{\varrho^{n+2}}\int_0^{\varrho}A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\,d\varrho=\frac{n+1}{n+p+1}\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q$$

$$+\alpha\,\varrho^{n+2(p+1)}(R^2-\varrho^2)^{q-1}+\ldots+\beta\,\varrho^{n+2(p+q-1)}(R^2-\varrho^2)+\gamma\,\varrho^{n+2(p+q)},$$

wobei daran erinnert werde, daß $\alpha,\ldots,\beta,\gamma$ positive Konstanten sind. Es folgt weiter

$$(26)\qquad A_n(\varrho)-\frac{2(n+1)}{\varrho^{n+2}}\int_0^{\varrho}A_n(\varrho)\varrho^{n+1}\,d\varrho=\frac{p}{n+p+1}\varrho^{n-2p}(R^2-\varrho^2)^q$$

$$-\alpha\,\varrho^{n+2(p+1)}(R^2-\varrho^2)^{q-1}-\ldots-\beta\,\varrho^{n+2(p+q-1)}(R^2-\varrho^2)-\gamma\,\varrho^{n+2(p+q)}.$$

Für $p\geqq1$ sind alle Glieder rechts offenbar der Höhe $n+2$; für $p=0$

entfällt aber das erste Glied, und die übrigen sind noch immer von der Höhe $n+2$. Die Darstellung (26) hat hiernach die gewünschte Form.

Wir untersuchen die Frakturnormen auf der rechten Seite von (26). Zunächst ist

$$(27) \qquad \mathfrak{N}\Big[\frac{p}{n+p+1}\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q\Big]_R = \frac{p}{n+p+1}\mathfrak{N}[A_n]_R \leqq \mathfrak{N}[A_n]_R.$$

Die übrigen Glieder haben die Form

$$-\eta\varrho^{n+2(p+h)}(R^2-\varrho^2)^{q-h}.$$

Diese Glieder kommen auch, mit positivem Vorzeichen, auf der rechten Seite von (25) vor, und da dort für $0<\varrho<R$ alles positiv ist, so folgt genau wie beim Beweise von (6*), daß

$$\mathfrak{N}[\eta\varrho^{n+2(p+h)}(R^2-\varrho^2)^{q-h}]_R \leqq \frac{2(n+1)}{n+2}\frac{1}{\sigma^h}\mathfrak{N}[A_n]_R.$$

Addieren wir diese Ungleichungen für $h=1,2,\ldots,q$ und beachten wir noch (27) sowie daß $\sigma=3$ ist, so erhalten wir für die Summe der Frakturnormen auf der rechten Seite von (26) die Schranke $2\,\mathfrak{N}[A_n]_R$, womit (7*) erwiesen ist.

Ad (9*) für $n=1$. Wir schreiben

$$\int_\varrho^R A_1(\varrho)\,d\varrho = \int_\varrho^R \varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho = \int_0^R \varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho - \int_0^\varrho \varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho.$$

Das erste Integral ist eine Konstante, also ein Normalkoeffizient der Höhe 0; nach Formel (24) haben wir ferner

$$(28) \qquad \int_\varrho^R A_1(\varrho)\,d\varrho = \int_0^R A_1(\varrho)\,d\varrho - \varepsilon\varrho^{2(p+1)}(R^2-\varrho^2)^q - \ldots - \gamma\varrho^{2(p+q+1)},$$

wo wieder $\varepsilon,\ldots,\gamma$ positive Konstanten sind. Da alle die Exponenten $2(p+1),\ldots,2(p+q+1)$ gerade sind, so hat die gewonnene Entwicklung die verlangte Form. Um nun die Frakturnormen abzuschätzen, bemerken wir, daß die rechte Seite von (28) gewiß $\geqq 0$ ist für $0<\varrho<R$, da ja für $0<\varrho<R$ der Integrand auf der linken Seite positiv ist. Es gilt also für das allgemeine Glied

$$\eta\varrho^{2(p+1+h)}(R^2-\varrho^2)^{q-h} \leqq \int_0^R A_1(\varrho)\,d\varrho \leqq R\max_{0\leqq\varrho\leqq R} A_1(\varrho) = \frac{1}{\sigma^q}R\,\mathfrak{N}[A_1]_R.$$

Es folgt also

$$\mathfrak{N}[\eta\varrho^{2(p+1+h)}(R^2-\varrho^2)^{q-h}]_R \leqq \frac{1}{\sigma^h}R\,\mathfrak{N}[A_1]_R.$$

Addieren wir dies für $h = 0, 1, 2, \ldots, q$, so ergibt sich wegen $\sigma = 3$ die Schranke

$$\frac{3}{2} R \mathfrak{N}[A_1]_R.$$

Die Frakturnorm des Gliedes $\int_0^R A_1(\varrho)\, d\varrho$ in Formel (28) ist

$$\left| \int_0^R A_1(\varrho)\, d\varrho \right| \leqq R \max_{0 \leqq \varrho \leqq R} A_1(\varrho) \leqq R \mathfrak{N}[A_1]_R,$$

die Summe der Frakturnormen in Formel (28) ist also kleiner als

$$\left(1 + \frac{3}{2}\right) R \mathfrak{N}[A_1]_R < 3^{10} R \mathfrak{N}[A_1]_R.$$

Es sind nun die Sätze (1*) bis (9*) entweder direkt bewiesen oder auf (10*) zurückgeführt.

§ 6.

Zum Postulate E_6.

Beweis des Satzes (10*) in § 4 im Hauptfalle.

Es ist in Satz (10*)

$$A_n(\varrho) = \varrho^{n+2p}(R^2 - \varrho^2)^q,$$

wo nach Voraussetzung $n \geqq 2$, während nach Definition $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ ist. Beim Beweise werden wir mehrere Fälle unterscheiden müssen; in diesem Paragraphen betrachten wir den Fall

$$n \geqq 3, \quad p \geqq 1, \quad q \geqq 1, \tag{29}$$

welcher den einzigen schwierigeren Punkt darstellt; alle die übrigen Fälle verweisen wir in § 7.

1. Es ist nach Definition, wenn a, b, c nicht-negative ganze Zahlen sind,

$$\mathfrak{N}[\varrho^{a+2b}(R^2 - \varrho^2)^c]_R = \sigma^c \max_{0 \leqq \varrho \leqq R} \varrho^{a+2b}(R^2 - \varrho^2)^c, \tag{30}$$

wo $\sigma = 3$ die Grundzahl der Normbildung ist. Für das Folgende benötigen wir eine Näherungsformel der rechten Seite von (30). Um Wiederholungen zu vermeiden, setzen wir jetzt nur

$$a \geqq 1, \quad b \geqq 0, \quad c \geqq 1 \tag{31}$$

voraus. Dann ist

$$\varrho^{a+2b}(R^2 - \varrho^2)^c$$

eine für $0 < \varrho < R$ positive Funktion von ϱ, welche für $\varrho = 0$ und $\varrho = R$ verschwindet. Nach bekannten Regeln erhält man

$$\max_{0 \leqq \varrho \leqq R} \varrho^{a+2b}(R^2 - \varrho^2)^c = \frac{\left(\frac{a}{2}+b\right)^{\frac{a}{2}+b} c^c}{\left(\frac{a}{2}+b+c\right)^{\frac{a}{2}+b+c}} R^{a+2b+2c},$$

also mit Rücksicht auf (30):

$$\mathfrak{R}\left[\varrho^{a+2b}(R^2-\varrho^2)^c\right]_R = \sigma^c \frac{\left(\frac{a}{2}+b\right)^{\frac{a}{2}+b}}{\left(\frac{a}{2}+b+c\right)^{\frac{a}{2}+b+c}} R^{a+2b+2c}. \tag{32}$$

Nun gilt, wenn $x > 0$ ist, die Formel

$$x^x = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\, e^{x - \frac{\theta}{12x}} \Gamma(x), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Daraus folgt für $x \geqq \frac{1}{2}$:

$$\frac{2}{9}\sqrt{x}\, e^x \Gamma(x) < x^x < \frac{1}{2}\sqrt{x}\, e^x \Gamma(x).$$

Mit Rücksicht auf (31) dürfen wir dies auf (32) anwenden, und auf diese Weise erhalten wir nach leichter Umformung, unter Beachtung der Beziehung $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$,

$$\mathfrak{R}\left[\varrho^{a+2b}(R^2-\varrho^2)^c\right]_R$$

$$= \theta' \sigma^c R^{a+2b+2c} \sqrt{\frac{\frac{a}{2}+b+c}{\left(\frac{a}{2}+b\right)c}} \frac{c!}{\left(\frac{a}{2}+b+1\right)\ldots\left(\frac{a}{2}+b+c\right)}, \tag{33}$$

$$\left(a \geqq 1, \quad b \geqq 0, \quad c \geqq 1, \quad \frac{8}{81} < \theta' < \frac{9}{8}\right).$$

2. Es soll nun in diesem Paragraphen weiterhin

$$n \geqq 3, \qquad p \geqq 1, \qquad q \geqq 1$$

angenommen werden. Zur Untersuchung des Ausdruckes in Satz (10*) betrachten wir zunächst das Integral

$$T_{p,q}(\varrho) = \int_{\varrho}^{R} \varrho^{2p+1}(R^2 - \varrho^2)^q d\varrho. \tag{34}$$

Der Integrand ist ein Polynom, welches nur ungerade Potenzen von ϱ enthält, so daß $T_{p,q}(\varrho)$ selbst ein Polynom ist, welches nur gerade Po-

tenzen von ϱ enthält. Da offenbar $T_{p,q}(R) = 0$ ist, so ist hiernach auch $T_{p,q}(-R) = 0$. Wir bilden weiter

$$\frac{T_{p,q}(\varrho)}{(R^2-\varrho^2)^{q+1}}. \tag{35}$$

Zähler und Nenner verschwinden für $\varrho = \pm R$; nach der Hospitalschen Regel findet man aber, daß (35) für $\varrho = \pm R$ stetig bleibt. Da sonst der Nenner von Null verschieden ist, so ist demnach (35) ein Polynom von ϱ, und zwar ein solches vom Grade $2p$, wie man leicht findet. Da weiter Zähler und Nenner gerade sind, so gilt dasselbe für (35) selbst, so daß wir schreiben können:

$$T_{p,q}(\varrho) = (R^2-\varrho^2)^{q+1}(\beta_0\varrho^{2p} + \beta_1\varrho^{2(p-1)} + \ldots + \beta_p). \tag{36}$$

Wir derivieren diese Identität nach ϱ und erhalten, mit Rücksicht auf (34), nach Weglassung eines Faktors $\varrho(R^2-\varrho^2)^q$ die weitere Identität

$$\begin{aligned} -\varrho^{2p} = &-2(q+1)(\beta_0\varrho^{2p} + \ldots + \beta_p) \\ &+ (R^2-\varrho^2)(2p\beta_0\varrho^{2(p-1)} + \ldots + 2\beta_{p-1}), \end{aligned}$$

aus welcher durch Koeffizientenvergleichung

$$\beta_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{p+q+1}, \qquad \beta_h = R^2\frac{p+1-h}{p+q+1-h}\beta_{h-1}$$

folgt, also allgemein

$$\beta_h = \frac{1}{2}R^{2h}\frac{p!\,(p+q-h)!}{(p-h)!\,(p+q+1)!} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

Wir haben demnach auf Grund von (34) und (36):

$$\begin{aligned} &\int_\varrho^R \varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q d\varrho \\ &\quad = \sum_{h=0}^{p}\frac{1}{2}R^{2h}\frac{p!\,(p+q-h)!}{(p-h)!\,(p+q+1)!}\varrho^{2(p-h)}(R^2-\varrho^2)^{q+1}, \\ &\qquad (p \geqq 1,\ q \geqq 1). \end{aligned} \tag{37}$$

3. Wir haben so zunächst

$$\begin{aligned} (n-1)\varrho^{n-2}\int_\varrho^R \frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}} &= (n-1)\varrho^{n-2}\int_\varrho^R \varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q d\varrho \\ &= \sum_{h=0}^{p} R^{2h}\frac{n-1}{2}\frac{p!\,(p+q-h)!}{(p-h)!\,(p+q+1)!}\varrho^{n-2+2(p-h)}(R^2-\varrho^2)^{q+1}, \end{aligned} \tag{38}$$

womit eine Darstellung der Form erhalten ist, wie sie in Satz (10*) verlangt wurde. Die Summe der Frakturnormen in (38) schätzen wir mit

Hilfe der Formel (33) ab, die wir auf die Glieder der Summe (38) einzeln anwenden, was wegen

$$n-2+2(p-h)\geqq n-2\geqq 1$$

gestattet ist. Wir erhalten auf diese Weise die Schranke

$$(39)\quad \sigma^{q+1}\frac{9}{8}\sum_{h=0}^{p}\frac{n-1}{2}R^{n+2p+2q}\frac{p!\,(p+q-h)!}{(p-h)!\,(p+q+1)!}\times$$

$$\times\frac{(q+1)!}{\left(\frac{n}{2}+p-h\right)\dots\left(\frac{n}{2}+p+q-h\right)}\sqrt{\frac{\frac{n}{2}+p+q-h}{\left(\frac{n}{2}+p-h-1\right)(q+1)}}.$$

Nach derselben Formel (33) wird

$$(40)\quad \mathfrak{R}[A_n]_R=\mathfrak{R}[\varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q]_R$$

$$\geqq\frac{8}{81}\sigma^q R^{n+2p+2q}\frac{q!}{\left(\frac{n}{2}+p+1\right)\dots\left(\frac{n}{2}+p+q\right)}\sqrt{\frac{\frac{n}{2}+p+q}{\left(\frac{n}{2}+p\right)q}}.$$

Satz (10*) wird dann, unter Voraussetzung (29), bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß die Größe (39) nicht größer als die mit 3^{10} multiplizierte rechte Seite von (40) ist. Schreibt man diese Ungleichung auf, so kann man zunächst mit $\sigma^q R^{n+2p+2q}$ beiderseits dividieren; indem man noch $\sigma=3$ beachtet, erhält man eine Ungleichung, welche nach einfacher identischer Umformung auf die folgende Form gebracht werden kann. Man setze

$$K=\frac{n}{2}+p,\qquad Q=-\frac{n}{2},\qquad L_0=1,$$

$$(41)\quad L_h=\frac{(K+q-1)\dots(K+q-h)}{(K-1)\dots(K-h)}\frac{(K+Q)\dots(K+Q-h+1)}{(K+Q+q)\dots(K+Q+q-h+1)}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(K-1)(K+q)}{(K-h-1)(K+q-h)}}$$

$$(h=1,2,\dots,p).$$

Dann lautet die Ungleichung

$$(42_0)\quad \frac{(n-1)(q+1)}{(p+q+1)\left(\frac{n}{2}+p\right)}\left(1+\sum_{h=1}^{p}L_h\sqrt{\frac{\frac{n}{2}+p-h-1}{\frac{n}{2}+p-h}}\right)$$

$$<2\cdot 64\cdot 3^3\sqrt{\frac{q+1}{q}}\sqrt{\frac{\frac{n}{2}+p-1}{\frac{n}{2}+p}}.$$

Indem man die Voraussetzung $n \geqq 3$, $p \geqq 1$, $q \geqq 1$ beachtet, so sieht man, daß die rechte Seite

$$> 2 \cdot 64 \cdot 3^3 \sqrt{\frac{3}{5}} > 192$$

ist, und da

$$\sqrt{\frac{\frac{n}{2}+p-h-1}{\frac{n}{2}+p-h}} < 1,$$

so genügt es, die Ungleichung

$$\frac{(n-1)(q+1)}{(p+q+1)\left(\frac{n}{2}+p\right)} \sum_{h=0}^{p} L_h < 192 \tag{42}$$

zu beweisen, wobei L_h durch (41) gegeben ist, und $n \geqq 3$, $p \geqq 1$, $q \geqq 1$ vorausgesetzt wird [8]).

Wir führen noch

$$P = -Q - 1 = \frac{n}{2} - 1 \tag{41$_1$}$$

ein, und unterscheiden zwei Fälle, je nachdem die erste oder die zweite der folgenden Ungleichungen erfüllt ist:

$$K - 1 < \frac{1}{2} q \left(P - \frac{5}{6}\right), \tag{A}$$

$$K - 1 \geqq \frac{1}{2} q \left(P - \frac{5}{6}\right). \tag{B}$$

4. Wir betrachten erstens den Fall (A). Wir haben nach (41) für $h = 2, 3, \ldots, p$:

$$\frac{L_h}{L_{h-1}} = \frac{K+Q-h+1}{K+Q+q-h+1} \frac{K+q-h}{K-h} \sqrt{\frac{(K+q-h+1)(K-h)}{(K+q-h)(K-h-1)}}$$

$$= \frac{K+Q-h+1}{K+Q+q-h+1} \sqrt{\frac{(K+q-h)(K+q-h+1)}{(K-h)(K-h-1)}}$$

und dies gilt, wie man sofort sieht, auch für $h = 1$ (falls $p = 1$ ist, kommt hier überhaupt nur $h = 1$ in Betracht). Führen wir hier

$$s = K - h - 1 \qquad (h = 1, \ldots, p) \tag{43}$$

ein, so erhalten wir nach leichter Umformung

$$\frac{L_h}{L_{h-1}} = \frac{1 - \frac{P}{s+1}}{1 - \frac{P}{s+q+1}} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{s+q+1}}{1 - \frac{1}{s+1}}}. \tag{44}$$

Es ist nach (41):

$$K - 1 = \frac{n}{2} + p - 1 > 0,$$

[8]) Beim Beweise der Ungleichung (42) folgen wir einer brieflichen Mitteilung von Herrn S. Bernstein.

da $n \geqq 3$, $p \geqq 1$ ist. Folglich ist wegen (A) auch $P - \frac{5}{6} > 0$, und da $P = \frac{n}{2} - 1$, so muß $n \geqq 4$ sein, also wegen (41_1)

$$P \geqq 1. \tag{45}$$

Nach (43) folgt weiter:

$$s + 1 = K - h \geqq K - p = \frac{n}{2} = P + 1, \tag{46}$$

$$s + 1 = K - h \leqq K - 1 < \frac{1}{2} q \left(P - \frac{5}{6}\right), \tag{47}$$

infolge der Voraussetzung (A); aus (45), (46), (47) ersehen wir, daß in (44) alle die Zähler und Nenner positiv sind, und daß

$$2 \leqq P + 1 \leqq s + 1 < \frac{1}{2} q \left(P - \frac{5}{6}\right), \tag{48}$$

wenn in (43) die Zahl h von 1 bis p läuft. Nun verifiziert man leicht, daß die Ungleichungen gelten

$$\sqrt{1+x} \leqq \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leqq 1 + \frac{5}{6} x \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}. \tag{49}$$

Die erstere erhält man, indem man etwa zum Quadrate erhebt, und dann die rechte Seite nach Potenzen von x entwickelt. Die zweite führt man durch Quadrieren auf

$$x \left(\frac{2}{3} - \frac{35}{36} x - \frac{25}{36} x^2\right) \geqq 0$$

zurück. Nach Voraussetzung ist der erste Faktor nicht negativ; der zweite Faktor ist, da der Koeffizient von x^2 negativ ist, in jedem Intervalle positiv, an dessen Endpunkten er > 0 ist. Für $x = 0$ nimmt dieser zweite Faktor den Wert $\frac{12}{3}$, für $x = \frac{1}{2}$ den Wert $\frac{1}{144}$, also positive Werte an, mithin ist für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ der zweite Faktor positiv.

Wegen (48) ist $s + 1 \geqq 2$, also auch $s + q + 1 \geqq 2$, da q nach Voraussetzung positiv ist. Wir dürfen also die Ungleichungen (49) auf (44) anwenden; wir erhalten:

$$\frac{L_h}{L_{h-1}} \leqq \frac{\left(1 - \frac{P}{s+1}\right)\left(1 + \frac{5}{6}\frac{1}{s+1}\right)}{\left(1 - \frac{P}{s+q+1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s+q+1}\right)} \tag{50}$$

$$= \frac{1 - \frac{P - \frac{5}{6}}{s+1} - \frac{5}{6}\frac{P}{(s+1)^2}}{1 - \frac{P + \frac{1}{2}}{s+q+1} + \frac{1}{2}\frac{P}{(s+q+1)^2}} < \frac{1 - \frac{P - \frac{5}{6}}{s+1}}{1 - \frac{P + \frac{1}{2}}{s+q+1}}.$$

Wir behaupten nun, daß die rechte Seite von (50) noch vergrößert wird, wenn wir $s+1$ durch $K-1$ ersetzen. Da nach (46) und (47)

$$P+1 \leqq s+1 \leqq K-1 < \tfrac{1}{2} q\left(P-\tfrac{5}{6}\right)$$

ist, so folgt dies daraus, daß die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1-\dfrac{P-\frac{5}{6}}{x}}{1-\dfrac{P+\frac{1}{2}}{x+q}}$$

für $P+1 \leqq x \leqq \frac{1}{2} q(P-\frac{5}{6})$ monoton wächst, was man etwa wie folgt erkennt. Man findet durch Ausrechnen, daß $\varphi'(x)$ dasselbe Vorzeichen wie

$$(51) \qquad f(x) = -\tfrac{4}{3}x^2 + 2q\left(P-\tfrac{5}{6}\right)x + q\left(P-\tfrac{5}{6}\right)\left(q-P-\tfrac{1}{2}\right)$$

hat. Da hier der Koeffizient von x^2 negativ ist, so haben wir nur zu zeigen, daß $f(x)$ für $x = P+1$ und für $x = \frac{1}{2} q(P-\frac{5}{6})$ positiv ist. Man hat

$$f(P+1) = -\tfrac{4}{3}(P+1)^2 + q\left(P-\tfrac{5}{6}\right)\left(P+q+\tfrac{3}{2}\right),$$

und da nach (48)

$$q\left(P-\tfrac{5}{6}\right) > 2(P+1)$$

ist, so folgt

$$f(P+1) > 2(P+1)\left(\tfrac{1}{3}P+q+\tfrac{5}{6}\right) > 0.$$

Weiter hat man

$$f\left(\tfrac{1}{2}q\left(P-\tfrac{5}{6}\right)\right) = \tfrac{1}{2}q\left(P-\tfrac{5}{6}\right)\left[\tfrac{8}{3}q\left(P-\tfrac{5}{6}\right)+2\left(q-P-\tfrac{1}{2}\right)\right].$$

Der erste Faktor ist nach (48) positiv, und ebenfalls nach (48) ist der zweite Faktor größer als

$$\tfrac{16}{3}(P+1)+2\left(q-P-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{10}{3}P+\tfrac{13}{3}+2q > 0.$$

Indem wir auf Grund dieser Bemerkungen in (50) für $s+1$ den Wert $K-1$ einsetzen, erhalten wir

$$(52) \qquad \frac{L_k}{L_{k-1}} < \frac{1-\dfrac{P-\frac{5}{6}}{K-1}}{1-\dfrac{P+\frac{1}{2}}{K+q-1}} = \tau.$$

Mit Hilfe der Ungleichungen (A), (46), (47) stellt man sofort fest, daß $0 < \tau < 1$ ist, so daß aus (52) wegen $L_0 = 1$ geschlossen werden kann:

$$L_h \leqq \tau^h \qquad (h = 0, 1, \ldots, p),$$

$$\sum_{h=0}^{p} L_h \leqq 1 + \tau + \ldots + \tau^p < \frac{1}{1-\tau} = \frac{(K-1)\left(K+q-P-\frac{3}{2}\right)}{q\left(P-\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{3}(K-1)},$$

und mit Rücksicht auf die Voraussetzung (A) ist dies weiter

$$< 3\frac{(K-1)\left(K+q-P-\frac{3}{2}\right)}{q\left(P-\frac{5}{6}\right)}.$$

Indem wir $P = \frac{n}{2} - 1$, $K = \frac{n}{2} + p$ beachten, erhalten wir für die linke Seite der zu beweisenden Ungleichung (42) die Schranke

$$3\frac{(n-1)(q+1)}{(p+q+1)\left(\frac{n}{2}+p\right)} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}+p-1\right)\left(p+q-\frac{1}{2}\right)}{q\left(\frac{n}{2}-\frac{11}{6}\right)}$$

$$= 18\frac{n-1}{3n-11}\frac{q+1}{q}\frac{\frac{n}{2}+p-1}{\frac{n}{2}+p}\frac{p+q-\frac{1}{2}}{p+q+1},$$

und da $p \geqq 1$, $q \geqq 1$, und nach (41_1), (45) $n = 2(P+1) \geqq 2 \cdot 2 = 4$ ist, so ist dies $< 18 \cdot 3 \cdot 2 < 192$, womit unter der Voraussetzung (A) die Ungleichung (42) bewiesen ist.

5. Wir setzen nun zweitens voraus, daß

(B) $$K - 1 \geqq \frac{1}{2}q\left(P - \frac{5}{6}\right).$$

Wir schreiben

(53) $$L_h = W_h \sqrt{\frac{(K+q)(K-1)}{(K+q-h)(K-q-1)}}.$$

Nach leichter Umformung erhalten wir mit Rücksicht auf (41):

(54) $$W_h = \prod_{\nu=K-1}^{\nu=K-h} \frac{1-\frac{P}{\nu}}{1-\frac{P}{\nu+q}}.$$

Wegen

$$\nu \geqq K - h \geqq K - p = \frac{n}{2} = P + 1, \quad q > 0, \quad P = \frac{n}{2} - 1 \geqq \frac{3}{2} - 1 > 0$$

haben wir

$$\frac{P}{\nu} < 1, \quad \frac{P}{\nu+q} < 1,$$

so daß wir schließen dürfen:

$$\log\frac{1-\frac{P}{\nu}}{1-\frac{P}{\nu+q}} = P\left(\frac{1}{\nu+q}-\frac{1}{\nu}\right)+\frac{P^2}{2}\left(\frac{1}{(\nu+q)^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)+\ldots < P\left(\frac{1}{\nu+q}-\frac{1}{\nu}\right),$$

da alle die fortgelassenen Glieder negativ sind. Nach (54) folgt weiter:

$$\log W_h < -P\sum_{\nu=K-1}^{K-h}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+q}\right). \tag{55}$$

Nun ist die Funktion

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+q}$$

für $x>0$ positiv und monoton abnehmend. Daraus folgt

$$\sum_{\nu=K-1}^{K-h}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+q}\right)=\varphi(K-h)+\ldots+\varphi(K-1)>\int_{K-h}^{K}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+q}\right)dx$$
$$=\log\frac{K(K+q-h)}{(K+q)(K-h)},$$

also nach (55), da $P>0$ ist,

$$\log W_h < \log\left(\frac{(K+q)(K-h)}{K(K+q-h)}\right)^P.$$

Wir schließen daraus mit Rücksicht auf (53)

$$L_h < \left(\frac{(K+q)(K-h)}{K(K+q-h)}\right)^P\sqrt{\frac{(K+q)(K-1)}{(K+q-h)(K-h-1)}} \tag{56}$$
$$=\left(1+\frac{q}{K}\right)^P\frac{(K-h)^{P-\frac{1}{2}}}{(K+q-h)^{P+\frac{1}{2}}}\left(\frac{K-h}{K-h-1}\right)^{\frac{1}{2}}(K+q)\sqrt{\frac{K-1}{K+q}}.$$

Wir zeigen zunächst, daß

$$\frac{(K-h)^{P-\frac{1}{2}}}{(K-h+q)^{P+\frac{1}{2}}}\leqq\frac{1}{q\left(P+\frac{1}{2}\right)}. \tag{57}$$

Es ist $K-h\geqq K-p=\frac{n}{2}>0$, so daß nur zu zeigen ist, daß

$$\psi(x)=\frac{x^{P-\frac{1}{2}}}{(x+q)^{P+\frac{1}{2}}}\leqq\frac{1}{q\left(P+\frac{1}{2}\right)},\quad\text{für } x>0. \tag{57_1}$$

Wir haben

$$P=\frac{n}{2}-1\geqq\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

Ist $P=\frac{1}{2}$, so ist (57_1) evident. Sonst, d. h. für $P>\frac{1}{2}$, gilt $\psi(x)\to 0$ wenn $x\to 0$ oder $x\to+\infty$; für $0<x<+\infty$ ist außerdem $\psi(x)>0$.

Nach den Regeln der Differentialrechnung ergibt sich dann, daß $\psi(x)$ in diesem Intervalle nur für $x = q(P-\frac{1}{2})$ Extremum wird; es ist also

$$\max_{0<x<+\infty} \psi(x) = \psi\left(q\left(P-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{q\left(P+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{P-\frac{1}{2}}{P+\frac{1}{2}}\right)^{P-\frac{1}{2}} < \frac{1}{q\left(P+\frac{1}{2}\right)},$$

womit (57_1), also auch (57) erwiesen ist. Wegen

$$K-h \geqq K-p = \frac{n}{2} \geqq \frac{3}{2}$$

folgt weiter

$$\left(\frac{K-h}{K-h-1}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq 3^{\frac{1}{2}} < 2,$$

so daß mit Rücksicht auf (56), (57):

$$L_h < 2\frac{K+q}{q\left(P+\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{q}{K}\right)^P \sqrt{\frac{K-1}{K+q}}. \tag{58}$$

Wir zeigen noch, daß

$$\left(1+\frac{q}{K}\right)^P \sqrt{\frac{K-1}{K+q}} < 23. \tag{59}$$

Es ist $P = \frac{n}{2} - 1$, also wegen $n \geqq 3$ entweder $P = \frac{1}{2}$, oder $P \geqq 1$. Ist zunächst $P = \frac{1}{2}$, so haben wir

$$\left(1+\frac{q}{K}\right)^P \sqrt{\frac{K-1}{K+q}} = \sqrt{\frac{K-1}{K}} < 1.$$

Ist aber $P \geqq 1$, so ist

$$P - \frac{5}{6} \geqq \frac{1}{6}, \tag{60}$$

und aus der vorausgesetzten Ungleichung (B) dürfen wir folgern

$$K > \frac{1}{2}q\left(P-\frac{5}{6}\right), \quad \frac{q}{K} < \frac{2}{P-\frac{5}{6}},$$

$$\left(1+\frac{q}{K}\right)^P \sqrt{\frac{K-1}{K+q}} = \left(\frac{K-1}{K}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{q}{K}\right)^{P-\frac{1}{2}} < \left(1+\frac{q}{K}\right)^{P-\frac{1}{2}} < \left(1+\frac{2}{P-\frac{5}{6}}\right)^{P-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{2}{P-\frac{5}{6}}\right)^{P-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}},$$

und mit Rücksicht auf (60) ist (59) erwiesen, wenn wir zeigen, daß

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+\frac{1}{3}} < 23, \text{ für } x \geqq \frac{1}{6}.$$

Dies folgt etwa so:

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+\frac{1}{3}} = \left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} < e^2(1+12)^{\frac{1}{3}} < 9\cdot\frac{5}{2} < 23.$$

Nach (58), (59) ist also

$$L_k < 46\,\frac{K+q}{q\left(P+\frac{1}{2}\right)} = 46\,\frac{\frac{n}{2}+p+q}{q\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)},$$

und für die linke Seite der zu erweisenden Ungleichung (42) erhalten wir die Schranke

$$\frac{(n-1)(q+1)}{(p+q+1)\left(\frac{n}{2}+p\right)}\left(1+p\cdot 46\cdot\frac{\frac{n}{2}+p+q}{q\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$= 2\,\frac{n-1}{n+2p}\,\frac{q+1}{p+q+1} + 92\,\frac{p\left(\frac{n}{2}+p+q\right)}{(p+q+1)\left(\frac{n}{2}+p\right)}\,\frac{q+1}{q}.$$

Da

$$\frac{p\left(\frac{n}{2}+p+q\right)}{(p+q+1)\left(\frac{n}{2}+p\right)} = \frac{p\left(\frac{n}{2}+p+q\right)}{p\left(\frac{n}{2}+p+q\right)+p+q\,\frac{n}{2}+\frac{n}{2}} < 1,$$

und wegen $q \geqq 1$ noch $\frac{q+1}{q} \leqq 2$ ist, so ist diese Schranke $< 2+2\cdot 92 < 192$, womit die Ungleichung (42) auch unter der Voraussetzung (B) erwiesen ist. Damit ist der Satz (10*) in § 4 unter der Annahme $n \geqq 3$, $p \geqq 1$, $q \geqq 1$ vollständig bewiesen.

§ 7.

Zuendeführung des Beweises von Satz (10*) in § 4.

Bei Satz (10*) war $A_n(\varrho) = \varrho^{n+2p}(R^2-\varrho^2)^q$. Hier ist $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ nach der Erklärung der Normalkoeffizienten, und $n \geqq 2$ nach dem Wortlaute des Satzes (10*). Es ist also $n \geqq 2$, $p \geqq 0$, $q \geqq 0$. In § 6 haben wir den Fall erledigt, wo überall das Zeichen $>$ gilt; die übrigen Fälle gruppieren wir, nach der Anzahl der Gleichheitszeichen, in der folgenden Tabelle:

I_1. $p=0$, $q>0$, $n>2$.
I_2. $p>0$, $q=0$, $n>2$.
I_3. $p>0$, $q>0$, $n=2$.
II_1. $p=0$, $q=0$, $n>2$.
II_2. $p>0$, $q=0$, $n=2$.
II_3. $p=0$, $q>0$, $n=2$.
III. $p=0$, $q=0$, $n=2$.

Die Erledigung dieser Fälle bietet nicht die geringste Schwierigkeit; wir müssen uns aber doch überzeugen, daß auch in diesen Fällen Satz (10*)

richtig ist. In der Tat, es war gerade ein derartiger einfacher Fall, in welchem die ursprüngliche Normdefinition des Herrn S. Bernstein[9] gescheitert hatte; das Theorem l. c.[9]) S. 44, welches dem gegenwärtigen Satz (10*) entspricht, versagt nämlich für den besonderen Fall, welcher mit den dort gebrauchten Bezeichnungen durch $p = 0, q = -1$ (wo also p, q eine andere Bedeutung wie in dieser Arbeit haben) charakterisiert wird. Dies hat dann weiter zur Folge, daß es nicht mehr möglich ist, mit diesen ursprünglichen Normen die zweiten Ableitungen bei der Gleichung $\Delta f = F$ abzuschätzen, daß also unser Postulat E_4 gerade in seinem wesentlichsten Teile nicht erfüllt ist. Dieser Umstand hat auch Herrn S. Bernstein veranlaßt, bereits in seiner leider schwer zugänglichen russischen Abhandlung eine neue Definition der Normbildung zugrunde zu legen, welcher wir uns in der vorliegenden Arbeit im wesentlichen angeschlossen haben (vgl. § 2, Nr. 5).

Die aufgezählten Unterfälle I—III können nicht ganz einheitlich behandelt werden, und deswegen wollen wir sie einzeln durchgehen.

Ad I_1. Es ist

$$(n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}} = (n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\varrho\,(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho$$

$$= \frac{n-1}{2(q+1)}\varrho^{n-2}(R^2-\varrho^2)^{q+1},$$

da $-\frac{(R^2-\varrho^2)^{q+1}}{2(q+1)}$ eine primitive Funktion des Integranden ist. Der gewonnene Ausdruck ist ein Normalkoeffizient der Höhe $n-2$; seine Frakturnorm ist nach (32):

$$\sigma^{q+1}\frac{n-1}{2(q+1)}\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)^{\frac{n}{2}-1}(q+1)^{q+1}}{\left(\frac{n}{2}+q\right)^{\frac{n}{2}+q}}R^{n+2q},$$

und wir haben zu zeigen, daß dies kleiner als die mit 3^{10} multiplizierte Frakturnorm von $A_n(\varrho)$ ist. Diese letztere ist nach (32):

$$\sigma^q\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}q^q}{\left(\frac{n}{2}+q\right)^{\frac{n}{2}+q}}R^{n+2q},$$

[9]) Sur la nature analytique etc., Math. Annalen 59 (1904), S. 20—76.

und indem man $\sigma = 3$ beachtet, führt man die zu beweisende Ungleichung auf die folgende zurück

$$\frac{n-1}{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\left(+\frac{1}{q}\right)^{q} < 2\cdot 3^{9}.$$

Wegen $n \geqq 3$, $q \geqq 1$ ist die linke Seite $< 4\cdot 1\cdot e < 12$, womit Fall I_1 erledigt ist.

Ad I_2. Es ist jetzt

$$(n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}} = (n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\varrho^{2p+1}\,d\varrho = (n-1)\varrho^{n-2}\frac{R^{2p+2}-\varrho^{2p+2}}{2(p+1)}$$

(61)
$$= \sum_{h=0}^{p}\frac{n-1}{2(p+1)}R^{2(p-h)}\varrho^{n-2+2h}(R^2-\varrho^2),$$

womit eine Darstellung der verlangten Form gewonnen ist. Für die Frakturnorm des allgemeinen Gliedes der Summe (61) erhalten wir nach (32), unter Beachtung von $\sigma = 3$:

$$3\frac{n-1}{2(p+1)}R^{2(p-h)}\frac{\left(\frac{n}{2}-1+h\right)^{\frac{n}{2}-1+h}}{\left(\frac{n}{2}+h\right)^{\frac{n}{2}+h}}R^{n+2h}$$

$$= \frac{3}{2(p+1)}\frac{n-1}{\frac{n}{2}-1+h}\left(\frac{\frac{n}{2}-1+h}{\frac{n}{2}+h}\right)^{\frac{n}{2}+h}R^{n+2p},$$

was wegen $n \geqq 3$ kleiner ist als

$$\frac{3}{2(p+1)}\cdot 4\cdot 1\cdot R^{n+2p} = \frac{1}{p+1}6R^{n+2p}.$$

Da die Summe (61) eben $p+1$ Glieder enthält, so ist hiernach die Summe der Frakturnormen

$$< 6R^{n+2p} = 6\mathfrak{N}[A_n]_R < 3^{10}\mathfrak{N}[A_n]_R,$$

da jetzt

$$A_n(\varrho) = \varrho^{n+2p}, \qquad \mathfrak{N}[A_n]_R = R^{n+2p}$$

ist.

Ad I_3. In diesem Falle ist

$$(62)\qquad (n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}}=\int_{\varrho}^{R}\varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho$$

$$=\int_0^R\varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho-\int_0^{\varrho}\varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho$$

$$=\frac{1}{2}\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}R^{2(p+q+1)}-\varepsilon\varrho^{2(p+1)}(R^2-\varrho^2)^q-\alpha\varrho^{2(p+2)}(R^2-\varrho^2)^{q-1}$$

$$-\ldots-\gamma\varrho^{2(p+q+1)},$$

wobei die Formel (24) herangezogen wurde; es sind also $\varepsilon, \alpha, \ldots, \gamma$ positiv. Die Glieder der Entwickelung (62) sind Normalkoeffizienten der Höhe Null, diese Entwickelung hat also die verlangte Form. Da

$$\varepsilon\varrho^{2(p+1)}(R^2-\varrho^2)^q+\ldots+\gamma\varrho^{2(p+q+1)}=\int_0^{\varrho}\varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho$$

ist, und $\varepsilon, \alpha, \ldots, \gamma$ positiv sind, so ergibt sich für das allgemeine Glied für $0<\varrho<R$:

$$\eta\varrho^{2(p+h+1)}(R^2-\varrho^2)^{q-h}\leqq\int_0^{\varrho}\varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho<\int_0^R\varrho^{2p+1}(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho$$

$$=\frac{1}{2}\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}R^{2(p+q+1)}.$$

Es folgt:

$$\mathfrak{R}[\eta\varrho^{2(p+h+1)}(R^2-\varrho^2)^{q-h}]_R=\sigma^{q-h}\max_{0\leqq\varrho\leqq R}\eta\varrho^{2(p+h+1)}(R^2-\varrho^2)^{q-h}$$

$$\leqq\sigma^{q-h}\frac{1}{2}\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}R^{2(p+q+1)}.$$

Die Summe der Frakturnormen in (62) ist also

$$\leqq\frac{1}{2}\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}R^{2(p+q+1)}(1+1+\sigma+\ldots+\sigma^q),$$

also wegen $\sigma=3$:

$$(63)\qquad <\sigma^q\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}R^{2(p+q+1)}=H,$$

und wir haben zu zeigen, daß $H<3^{10}\,\mathfrak{R}[A_n]_R$ ist. Nun ist jetzt

$$A_n(\varrho)=\varrho^{2+2p}(R^2-\varrho^2)^q,$$

so daß nach (33):

$$\mathfrak{R}[A_n]_R>\frac{8}{81}\sigma^qR^{2+2p+2q}\frac{q!}{(p+2)\ldots(p+q+1)}\sqrt{\frac{1+p+q}{(1+p)\,q}}$$

$$=\frac{8}{81}\sqrt{\frac{(1+p+q)(1+p)}{p}}\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}\sigma^qR^{2+2p+2q}>\frac{8}{81}H,$$

also

$$H < \frac{81}{8}\,\mathfrak{N}[A_n]_R < 3^{10}\,\mathfrak{N}[A_n]_R.$$

Die weiteren Fälle können in einigen Worten erledigt werden.

Ad II_1. Es ist

$$(n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}} = (n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\varrho\,d\varrho = \frac{n-1}{2}\varrho^{n-2}(R^2-\varrho^2),$$

und dies ist ein Normalkoeffizient der Höhe $n-2$. Seine Frakturnorm ist nach (32), wenn $\sigma = 3$ beachtet wird,

$$\frac{3(n-1)}{2}R^n\,\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{3}{2}\,\frac{n-1}{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}R^n,$$

also wegen $n \geqq 3$:

$$< 6R^n = 6\,\mathfrak{N}[A_n]_R,$$

da jetzt

$$A_n(\varrho) = \varrho^n, \quad \mathfrak{N}[A_n]_R = R^n.$$

Ad II_2. Es ist

$$(64)\quad (n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}} = \int_{\varrho}^{R}\varrho^{2p+1}\,d\varrho = \frac{1}{2(p+1)}(R^{2p+2}-\varrho^{2p+2})$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{p}\frac{1}{2(p+1)}R^{2(p-\lambda)}\varrho^{2\lambda}(R^2-\varrho^2),$$

womit eine Darstellung durch Normalkoeffizienten der Höhe Null erhalten ist. Aus (64) folgern wir für $0 < \varrho < R$:

$$\frac{1}{2(p+1)}R^{2(p-\lambda)}\varrho^{2\lambda}(R^2-\varrho^2) < \int_{\varrho}^{R}\varrho^{2p+1}\,d\varrho < \frac{R^{2p+2}}{2(p+1)},$$

folglich:

$$\mathfrak{N}\left[\frac{1}{2(p+1)}R^{2(p-\lambda)}\varrho^{2\lambda}(R^2-\varrho^2)\right]_R$$

$$= \sigma \max_{0\leqq\varrho\leqq R}\frac{1}{2(p+1)}R^{2(p-\lambda)}\varrho^{2\lambda}(R^2-\varrho^2) \leqq \frac{3}{2(p+1)}R^{2p+2}.$$

Da die Summe (64) gerade $p+1$ Glieder enthält, so ist hiernach die Summe der Frakturnormen

$$\leqq \frac{3}{2}R^{2p+2} = \frac{3}{2}\,\mathfrak{N}[A_n]_R,$$

da jetzt

$$A_n(\varrho) = \varrho^{2+2p}, \quad \mathfrak{N}[A_n]_R = R^{2+2p}.$$

Ad II_3. Es ist

$$(n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}}=\int_{\varrho}^{R}\varrho\,(R^2-\varrho^2)^q\,d\varrho=\frac{1}{2(q+1)}(R^2-\varrho^2)^{q+1},$$

und dies ist ein Normalkoeffizient der Höhe Null. Seine Frakturnorm ist

$$\sigma^{q+1}\frac{1}{2(q+1)}R^{2(q+1)}=\frac{3}{2(q+1)}\sigma^q R^{2(q+1)}. \tag{65}$$

Andererseits ist jetzt

$$A_n(\varrho)=\varrho^2(R^2-\varrho^2)^q,$$

also nach (32):

$$\mathfrak{N}[A_n]_R=\sigma^q\frac{q^q}{(q+1)^{q+1}}R^{2(q+1)},$$

und wir haben zu zeigen, daß dies nach Multiplikation mit 3^{10} größer ist als (65). Die fragliche Ungleichung reduziert sich auf

$$\frac{3}{2}<3^{10}\left(\frac{q}{q+1}\right)^q,\qquad \left(1+\frac{1}{q}\right)^q<2\cdot 3^9,$$

die offenbar richtig ist, da die linke Seite wegen $q>0$ kleiner als $e<3$ ist.

Ad III. Es ist jetzt

$$(n-1)\varrho^{n-2}\int_{\varrho}^{R}\frac{A_n(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^{n-1}}=\int_{\varrho}^{R}\varrho\,d\varrho=\frac{1}{2}(R^2-\varrho^2),$$

und dies ist ein Normalkoeffizient der Höhe Null. Seine Frakturnorm ist

$$\frac{\sigma}{2}R^2=\frac{3}{2}R^2=\frac{3}{2}\mathfrak{N}[A_n]_R<3^{10}\mathfrak{N}[A_n]_R,$$

da jetzt

$$A_n(\varrho)=\varrho^2,\qquad \mathfrak{N}[A_n]_R=R^2.$$

Damit ist Satz (10*) in allen Fällen verifiziert, und damit ist der Beweis geliefert, daß die in § 2 explizite erklärte Funktionaloperation der Normbildung allen den Postulaten E_1 bis E_6 genügt.

Teil II. Beweis des Hilbertschen Theorems.

§ 1.

Ein Unitätssatz.

1. Indem wir nun zur Durchführung des Gedankenganges schreiten, der in Nr. 4 der Einleitung geschildert wurde, begründen wir einen dabei zu verwendenden Unitätssatz. Wir erhalten denselben, in Verfolgung einer brieflichen Bemerkung von Herrn S. Bernstein, durch sehr einfache, von

Paraf herrührende, Überlegungen unmittelbar in der folgenden allgemeinen Fassung.

Unitätssatz. Sei $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t)$ in der Umgebung einer gewissen Stelle $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ eine einmal stetig derivierbare Funktion ihrer acht Argumente. Es mögen ferner die Ungleichungen

$$(\Phi_r)_0 > 0, \quad (\Phi_t)_0 > 0, \quad 4(\Phi_r)_0(\Phi_t)_0 - (\Phi_s)_0^2 > 0$$

gelten. Dann kann man eine, nur von Φ abhängige, positive Konstante ε_0 angeben, die folgendes leistet. Sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte (x_0, y_0) und dem Halbmesser $R < \varepsilon_0$ vorgelegt; es seien ferner $\zeta_1(x, y)$, $\zeta_2(x, y)$ zwei Lösungen der Gleichung $\Phi = 0$, wobei ζ_1 und ζ_2 in und auf diesem Kreise stetig, im Innern zweimal stetig derivierbar sind, im Innern den Ungleichungen

$$|\zeta_1 - z_0|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - p_0\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y^2} - t_0\right| < \varepsilon_0,$$

$$|\zeta_2 - z_0|, \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - p_0\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial y^2} - t_0\right| < \varepsilon_0$$

genügen, und schließlich auf der Peripherie des Kreises dieselben Randwerte annehmen. Dann ist auch im Innern des Kreises $\zeta_1 \equiv \zeta_2$.

Wir wollen angeben, wie für ε_0 ein brauchbarer Wert erhalten werden kann. Aus der vorausgesetzten Stetigkeit der ersten Ableitungen von Φ folgt zunächst die Möglichkeit, eine positive Konstante ε' so zu bestimmen, daß in der ε'-Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$[10]) folgendes gilt. Erstens bleibt dort Φ_r oberhalb einer gewissen positiven Schranke:

$$\Phi_r > \alpha_1;$$

es bleiben dort $|\Phi_z|, |\Phi_p|, \ldots, |\Phi_t|$ unterhalb einer Schranke:

$$|\Phi_z|, |\Phi_p|, \ldots, |\Phi_t| < \alpha_2,$$

und schließlich ist dort

$$4\Phi_r\Phi_t - \Phi_s^2 > 0.$$

Es werde nun ε_0 so gewählt, daß

$$\varepsilon_0 < \varepsilon', \qquad \varepsilon_0 < \frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2}.$$

Dann behaupten wir, daß ε_0 der Forderung des Unitätssatzes genügt.

Um dies einzusehen, schicken wir die folgende Bemerkung voraus. Es seien $(x, y, z'', \ldots, t'')$, $(x, y, z', \ldots, t')$ irgend zwei Stellen der ε_0-Umgebung von $(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$. Wird für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Hilfsfunktion

$$\psi(\tau) = \Phi(x, y, \tau z'' + (1-\tau)z', \ldots, \tau t'' + (1-\tau)t')$$

[10]) Die ε'-Umgebung besteht aus denjenigen Stellen $(x, y, \ldots, t)$, für welche

$$|x - x_0|, |y - y_0|, \ldots, |t - t_0| < \varepsilon'$$

gilt.

eingeführt, so hat man

$$\Phi(x, y, z'', \ldots, t'') - \Phi(x, y, z', \ldots, t') = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(\tau^*),$$

mit $0 < \tau^* < 1$. Da

$$(x, y, z^*, \ldots, t^*) = (x, y, \tau^* z'' + (1 - \tau^*) z', \ldots, \tau^* t'' + (1 - \tau^*) t')$$

wiederum eine Stelle der ε_0-Umgebung ist, so ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z'', \ldots, t'') - \Phi(x, y, z', \ldots, t') \\ = (r'' - r') A + (s'' - s') 2B + (t'' - t') C + (p'' - p') D \\ + (q'' - q') E + (z'' - z') F,\end{aligned}$$

wo $A, 2B, C, D, E, F$ die Werte von $\Phi_r, \Phi_s, \Phi_t, \Phi_p, \Phi_q, \Phi_z$ für die Stelle $(x, y, z^*, \ldots, t^*)$ bedeuten; es gelten also die Ungleichungen

$$AC - B^2 > 0, \quad A > \alpha_1, \quad |D|, |F| < \alpha_2.$$

Setzen wir nun

$$z'' = \zeta_2, \quad \ldots, \quad t'' = \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial y^2}, \qquad z' = \zeta_1, \quad \ldots, \quad t' = \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y^2},$$

so wird $\Phi(x, y, z'', \ldots, t'') - \Phi(x, y, z', \ldots, t') = 0$. Die Funktion $w(x, y) = \zeta_2(x, y) - \zeta_1(x, y)$, deren identisches Verschwinden zu erweisen ist, genügt also einer Gleichung der Form

$$A w_{xx} + 2B w_{xy} + C w_{yy} + D w_x + E w_y + F w = 0.$$

Dabei hängen $A, B, C, \ldots, F$ irgendwie von x und y ab; eine genauere Kenntnis dieser Abhängigkeit kommt gar nicht in Betracht, wir werden nur von den Ungleichungen Gebrauch machen, welche für die Koeffizienten gelten, und von dem Umstande, daß der Kreisradius der Ungleichung genügt:

$$R < \varepsilon_0 < \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2}.$$

2. Wir haben also den folgenden Satz zu beweisen:

Sei $w(x, y)$ eine Funktion, welche innerhalb eines Kreises zweimal stetig derivierbar ist, auf der Peripherie verschwindet und im Innern des Kreises einer Gleichung

$$A w_{xx} + 2B w_{xy} + C w_{yy} + D w_x + E w_y + F w = 0$$

genügt. Die Koeffizienten sind dabei irgendwelche Funktionen von x und y, welche den Ungleichungen

$$\begin{aligned}&A > 0, \quad C > 0, \quad AC - B^2 > 0, \\ &A > \alpha_1, \quad |D|, |F| < \alpha_2\end{aligned}$$

genügen, wo α_1, α_2 gewisse positive Konstanten sind. Falls dann für den Halbmesser R des Kreises die Ungleichung

$$R < \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2}$$

erfüllt ist, so verschwindet $w(x, y)$ im Innern des Kreises identisch.

Dieser Satz bringt in allgemeiner Fassung die Tatsache zum Ausdruck, daß eine auf der Peripherie des Kreises verschwindende Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus auch im Innern identisch verschwindet, falls der Radius des Kreises hinreichend klein ist. Ein besonderer Vorteil des Satzes, im Vergleich mit den üblichen Darstellungen, liegt in dem Umstande, daß in der Schranke für R die Ableitungen der Koeffizienten nicht eingehen.

Beim Beweise verfahren wir mit Paraf[11]) wie folgt. Sei $g(x, y)$ eine Hilfsfunktion, die im Innern des Kreises zweimal stetig derivierbar ist und auf dem Kreise noch stetig bleibt, und außerdem im abgeschlossenen Kreise *positiv* ist. Durch die Gleichung

$$w(x, y) = g(x, y)\, v(x, y)$$

führen wir eine weitere Hilfsfunktion $v(x, y)$ ein; diese ist, wie man sogleich erkennt, im Innern wieder zweimal stetig derivierbar, bleibt auf der Peripherie stetig, und hat im Kreise genau dieselben Nullstellen wie $w(x, y)$. Es genügt also zu zeigen, daß $v(x, y)$ identisch verschwindet. Nun verschwindet $v(x, y)$ auf der Peripherie, und aus den Formeln

$$w_x = g_x v + g v_x$$

usw. leitet man für $v(x, y)$ die Gleichung her

$$A^* v_{xx} + 2B^* v_{xy} + C^* v_{yy} + D^* v_x + E^* v_y + F^* v = 0,$$

wobei die Koeffizienten die folgenden Ausdrücke haben:

$$A^* = gA, \quad B^* = gB, \quad C^* = gC,$$
$$D^* = 2Ag_x + 2Bg_y + Dg,$$
$$E^* = 2Bg_x + 2Cg_y + Eg,$$
$$F^* = Ag_{xx} + 2Bg_{xy} + Cg_{yy} + Dg_x + Eg_y + Fg.$$

Wegen $g > 0$ gelten also die Ungleichungen

$$A^* > 0, \quad C^* > 0, \quad A^* C^* - B^{*2} > 0.$$

---

[11]) Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 6 (1892) S. 1—75, vgl. insbesondere S. 50—52.

Wir wollen nun zeigen, daß $g(x, y)$ so gewählt werden kann, daß im Kreise überall $F^* < 0$ wird. Wir setzen zur Abkürzung

$$m = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1},$$

und setzen

$$g(x, y) = \sin m\left(x - x_0 + \frac{5}{4m}\right),$$

wo x_0 die Abszisse des Kreismittelpunktes ist. Zunächst ist dann in und auf dem Kreise

$$-R \leqq x - x_0 \leqq R,$$

also wegen $R < \frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2} = \frac{1}{4m}$:

$$\frac{\pi}{4} < 1 < m\left(x - x_0 + \frac{5}{4m}\right) < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Folglich gilt

$$g(x, y) = \sin m\left(x - x_0 + \frac{5}{4m}\right) > 0,$$

es ist also tatsächlich $g(x, y)$ im abgeschlossenen Kreise positiv. Man berechnet ferner

$$\begin{aligned} F^* &= (F - m^2 A)\sin m\left(x - x_0 + \frac{5}{4m}\right) + mD\cos m\left(x - x_0 + \frac{5}{4m}\right) \\ &= g(x, y)\left(F - m^2 A + mD\operatorname{cotg} m\left(x - x_0 + \frac{5}{4m}\right)\right). \end{aligned}$$

Da $g(x, y)$ positiv ist, so haben wir nur zu zeigen, daß der Klammerausdruck negativ ist. Nun ist, wie oben festgestellt wurde, im ganzen Kreise

$$\frac{\pi}{4} < m\left(x - x_0 + \frac{5}{4m}\right) < \frac{\pi}{2},$$

also

$$0 < \operatorname{cotg} m\left(x - x_0 + \frac{5}{4m}\right) < 1,$$

ferner gilt nach Voraussetzung $A > \alpha_1 > 0$, $|D| < \alpha_2$, $F < \alpha_2$, so daß der Klammerausdruck kleiner ist als

$$\alpha_2 - m^2\alpha_1 + m\alpha_2,$$

also wegen $m = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1} > 1$ kleiner als

$$2m\alpha_2 - m^2\alpha_1 = -(\alpha_1 + 2\alpha_2) < 0.$$

3. Über die Hilfsfunktion $v(x, y) = \frac{w(x, y)}{g(x, y)}$, deren identisches Verschwinden zu beweisen ist, wissen wir nun folgendes. Sie ist in und auf dem Kreise stetig, im Innern ist sie zweimal stetig derivierbar, und sie verschwindet auf der Peripherie. Ferner genügt sie einer Gleichung

$$A^* v_{xx} + 2B^* v_{xy} + C^* v_{yy} + D^* v_x + E^* v_y + F^* v = 0.$$

Die Koeffizienten sind dabei irgendwelche Funktionen von x und y, für welche im Innern des Kreises die Ungleichungen gelten:

$$A^* > 0, \quad C^* > 0, \quad A^* C^* - B^{*2} > 0, \quad F^* < 0.$$

Die Tatsache, daß aus diesem Sachverhalte das identische Verschwinden von $v(x, y)$ folgt, wird in der Literatur als Parafscher Satz bezeichnet; wir beweisen denselben wie folgt[12]). Würde $v(x, y)$ im Innern des Kreises nicht identisch verschwinden, so müßte es einen Punkt Q im Innern des Kreises geben, in welchem $v(x, y)$ ein positives Maximum oder ein negatives Minimum erreicht. Wir betrachten die erstgenannte Annahme. Im Punkte Q hat man, nach den notwendigen Bedingungen für das Vorhandensein eines Maximums,

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_{xx} \leqq 0, \quad v_{yy} \leqq 0, \quad v_{xx} v_{yy} - v_{xy}^2 \geqq 0.$$

Da überdies $A^* > 0$, $C^* > 0$, $A^* C^* - B^{*2} > 0$ ist, so folgt sogleich, daß im Punkte Q die Ungleichung

$$A^* v_{xx} + 2B^* v_{xy} + C^* v_{yy} \leqq 0$$

gilt. Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$A^* v_{xx} + 2B^* v_{xy} + C^* v_{yy} + D^* v_x + E^* v_y + F^* v = 0$$

in diesem Punkte Q. Die Summe der drei ersten Glieder ist $\leqq 0$, die beiden folgenden Glieder verschwinden, und das letzte Glied ist kleiner als Null, da $F^* < 0$ und $v > 0$ ist (da ja nach Voraussetzung v im Punkte Q ein positives Maximum erreicht). Die linke Seite wäre also im Punkte Q nicht Null, sondern negativ. Aus diesem Widerspruche folgt die Unzulässigkeit der Annahme, daß v im Innern des Kreises ein positives Maximum erreicht; um zu erkennen, daß v auch kein negatives Minimum annehmen kann, hat man nur auf $-v$ dieselbe Betrachtung anzuwenden.

§ 2.

Genaue Fassung der Randwertaufgabe im Kleinen.

Das Hilbertsche Theorem.

1. Wir knüpfen an die Bemerkungen in Nr. 3 der Einleitung an und betrachten die Gleichung

$$r + t = f(x, y, z, p, q, r, s, t). \tag{66}$$

[12]) Diese Schlußweise, welche wir einer brieflichen Mitteilung von Herrn S. Bernstein entnehmen, ist derjenigen nachgebildet, deren sich Paraf im besonderen Falle $A^* = C^* = 1$, $B^* = 0$ bedient hatte. Auf diese Weise gelingt es, die von Paraf herangezogene Reduktion auf die Normalform zu vermeiden und die Allgemeinheit der Voraussetzungen zu wahren.

Nach Voraussetzung ist f in der Umgebung einer gewissen Stelle $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ analytisch und man hat für diese Stelle

$$(67) \qquad (f_r)_0 = (f_s)_0 = (f_t)_0 = 0, \qquad r_0 + t_0 = f(x_0, y_0, \ldots, t_0).$$

Es ist ferner eine Funktion $\zeta(x, y)$ vorgelegt, welche in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) dreimal stetig derivierbar ist, und an welche gegenwärtig nur noch die Forderung gestellt wird, daß sie für (x_0, y_0) die Anfangswerte $z_0, p_0, \ldots, t_0$ annimmt, daß also $\zeta(x_0, y_0) = z_0$, $\zeta_x(x_0, y_0) = p_0, \ldots,$ $\zeta_{yy}(x_0, y_0) = t_0$.

Wir nehmen einen Kreis mit dem Mittelpunkte (x_0, y_0) und dem Radius R an und wollen zeigen, daß wenn R hinreichend klein ist, eine Lösung der Gleichung (66) existiert, welche auf der Peripherie des Kreises mit $\zeta(x, y)$ übereinstimmt und außerdem im Kreise normal ist. Die Schranke für R würde sich aus der Konstruktion dieser Lösung auch von selbst ergeben; wir ziehen es aber vor, mit der Angabe einer brauchbaren Schranke zu beginnen, da hierdurch die eigentliche Beweisführung übersichtlicher wird.

Die Schranke für R hängt natürlich von den Bestimmungsstücken des Problems ab, und zwar in sehr einfacher Weise. Man braucht nur gewisse Konstanten zu kennen, welche durch die rechte Seite der Gleichung (66), durch die Funktion $\zeta(x, y)$ und durch die heranzuziehende Funktionaloperation der Normbildung bestimmt werden, um eine brauchbare Schranke angeben zu können. Im ganzen kommen sechs solche Konstanten in Betracht, die wir mit $k_1, k_2, \varepsilon_0, \varepsilon_1, M, \lambda$ bezeichnen werden; da sie in den folgenden Überlegungen oft vorkommen, wollen wir dieselben hier einzeln erklären.

$\boxed{k_1, k_2}$ Nach Voraussetzung ist f in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar:

$$f(x, y, \ldots, t) = \mathfrak{P}(x - x_0, y - y_0, \ldots, t - t_0).$$

Die Ableitungen $f_x, \ldots, f_t$ sind ebenfalls analytisch in der Umgebung dieser Stelle; ihre Potenzreihen bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_x, \ldots, \mathfrak{P}_t$. Seien nun $(x, y, z'', \ldots, t'')$, $(x, y, z', \ldots, t')$ zwei veränderliche Stellen in der Umgebung von $(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$. Die Differenz

$$f(x, y, z'', \ldots, t'') - f(x, y, z', \ldots, t')$$

ist zunächst offenbar eine analytische Funktion der vierzehn Argumente $x, y, z'', z', \ldots, t'', t'$ in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, z_0, z_0, \ldots, t_0, t_0)$. Führen wir für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Hilfsfunktion

$$\psi(\tau) = f(x, y, \tau z'' + (1 - \tau) z', \ldots, \tau t'' + (1 - \tau) t')$$

ein, so ist die betrachtete Differenz gleich

$$\psi(1)-\psi(0)=\int_0^1 \psi'(\tau)\,d\tau,$$

und indem wir dies entwickeln, erhalten wir die Formel

$$\begin{aligned}(68)\qquad & f(x,y,z'',\ldots,t'')-f(x,y,z',\ldots,t')\\ &=(z''-z')\mathfrak{P}_1+(p''-p')\mathfrak{P}_2+(q''-q')\mathfrak{P}_3+(r''-r')\mathfrak{P}_4\\ &\quad+(s''-s')\mathfrak{P}_5+(t''-t')\mathfrak{P}_6,\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_6$ Potenzreihen von $x-x_0$, $y-y_0$, $z''-z_0$, $z'-z_0$, $\ldots$, $t''-t_0$, $t'-t_0$ sind. Es gelten überdies, nach der Herleitung dieser Formel, die Darstellungen:

$$\begin{aligned}(69)\qquad & \mathfrak{P}_1=\int_0^1 \mathfrak{P}_z(\ldots)\,d\tau, \quad \mathfrak{P}_2=\int_0^1 \mathfrak{P}_p(\ldots)\,d\tau, \quad \mathfrak{P}_3=\int_0^1 \mathfrak{P}_q(\ldots)\,d\tau,\\ & \mathfrak{P}_4=\int_0^1 \mathfrak{P}_r(\ldots)\,d\tau, \quad \mathfrak{P}_5=\int_0^1 \mathfrak{P}_s(\ldots)\,d\tau, \quad \mathfrak{P}_6=\int_0^1 \mathfrak{P}_t(\ldots)\,d\tau,\end{aligned}$$

wo in die Klammern die Argumente

$$x-x_0,\quad y-y_0,\quad \tau z''+(1-\tau)z'-z_0,\quad \ldots,\quad \tau t''+(1-\tau)t'-t_0$$

einzusetzen sind.

Wir führen nun wieder, wenn eine Potenzreihe

$$Q(\zeta_1-a_1,\ldots,\zeta_n-a_n)=\sum \gamma_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(\zeta_1-a_1)^{\nu_1}\ldots(\zeta_n-a_n)^{\nu_n}$$

vorgelegt ist, die Bezeichnung

$$\dot{Q}(\delta)=\sum |\gamma_{\nu_1,\ldots,\nu_n}|\,\delta^{\nu_1+\cdots+\nu_n}$$

ein. Dann können wir zunächst eine kleine positive Konstante k_1' bestimmen, so daß $\dot{\mathfrak{P}}(k_1')$, $\dot{\mathfrak{P}}_z(k_1')$, $\ldots$, $\dot{\mathfrak{P}}_t(k_1')$ endlich sind. Sei dann k_2' eine große positive Konstante, so daß

$$(70)\qquad \dot{\mathfrak{P}}(k_1'),\ \dot{\mathfrak{P}}_z(k_1'),\ \ldots,\ \dot{\mathfrak{P}}_t(k_1')<k_2'.$$

Aus den Darstellungen (69) erhält man dann nach einfacher Überlegung: Ist $0\leqq\delta\leqq\frac{k_1'}{2}$, so gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}(71)\qquad & \dot{\mathfrak{P}}_1(\delta)\leqq\dot{\mathfrak{P}}_z(2\delta)\leqq\dot{\mathfrak{P}}_z(k_1')<k_2',\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \dot{\mathfrak{P}}_6(\delta)\leqq\dot{\mathfrak{P}}_t(2\delta)\leqq\dot{\mathfrak{P}}_t(k_1')<k_2'.\end{aligned}$$

Für $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_6$ können diese Ungleichungen verschärft werden, wenn man die Voraussetzungen $(f_r)_0=(f_s)_0=(f_t)_0=0$ beachtet, welche besagen, daß

die Potenzreihen $\mathfrak{P}_r$, $\mathfrak{P}_s$, $\mathfrak{P}_t$ keine konstanten Glieder enthalten. Man hat also etwa

$$\mathfrak{P}_r = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_s \geqq 1} \gamma_{\nu_1,\ldots,\nu_s}(x-x_0)^{\nu_1}\ldots(t-t_0)^{\nu_s},$$

und es folgt

$$\mathring{\mathfrak{P}}_r(2\delta) = \sum |\gamma_{\nu_1,\ldots,\nu_s}|(2\delta)^{\nu_1+\ldots+\nu_s} = \sum |\gamma_{\nu_1,\ldots,\nu_s}| k_1'^{\nu_1+\ldots+\nu_s}\left(\frac{2\delta}{k_1'}\right)^{\nu_1+\ldots+\nu_s}.$$

Wegen

$$\nu_1+\ldots+\nu_s \geqq 1, \qquad \frac{2\delta}{k_1'} \leqq 1$$

ist aber

$$\left(\frac{2\delta}{k_1'}\right)^{\nu_1+\ldots+\nu_s} \leqq \frac{2\delta}{k_1'},$$

und wir erhalten schließlich, mit Rücksicht auf (70):

$$\mathring{\mathfrak{P}}_r(2\delta) \leqq \delta\frac{2k_2'}{k_1'}.$$

Indem man $\mathfrak{P}_s$, $\mathfrak{P}_t$ ebenso behandelt, erhält man unter Beachtung von (71):

$$\text{(72)} \qquad \mathring{\mathfrak{P}}_4(\delta), \mathring{\mathfrak{P}}_5(\delta), \mathring{\mathfrak{P}}_6(\delta) \leqq \delta\frac{2k_2'}{k_1'}.$$

Sei wieder $(x, y, z, \ldots, t)$ eine veränderliche Stelle in der Umgebung von $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$. Es sei ausführlich

$$\begin{aligned} f(x,y,\ldots,t) &= \mathfrak{P}(x-x_0, y-y_0, \ldots, t-t_0) \\ &= f(x_0,y_0,\ldots,t_0) + \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_s\geqq 1} a_{\nu_1,\ldots,\nu_s}(x-x_0)^{\nu_1}\ldots(t-t_0)^{\nu_s} \\ &= f(x_0,y_0,\ldots,t_0) + \mathfrak{P}^*(x-x_0, y-y_0, \ldots, t-t_0). \end{aligned}$$

Für $\mathfrak{P}^*$ gilt also, wenn $0 \leqq \delta \leqq k_1'$,

$$\mathring{\mathfrak{P}}^*(\delta) = \mathring{\mathfrak{P}}(\delta) - |f(x_0,y_0,\ldots,t_0)| \leqq \mathring{\mathfrak{P}}(\delta) < k_2'.$$

Da überdies $\mathfrak{P}^*$ kein konstantes Glied enthält, so gilt wieder die schärfere Ungleichung

$$\mathring{\mathfrak{P}}^*(\delta) < \delta\frac{k_2'}{k_1'} < \delta\frac{2k_2'}{k_1'}.$$

Nun erklären wir die Konstanten k_1 und k_2 selbst durch

$$k_1 = \frac{k_1'}{2}, \qquad k_2 = \frac{2k_2'}{k_1'} + k_2'.$$

Sie hängen also nur von f ab und leisten auf Grund der vorangehenden Bemerkungen folgendes.

Ist

$$|x-x_0|, |y-y_0|, |z''-z_0|, |z'-z_0|, \ldots, |t''-t_0|, |t'-t_0| \leqq \delta \leqq k_1,$$

so hat man die Darstellung

$$\begin{aligned} &f(x, y, z'', \ldots, t'') - f(x, y, z', \ldots, t') \\ (73) \quad &= (z'' - z')\,\mathfrak{P}_1 + (p'' - p')\,\mathfrak{P}_2 + (q'' - q')\,\mathfrak{P}_3 + (r'' - r')\,\mathfrak{P}_4 \\ &\quad + (s'' - s')\,\mathfrak{P}_5 + (t'' - t')\,\mathfrak{P}_6, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_6$ Potenzreihen von $x - x_0$, $y - y_0$, $z'' - z_0$, $z' - z_0$, $\ldots$, $t'' - t_0$, $t' - t_0$ sind, für welche die Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathfrak{P}}_1(\delta),\ \dot{\mathfrak{P}}_2(\delta),\ \dot{\mathfrak{P}}_3(\delta) < k_2, \\ (74) \qquad &\dot{\mathfrak{P}}_4(\delta),\ \dot{\mathfrak{P}}_5(\delta),\ \dot{\mathfrak{P}}_6(\delta) < \delta k_2. \end{aligned}$$

Ist weiter $|x - x_0|, |y - y_0|, \ldots, |t - t_0| \leqq \delta \leqq k_1$, so hat man die Darstellung

$$(75) \quad f(x, y, \ldots, t) - f(x_0, y_0, \ldots, t_0) = \mathfrak{P}^*(x - x_0, y - y_0, \ldots, t - t_0),$$

wobei für die Potenzreihe $\mathfrak{P}^*$ die Beziehung gilt:

$$(76) \qquad \dot{\mathfrak{P}}^*(\delta) < \delta k_2.$$

$\boxed{\varepsilon_0}$ Die Gleichung (66) werde in der Form

$$\Phi(x, y, \ldots, t) = r + t - f(x, y, \ldots, t) = 0$$

geschrieben; dann ist Φ in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ analytisch, also gewiß einmal stetig derivierbar, außerdem gilt

$$(\Phi_r)_0 = (\Phi_t)_0 = 1, \quad (\Phi_s)_0 = 0,$$

so daß die Voraussetzungen des Unitätssatzes in Teil II, § 1 erfüllt sind. Es kann und soll also die Konstante ε_0 so bestimmt werden, daß sie folgendes leistet. Wird ein Kreis mit dem Mittelpunkte (x_0, y_0) und dem Radius $R < \varepsilon_0$ angenommen, hat man ferner zwei Lösungen $\zeta_1(x, y)$ und $\zeta_2(x, y)$ der Gleichung (66), welche auf der Peripherie dieses Kreises die gleichen Randwerte annehmen und im Innern des Kreises den Ungleichungen

$$\begin{aligned} &|\zeta_1 - z_0|, \ \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - p_0\right|, \ \ldots, \ \left|\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y^2} - t_0\right| < \varepsilon_0, \\ &|\zeta_2 - z_0|, \ \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - p_0\right|, \ \ldots, \ \left|\frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial y^2} - t_0\right| < \varepsilon_0 \end{aligned}$$

genügen, so sind die beiden Lösungen im Innern des Kreises identisch.

$\boxed{M}$ Die Funktion $\zeta(x, y)$ ist in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) dreimal stetig derivierbar. Die Konstante M werde so gewählt, daß in dieser Umgebung

$$|D_1\zeta|, |D_2\zeta|, |D_3\zeta| < M$$

sei; überdies sei noch $M > 1$.

$\boxed{\varepsilon_1}$ Da nach Voraussetzung

$$\zeta(x_0, y_0) = z_0, \quad \zeta_x(x_0, y_0) = p_0, \quad \ldots, \quad \zeta_{yy}(x_0, y_0) = t_0$$

ist, so kann und soll ε_1 so bestimmt werden, daß für $|x - x_0|, |y - y_0| < \varepsilon_1$ die Ungleichungen

$$|\zeta - z_0|, |\zeta_x - p_0|, \ldots, |\zeta_{yy} - t_0| < \varepsilon_0$$

gelten, wo ε_0 die oben fixierte Konstante ist.

$\boxed{\lambda}$ Diese ist diejenige Konstante, die beim Postulate E_6 (Teil I, § 2) vorkommt; wir haben gesehen, daß etwa $\lambda = 5 \cdot 3^{10}$ gesetzt werden kann. Jedenfalls ist λ von den Bestimmungsstücken der vorgelegten Randwertaufgabe vollkommen unabhängig.

2. Nun sind wir in der Lage, eine brauchbare Schranke für R anzugeben. Zunächst werde eine positive Zahl ε gemäß den Ungleichungen

$$\varepsilon < \varepsilon_0, \; k_1, \; \frac{1}{12\lambda k_2} \tag{77}$$

fixiert, hierauf werde R so gewählt, daß die Ungleichungen gelten:

$$R < 1, \varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, k_1, \frac{1}{12\lambda k_2}, \frac{\varepsilon}{300M}, \frac{\varepsilon}{300M(1+2\lambda k_2)}. \tag{78}$$

Bei einer derartigen Wahl von R gilt der folgende

Hilfssatz 2. Ist R in der soeben erklärten Weise gewählt, so gibt es eine Lösung $u(x, y)$ der Gleichung (66), die auf der Peripherie des Kreises R mit $\zeta(x, y)$ übereinstimmt, im Kreise R nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung normal ist, und außerdem den Beziehungen

$$N[u - z_0]_R, \; N[u_x - p_0]_R, \; \ldots, \; N[u_{yy} - t_0]_R < \varepsilon_0$$

genügt.

Zusatz. Falls $\zeta(x, y)$ selbst eine Lösung war, so ist im Kreise R $u(x, y) \equiv \zeta(x, y)$.

Aus Hilfssatz 2 nebst Zusatz folgt unmittelbar das Hilbertsche Theorem. Wenn nämlich $\zeta(x, y)$ die zu untersuchende Lösung ist, so ist sie nach dem Zusatze in einem hinreichend kleinen Kreise R normal, also analytisch. Wir wollen hervorheben, daß Postulat E_3, in welchem die Analytizität der normalen Funktionen gefordert wird, eben nur an dieser Stelle Verwendung findet, die sonstigen Überlegungen sind von demselben unabhängig.

Der Zusatz zu Hilfssatz 2 folgt unmittelbar aus der getroffenen Wahl von R. In der Tat, da nach E_2 der absolute Betrag einer im Kreise R normalen Funktion ihre Norm nicht übertrifft, so gelten für die Hilfslösung $u(x, y)$ im Kreise R a fortiori die Ungleichungen:

$$|u - z_0|, \; |u_x - p_0|, \; \ldots, \; |u_{yy} - t_0| < \varepsilon_0.$$

Wegen $R < \varepsilon_1$ ist ferner $|x - x_0|$, $|y - y_0| < \varepsilon_1$, also gelten, nach der Bedeutung von ε_1, im Kreise R die Ungleichungen

$$|\zeta - z_0|, \; |\zeta_x - p_0|, \; \ldots, \; |\zeta_{yy} - t_0| < \varepsilon_0 .$$

Schließlich ist auch $R < \varepsilon_0$ gewählt worden; die Identität von ζ und u folgt also aus der Bedeutung von ε_0.

Zum Beweise des Hilbertschen Theorems haben wir also nur noch Hilfssatz 2 zu begründen.

§ 3.

Lösung der Randwertaufgabe im Kleinen.

1. Beim Beweise von Hilfssatz 2 benötigen wir noch die folgenden Bemerkungen. Sei

$$Q(\zeta_1 - a_1, \ldots, \zeta_n - a_n) = \sum \gamma_{\nu_1, \ldots, \nu_n} (\zeta_1 - a_1)^{\nu_1} \ldots (\zeta_n - a_n)^{\nu_n}$$

eine Potenzreihe, so daß für eine gewisse positive Zahl δ der Ausdruck $\dot{Q}(\delta)$ endlich ist. Es seien $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y)$ im Kreise R normal, und es sollen die Beziehungen gelten:

$$N[\varphi_1(x, y) - a_1]_R, \; \ldots, \; N[\varphi_n(x, y) - a_n]_R \leqq \delta .$$

Wir setzen in die Potenzreihe für $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ die Funktionen $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y)$ ein und wollen zeigen, daß die zustande kommende Funktion $F(x, y)$ im Kreise R normal ist, und daß $N[F]_R \leqq \dot{Q}(\delta)$ gilt. Zunächst liefert nämlich das einzelne Glied der Potenzreihe eine Funktion

$$\gamma_{\nu_1, \ldots, \nu_n} (\varphi_1(x, y) - a_1)^{\nu_1} \ldots (\varphi_n(x, y) - a_n)^{\nu_n},$$

die nach E_4 im Kreise R normal ist; die Norm derselben ist nach E_4 [13])

$$\leqq |\gamma_{\nu_1, \ldots, \nu_n}| (N[\varphi_1 - a_1]_R)^{\nu_1} \ldots (N[\varphi_n - a_n]_R)^{\nu_n} \leqq |\gamma_{\nu_1, \ldots, \nu_n}| \, \delta^{\nu_1 + \ldots + \nu_n}.$$

Durch Einsetzen der Funktionen $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y)$ geht also aus der Potenzreihe eine Reihe hervor, deren Glieder im Kreise R normal sind. Die Summe der Normen der Reihenglieder ist dabei

$$\leqq \sum |\gamma_{\nu_1, \ldots, \nu_n}| \, \delta^{\nu_1 + \ldots + \nu_n} = \dot{Q}(\delta),$$

womit, mit Rücksicht auf E_5, die Behauptung erwiesen ist.

In Verbindung mit (73), (74), (75), (76) ergibt sich daraus unmittelbar folgendes. Es seien $\zeta_1(x, y)$, $\zeta_2(x, y)$ im Kreise R nebst ihren

[13]) $E_1, E_2, \ldots, E_6$ sind die in Teil I, § 2 erklärten Postulate, denen die Funktionaloperation der Normbildung genügt. Wir bemerken noch einmal, daß im folgenden die besondere arithmetische Definition dieser Funktionaloperation nirgends herangezogen wird.

Ableitungen erster und zweiter Ordnung normal, und es gelte für eine gewisse positive Zahl $\delta \leqq k_1$:

$$(79)\quad \begin{gathered} N[\zeta_1 - z_0]_R,\ N\Big[\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - p_0\Big]_R,\ \ldots,\ N\Big[\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y^2} - t_0\Big]_R \leqq \delta, \\ N[\zeta_2 - z_0]_R,\ N\Big[\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - p_0\Big]_R,\ \ldots,\ N\Big[\frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial y^2} - t_0\Big]_R \leqq \delta, \\ R \leqq \delta. \end{gathered}$$

Dann ist zunächst auch $N[x - x_0]_R$, $N[y - y_0]_R = R \leqq \delta$, und da die Funktion

$$w(x, y) = \zeta_2(x, y) - \zeta_1(x, y)$$

nach E_4 im Kreise R ebenfalls normal ist, so erhalten wir auf Grund von (73), (74): Wird

$$(80)\quad \begin{gathered} F(x, y) = f\Big(x, y, \zeta_2, \frac{\partial \zeta_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial y^2}\Big) - f\Big(x, y, \zeta_1, \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y^2}\Big), \\ w = \zeta_2 - \zeta_1 \end{gathered}$$

gesetzt, und bestehen die Ungleichungen (79), so ist $F(x, y)$ im Kreise R normal, und zwar gilt

$$(81)\quad \begin{aligned} N[F]_R \leqq k_2 (N[w]_R + N[w_x]_R + N[w_y]_R) \\ + \delta k_2 (N[w_{xx}]_R + N[w_{xy}]_R + N[w_{yy}]_R). \end{aligned}$$

Aus (75), (76) erhalten wir ebenso: Ist eine Funktion $g(x, y)$ im Kreise R nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung normal, und gilt für eine gewisse positive Zahl $\delta \leqq k_1$:

$$(82)\quad \begin{gathered} N[g - z_0]_R,\ N[g_x - p_0]_R,\ \ldots,\ N[g_{yy} - t_0]_R \leqq \delta, \\ R \leqq \delta, \end{gathered}$$

so ist

$$(83)\quad F(x, y) = f(x, y, g, g_x, \ldots, g_{yy}) - f(x_0, y_0, z_0, p_0, \ldots, t_0)$$

im Kreise R normal, und man hat:

$$(84)\quad N[F]_R \leqq \delta k_2.$$

2. Wir werden die Lösung $u(x, y)$, von welcher in Hilfssatz 2 die Rede ist, durch sukzessive Approximationen konstruieren. Wir bestimmen zunächst eine Ausgangsfunktion $u_0(x, y)$ auf folgende Weise. Sie soll auf der Peripherie des Kreises R mit $\zeta(x, y)$ übereinstimmen und im Innern der Gleichung

$$(85)\quad \Delta u_0 = r_0 + t_0$$

genügen, wo also $r_0 = \zeta_{xx}(x_0, y_0)$, $t_0 = \zeta_{yy}(x_0, y_0)$ ist. Bezeichnet u_0' die

im Kreise R harmonische Funktion, welche auf der Peripherie mit $\zeta(x, y)$ übereinstimmt, so ist offenbar

$$u_0 = u_0' + \frac{r_0 + t_0}{4}\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2\right). \tag{86}$$

Wir behaupten nun, daß u_0 im Kreise R nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung normal ist und die Ungleichungen

$$N[u_0 - z_0]_R,\ N\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_R,\ \ldots,\ N\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right]_R < 300\,MR \tag{87}$$

befriedigt.

Zum Beweise müssen wir die Werte von $\zeta(x, y)$ auf dem Kreise R genauer betrachten. Da $\zeta(x, y)$ dreimal stetig derivierbar ist, so erhalten wir aus der Taylorschen Formel, wobei das Restglied durch ein Integral auszudrücken ist, folgende Darstellung für $\zeta(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0)[14]:

$$\begin{aligned}\zeta = {} & z_0 + p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) \\ & + \tfrac{1}{2}(r_0(x - x_0)^2 + 2s_0(x - x_0)(y - y_0) + t_0(y - y_0)^2) \\ & + \tfrac{1}{2}\Big[(x - x_0)^3 \int_0^1 (1 - h)^2 \zeta_{xxx}(\ldots)\,dh + 3(x - x_0)^2(y - y_0)\int_0^1 (1 - h)^2 \zeta_{xxy}(\ldots) \\ & + 3(x - x_0)(y - y_0)^2 \int_0^1 (1 - h)^2 \zeta_{xyy}(\ldots)\,dh + (y - y_0)^3 \int_0^1 (1 - h)^2 \zeta_{yyy}(\ldots)\,dh\end{aligned}$$

wobei in die Klammern $(\ldots)$ die Argumente $hx + (1 - h)x_0$, $hy + (1 - h)y_0$ einzusetzen sind. Diese Darstellung hat die Form

$$\begin{aligned}\zeta = {} & z_0 + p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) \\ & + \tfrac{1}{2}(r_0(x - x_0)^2 + 2s_0(x - x_0)(y - y_0) + t_0(y - y_0)^2) \\ & + f_1(x, y)(x - x_0)^3 + f_2(x, y)(x - x_0)^2(y - y_0) \\ & + f_3(x, y)(x - x_0)(y - y_0)^2 + f_4(x, y)(y - y_0)^3,\end{aligned}$$

wobei f_1, f_2, f_3, f_4 stetig und dem absoluten Betrage nach $\leqq M$ sind, wie dies aus der expliziten Darstellung ersichtlich ist. Für die Ableitungen von ζ erhalten wir auf analoge Weise

$$\begin{aligned}\zeta_x = {} & p_0 + r_0(x - x_0) + s_0(y - y_0) + \varphi_1(x, y)(x - x_0)^2 \\ & + \varphi_2(x, y)(x - x_0)(y - y_0) + \varphi_3(x, y)(y - y_0)^2, \\ \zeta_y = {} & q_0 + s_0(x - x_0) + t_0(y - y_0) + \psi_1(x, y)(x - x_0)^2 \\ & + \psi_2(x, y)(x - x_0)(y - y_0) + \psi_3(x, y)(y - y_0)^2,\end{aligned}$$

[14]) Vgl. etwa Jordan, Cours d'Analyse I, S. 253.

$$\zeta_{xx} = r_0 + \chi_1(x,y)(x-x_0) + \chi_2(x,y)(y-y_0),$$
$$\zeta_{xy} = s_0 + \theta_1(x,y)(x-x_0) + \theta_2(x,y)(y-y_0),$$
$$\zeta_{yy} = t_0 + \eta_1(x,y)(x-x_0) + \eta_2(x,y)(y-y_0),$$

wo alle die Funktionen $\varphi, \psi, \ldots, \eta$ stetig und dem absoluten Betrage nach $\leqq M$ sind. Die Ableitungen dritter Ordnung sind nach Voraussetzung stetig und absolut $\leqq M$; wir haben also auf der Peripherie des Kreises R, wenn

$$x - x_0 = R\cos\theta, \qquad y - y_0 = R\sin\theta$$

eingeführt wird, die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\zeta &= z_0 + R(p_0\cos\theta + q_0\sin\theta) \\
&\quad + \frac{R^2}{2}(r_0\cos^2\theta + 2s_0\sin\theta\cos\theta + t_0\sin^2\theta) + R^3\Phi_0(\theta), \\
\zeta_x &= p_0 + R(r_0\cos\theta + s_0\sin\theta) + R^2\Phi_1(\theta), \\
\zeta_y &= q_0 + R(s_0\cos\theta + t_0\sin\theta) + R^2\Phi_2(\theta), \\
\zeta_{xx} &= r_0 + R\Phi_3(\theta), \quad \zeta_{xy} = s_0 + R\Phi_4(\theta), \quad \zeta_{yy} = t_0 + R\Phi_5(\theta), \\
\zeta_{xxx} &= \Phi_6(\theta), \quad \zeta_{xxy} = \Phi_7(\theta), \quad \zeta_{xyy} = \Phi_8(\theta), \quad \zeta_{yyy} = \Phi_9(\theta),
\end{aligned} \tag{88}$$

wobei

$$|\Phi_0(\theta)|, \ldots, |\Phi_9(\theta)| \leqq 2M. \tag{89}$$

Diese Ungleichungen folgen aus den Formeln unmittelbar; man hat etwa

$$\Phi_0(\theta) = \frac{1}{3!}(f_1\cos^3\theta + 3f_2\cos^2\theta\sin\theta + 3f_3\cos\theta\sin^2\theta + f_4\sin^3\theta),$$

also wegen

$$|f_1|, \ldots, |f_4| \leqq M$$

offenbar

$$|\Phi_0(\theta)| \leqq 2M.$$

Uns interessiert die Funktion $\Phi_0(\theta)$. Da ζ als Funktion von x und y dreimal stetig derivierbar ist, so ist sie auf der Peripherie des Kreises R als Funktion von θ dreimal stetig derivierbar. Es ist also, wie aus (88) ersichtlich, auch $\Phi_0(\theta)$ dreimal stetig derivierbar; aus (88) berechnet man:

$$\begin{aligned}
R^3\Phi_0'''(\theta) &= \frac{\partial^3\zeta}{\partial\theta^3} - R(p_0\sin\theta - q_0\cos\theta) \\
&\quad - 2R^2(r_0\sin 2\theta - 2s_0\cos 2\theta - t_0\sin 2\theta).
\end{aligned} \tag{90}$$

Andererseits erhalten wir durch wiederholte Anwendung der Formel

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} = -R(\zeta_x\sin\theta - \zeta_y\cos\theta)$$

die Gleichung:

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \theta^3} = R^3(\zeta_{yyy}\cos^3\theta - 3\zeta_{xyy}\sin\theta\cos^2\theta + 3\zeta_{xxy}\sin^2\theta\cos\theta - \zeta_{xxx}\sin^3\theta)$$
$$- 3R^2(\zeta_{yy}\sin\theta\cos\theta + \zeta_{xy}\cos 2\theta - \zeta_{xx}\sin\theta\cos\theta)$$
$$- R(\zeta_y\cos\theta - \zeta_x\sin\theta).$$

Setzen wir jetzt für $\zeta_x, \ldots, \zeta_{yyy}$ die Ausdrücke (88) ein, so ergibt sich:

$$(91)\quad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \theta^3} = R(p_0\sin\theta - q_0\cos\theta) + 2R^2(r_0\sin 2\theta - 2s_0\cos 2\theta - t_0\sin 2\theta)$$
$$+ R^3(\Phi_1\sin\theta - \Phi_2\cos\theta - 3\Phi_3\sin\theta\cos\theta$$
$$- 3\Phi_4\cos 2\theta + 3\Phi_5\sin\theta\cos\theta + \Phi_6\sin^3\theta$$
$$- 3\Phi_7\sin^2\theta\cos\theta + 3\Phi_8\sin\theta\cos^2\theta - \Phi_9\cos^3\theta).$$

Setzen wir dies in die rechte Seite von (90) ein, so heben sich diejenigen Glieder, welche R^2 und R enthalten, weg, und man findet auf diese Weise, daß $\Phi_0'''(\theta)$ gleich dem Faktor von R^3 in (91) ist. Daraus folgt mit Rücksicht auf (89) die Abschätzung

$$(92)\qquad |\Phi_0'''| \leqq 19\cdot 2M \leqq 50M.$$

Nun werde $\Phi_0(\theta)$ in Fourierreihe entwickelt:

$$(93)\qquad \Phi_0(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta).$$

Da Φ_0''' stetig ist, so folgt

$$\Phi_0'''(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^3(c_n\sin n\theta - d_n\cos n\theta),$$

also nach der Besselschen Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^6(c_n^2 + d_n^2) \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_0'''(\theta)^2\,d\theta \leqq 2\cdot(50M)^3.$$

Auf Grund der Schwarzschen Ungleichung folgt dann:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|c_n| + |d_n|)\Big)^2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,n^3(|c_n| + |d_n|)\Big)^2$$

$$\leqq \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^6(|c_n| + |d_n|)^2\Big) \leqq 2\cdot 2\sum_{n=1}^{\infty} n^6(|c_n|^2 + |d_n|^2) \leqq 8\cdot(50M)^2,$$

also

$$(94)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2(|c_n| + |d_n|) \leqq 200M,$$

und a fortiori

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|c_n| + |d_n|) \leqq 200\, M, \tag{95}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|c_n| + |d_n|) \leqq 200\, M. \tag{96}$$

Schließlich ist

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_0(\theta)\, d\theta,$$

also wegen $|\Phi_0| \leqq 2M$

$$\frac{|c_0|}{2} \leqq 2M,$$

$$\frac{|c_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n| + |d_n|) \leqq 202\, M \tag{97}$$

Wenn wir nun ζ auf der Peripherie des Kreises R in Fourierreihe entwickeln:

$$\zeta(x_0 + R\cos\theta,\quad y_0 + R\sin\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \tag{98}$$

und in die erste Gleichung (88) für $\Phi_0(\theta)$ die Reihe (93) einsetzen, so erhalten wir durch Koeffizientenvergleichung:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = 2z_0 + \tfrac{r_0 + t_0}{2} R^2 + R^3 c_0, \\
&\alpha_1 = R p_0 + R^3 c_1, \quad \beta_1 = R q_0 + R^3 d_1, \\
&\alpha_2 = \tfrac{R^2}{4}(r_0 - t_0) + R^3 c_2, \quad \beta_2 = \tfrac{R^2}{2} s_0 + R^3 d_2, \\
&\alpha_n = R^3 c_n, \quad \beta_n = R^3 d_n, \quad (n \geqq 3),
\end{aligned} \tag{99}$$

wobei also die c_n und d_n den Ungleichungen (94), (95), (96), (97) genügen.

Wir bilden nun die harmonische Funktion u_0', die auf der Peripherie des Kreises R mit $\zeta(x, y)$ übereinstimmt; mit Rücksicht auf (98) haben wir

$$u_0' = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta).$$

Wir erhalten weiter mit Hilfe der Formeln (5) bis (9) in Teil I, § 1:

$$\frac{\partial u_0'}{\partial x} = \frac{\alpha_1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{R} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n (\alpha_{n+1} \cos n\theta + \beta_{n+1} \sin n\theta),$$

$$\frac{\partial u_0'}{\partial y} = \frac{\beta_1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{R} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n (\beta_{n+1} \cos n\theta - \alpha_{n+1} \sin n\theta),$$

$$\frac{\partial^2 u_0'}{\partial x^2} = \frac{2\alpha_2}{R^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{R^2} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n (\alpha_{n+2} \cos n\theta + \beta_{n+2} \sin n\theta),$$

$$\frac{\partial^2 u_0'}{\partial x \partial y} = \frac{2\beta_2}{R^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{R^2} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n (\beta_{n+2} \cos n\theta - \alpha_{n+2} \sin n\theta),$$

$$\frac{\partial^2 u_0'}{\partial y^2} = -\frac{2\alpha_2}{R^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{R^2} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n (\alpha_{n+2} \cos n\theta + \beta_{n+2} \sin n\theta).$$

Für die durch (86) erklärte Funktion u_0 ergeben sich daraus, wenn noch für α_n, β_n die Ausdrücke (99) eingesetzt werden, die folgenden Formeln:

$$(100) \qquad u_0 - z_0 = \frac{r_0 + t_0}{4} \varrho^2 + p_0 \varrho \cos\theta + q_0 \varrho \sin\theta + \frac{r_0 - t_0}{4} \varrho^2 \cos 2\theta$$

$$+ \frac{s_0}{2} \varrho^2 \sin 2\theta + R^3 \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R^3 c_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R^3 d_n \sin n\theta,$$

$$(101) \qquad \frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0 = r_0 \varrho \cos\theta + s_0 \varrho \sin\theta + R^2 c_1$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R^2 c_{n+1} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R^2 d_{n+1} \sin n\theta,$$

$$(102) \qquad \frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0 = s_0 \varrho \cos\theta + t_0 \varrho \sin\theta + R^2 d_1$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R^2 d_{n+1} \cos n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R^2 c_{n+1} \sin n\theta,$$

$$(103) \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0 = 2R c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R c_{n+2} \cos n\theta$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R d_{n+2} \sin n\theta,$$

$$(104) \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - s_0 = 2R d_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R d_{n+2} \cos n\theta$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R c_{n+2} \sin n\theta,$$

$$(105) \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0 = -2R c_2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R c_{n+2} \cos n\theta$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n R d_{n+2} \sin n\theta.$$

Auf Grund dieser Formeln können wir die Ungleichungen (87) unmittelbar verifizieren. Die Glieder der erhaltenen Reihen sind nämlich, bis auf das

erste Glied von (100), harmonisch, und ihre Normen sind also auf Grund von E_1 zu bestimmen; für das erste Glied in (100) schließen wir, wegen $\varrho^2 = (\varrho\cos\theta)^2 + (\varrho\sin\theta)^2$, auf Grund von E_1 und E_4:

$$N\left[\frac{r_0+t_0}{4}\varrho^2\right]_R \leqq \frac{|r_0+t_0|}{4} 2R^2 = \frac{|r_0+t_0|}{2} R^2.$$

Beachten wir noch, daß $|R|<1$, $|p_0|, |q_0|, \ldots, |t_0| < M$ ist, so ergibt sich, mit Rücksicht auf (94), (95), (97), und auf Grund von E_5:

$$N[u_0 - z_0]_R \leqq MR^2 + MR + MR + \tfrac{1}{2}MR^2 + \tfrac{1}{2}MR^2$$

$$+ R^3\left(\frac{|c_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|c_n| + |d_n|)\right) \leqq 4MR + 202MR \leqq 300MR,$$

. . . . . .

$$N\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right]_R \leqq 2R|c_2| + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)R(|c_{n+2}| + |d_{n+2}|)$$

$$\leqq R\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|c_n| + |d_n|) \leqq 200MR \leqq 300MR.$$

Damit sind für die durch (86) gegebene Funktion u_0 die Ungleichungen (87) bewiesen.

3. Wir nehmen nun einen ersten Schritt vor, indem wir drei Funktionen $F_1(x,y)$, $v_1(x,y)$, $u_1(x,y)$ auf folgende Weise bestimmen. Zunächst ist

$$F_1(x,y) = f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right) - f(x_0, y_0, z_0, p_0, \ldots, t_0).$$

Wir wollen (83) und (84) heranziehen. Zu dem Ende stellen wir fest, daß wegen $M>1$ und mit Rücksicht auf (77), (78):

$$R < 300MR < \varepsilon < k_1;$$

auf Grund von (87) kann also (83), (84) mit $\delta = 300MR$ angewendet werden. Folglich ist $F_1(x,y)$ im Kreise R normal, und man hat:

$$(105_*) \qquad N[F_1]_R \leqq 300MRk_2.$$

Sei weiter $v_1(x,y)$ die auf der Peripherie des Kreises R verschwindende Lösung der Gleichung $\Delta v_1 = F_1$. Nach E_6 existiert dieselbe, ist im Kreise R nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung normal, und es gilt:

$$N[v_1]_R \leqq \lambda R^2 N[F_1]_R, \qquad N[D_1 v_1]_R \leqq \lambda R N[F_1]_R,$$
$$N[D_2 v_1]_R \leqq \lambda N[F_1]_R.$$

Schließlich wird u_1 durch $u_1 = u_0 + v_1$ erklärt; dann ist, nach E_4, u_1 im

Kreise R nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung normal. Wir behaupten die Ungleichungen

$$N[u_1 - z_0]_R,\ N\left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - p_0\right]_R,\ \ldots,\ N\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - t_0\right]_R < \varepsilon.$$

In der Tat:

$$N[u_1 - z_0]_R \leqq N[u_0 - z_0]_R + N[v_1]_R \leqq 300\,MR + \lambda R^2 N[F_1]_R$$
$$\leqq 300\,MR + \lambda N[F_1]_R,$$

. . . . . .

$$N\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - t_0\right]_R \leqq N\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right]_R + N\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right]_R \leqq 300\,MR + \lambda N[F_1]_R.$$

Nun ist $N[F_1]_R \leqq 300\,MRk_2$, folglich mit Rücksicht auf (78):

$$300\,MR + \lambda N[F_1]_R \leqq 300\,MR(1 + \lambda k_2) < 300\,MR(1 + 2\lambda k_2) < \varepsilon.$$

4. Der zweite Schritt besteht wiederum in der Bestimmung dreier Funktionen $F_2(x, y)$, $v_2(x, y)$, $u_2(x, y)$. Zunächst wird

$$F_2(x, y) = f\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right) - f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right)$$

eingeführt. Um (81) anwenden zu können, stellen wir fest, daß nach dem Vorigen

$$N[u_1 - z_0]_R, N\left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - p_0\right]_R, \ldots, N\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - t_0\right]_R < \varepsilon,$$

$$N[u_0 - z_0]_R, N\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_R, \ldots, N\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right]_R < \varepsilon,$$

$$R < 300\,MR < \varepsilon.$$

Wegen $\varepsilon < k_1$ dürfen wir also (81) mit $\delta = \varepsilon$ anwenden; wir erhalten

$$N[F_2]_R \leqq k_2\left(N[v_1]_R + N\left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R + N\left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R\right)$$
$$+ \varepsilon k_2\left(N\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right]_R + N\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}\right]_R + N\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right]_R\right)$$
$$\leqq k_2 \lambda N[F_1]_R(R^2 + 2R) + 3\varepsilon k_2 \lambda N[F_1]_R \leqq 3k_2\lambda(R + \varepsilon)N[F_1]_R,$$

also mit Rücksicht auf (77), (78):

$$N[F_2]_R \leqq \tfrac{1}{2} N[F_1]_R.$$

Jetzt wird $v_2(x, y)$ als die auf der Peripherie des Kreises R verschwindende Lösung der Gleichung $\Delta v_2 = F_2$ erklärt. Nach E_6 existiert dieselbe, und es gilt:

$$N[v_2]_R \leqq \lambda R^2 N[F_2]_R, \quad N[D_1 v_2]_R \leqq \lambda R N[F_2]_R,$$
$$N[D_2 v_2]_R \leqq \lambda N[F_2]_R.$$

Schließlich wird $u_2 = u_0 + v_1 + v_2$ eingeführt. Auf Grund von E_4 ergibt sich wieder

$$N[u_2 - z_0]_R,\ N\left[\frac{\partial u_2}{\partial x} - p_0\right]_R,\ \ldots,\ N\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - t_0\right]_R < \varepsilon.$$

In der Tat:

$$\begin{aligned} N[u_2 - z_0]_R &\leqq N[u_0 - z_0]_R + N[v_1]_R + N[v_2]_R \\ &\leqq 300\,MR + \lambda R^2 (N[F_1]_R + N[F_2]_R) \\ &\leqq 300\,MR + \lambda (N[F_1]_R + N[F_2]_R), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - t_0\right]_R &\leqq N\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right]_R + N\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right]_R + N\left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right]_R \\ &\leqq 300\,MR + \lambda (N[F_1]_R + N[F_2]_R). \end{aligned}$$

Es ist aber (vgl. (105$_*$) und (78)):

$$\begin{aligned} 300\,MR + \lambda (N[F_1]_R + N[F_2]_R) &\leqq 300\,MR + \lambda N[F_1]_R \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &\leqq 300\,MR + 2\lambda N[F_1]_R \leqq 300\,MR(1 + 2\lambda k_2) < \varepsilon. \end{aligned}$$

5. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man, wie wir uns allgemein überzeugen wollen, drei Funktionenreihen

$$F_1, \ldots, F_n, \ldots,$$
$$v_1, \ldots, v_n, \ldots,$$
$$u_1, \ldots, u_n, \ldots$$

mit folgenden Eigenschaften. Die Anfangsglieder $F_1, v_1, u_1,\ F_2, v_2, u_2$ stimmen mit den bereits ausführlich besprochenen überein. Für $n \geqq 2$ ist

$$\begin{aligned} F_n(x, y) = f\Big(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2}\Big) \\ - f\Big(x, y, u_{n-2}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial y^2}\Big); \end{aligned}$$

diese Funktion $F_n(x, y)$ ist im Kreise R normal und es gilt

$$N[F_n]_R \leqq \frac{1}{2^{n-1}} N[F_1]_R.$$

Für $n \geqq 1$ ist $v_n(x, y)$ die auf der Peripherie des Kreises R verschwindende Lösung der Gleichung $\Delta v_n = F_n$. Sie ist im Kreise R nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung normal, und es gilt

$$N[v_n]_R \leqq \lambda R^2 N[F_n]_R,\ N[D_1 v_n]_R \leqq \lambda R N[F_n]_R,\ N[D_2 v_n]_R \leqq \lambda N[F_n]_R.$$

Schließlich ist für $n \geqq 1$:

$$u_n = u_0 + v_1 + \ldots + v_n,$$

und es gilt:

$$N[u_n - z_0]_R,\ N\left[\frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0\right]_R,\ \ldots,\ N\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - t_0\right]_R < \varepsilon.$$

Da wir die beiden ersten Glieder dieser drei Funktionsreihen bereits gebildet haben, so genügt zu zeigen: Ist das Verfahren bis zu einem gewissen $n \geqq 2$ mit dem gewünschten Erfolge durchgeführt, so kann auch der folgende Schritt vollzogen werden. Dies ist unmittelbar einzusehen. Man bilde wieder erstens

$$F_{n+1}(x,y) = f\left(x, y, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right) - f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2}\right).$$

Nach Voraussetzung gilt . . . . . .

$$N[u_n - z_0]_R,\ N\left[\frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0\right]_R,\ \ldots,\ N\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - t_0\right]_R < \varepsilon,$$

$$N[u_{n-1} - z_0]_R,\ N\left[\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - p_0\right]_R,\ \ldots,\ N\left[\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} - t_0\right]_R < \varepsilon,$$

ferner ist auch $R < \varepsilon$. Wir dürfen also (81) mit $\delta = \varepsilon$ heranziehen. Es ist hiernach $F_{n+1}(x,y)$ im Kreise R normal und man hat

$$\begin{aligned} N[F_{n+1}]_R &\leqq k_2\left(N[v_n]_R + N\left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R + N\left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R\right) \\ &\quad + \varepsilon k_2\left(N\left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right]_R + N\left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y}\right]_R + N\left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}\right]_R\right) \\ &\leqq \lambda k_2 N[F_n]_R (R^2 + R + R + 3\varepsilon) \\ &\leqq 3\lambda k_2 (R+\varepsilon) N[F_n]_R < \frac{1}{2} N[F_n]_R < \frac{1}{2^n} N[F_1]_R, \end{aligned}$$

da wegen (77), (78) gewiß $3\lambda k_2 (R+\varepsilon) < \frac{1}{2}$ ist.

Nun wird $v_{n+1}(x,y)$ als die auf der Peripherie des Kreises R verschwindende Lösung der Gleichung $\Delta v_{n+1} = F_{n+1}$ bestimmt, die bezüglichen Aussagen folgen unmittelbar aus E_6. Schließlich bilden wir $u_{n+1} = u_0 + v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1}$ und erhalten

$$\begin{aligned} N[u_{n+1} - z_0]_R &\leqq N[u_0 - z_0]_R + N[v_1]_R + \ldots + N[v_{n+1}]_R \\ &\leqq 300\, MR + \lambda R^2 (N[F_1]_R + \ldots + N[F_{n+1}]_R) \\ &\leqq 300\, MR + \lambda (N[F_1]_R + \ldots + N[F_{n+1}]_R), \end{aligned}$$

. . . . . .

$$\begin{aligned} N\left[\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial y^2} - t_0\right]_R &\leqq N\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right]_R + N\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right]_R + \ldots + N\left[\frac{\partial^2 v_{n+1}}{\partial y^2}\right]_R \\ &\leqq 300\, MR + \lambda (N[F_1]_R + \ldots + N[F_{n+1}]_R). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &300\, MR + \lambda (N[F_1]_R + \ldots + N[F_{n+1}]_R) \\ &\leqq 300\, MR + \lambda N[F_1]_R \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) < 300\, MR + 2\lambda N[F_1]_R, \end{aligned}$$

und da, nach (105_*), $N[F_1]_R \leqq 300\,MR\,k_2$ ist, so ist dies weiter $\leqq 300\,MR(1+2\lambda k_2)$, also wegen (78) kleiner als ε, was gezeigt werden sollte. Damit ist die unbegrenzte Fortsetzbarkeit unseres Verfahrens erwiesen.

6. Wird nun

$$u = u_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

gesetzt, so können wir unmittelbar verifizieren, daß u allen Forderungen von Hilfssatz 2 genügt. Wir bemerken zunächst, daß die Glieder der Reihen

$$\begin{aligned} &u_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots, \\ &D_1 u_0 + D_1 v_1 + \ldots + D_1 v_n + \ldots, \\ &D_2 u_0 + D_2 v_1 + \ldots + D_2 v_n + \ldots \end{aligned} \tag{106}$$

nach ihrer Konstruktion im Kreise R normal sind, und wollen zeigen, daß auch die Reihen

$$\begin{aligned} &N[u_0]_R + N[v_1]_R + \ldots + N[v_n]_R + \ldots, \\ &N[D_1 u_0]_R + N[D_1 v_1]_R + \ldots + N[D_1 v_n]_R + \ldots, \\ &N[D_2 u_0]_R + N[D_2 v_1]_R + \ldots + N[D_2 v_n]_R + \ldots \end{aligned} \tag{107}$$

konvergieren. Wir haben

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} N[v_n]_R &\leqq \lambda R^2 \sum_{n=1}^{\infty} N[F_n]_R \\ &\leqq \lambda N[F_1]_R \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) \leqq 2\lambda N[F_1]_R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} N[D_1 v_n]_R \leqq \lambda R \sum_{n=1}^{\infty} N[F_n]_R \leqq 2\lambda N[F_1]_R, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} N[D_2 v_n]_R \leqq \lambda \sum_{n=1}^{\infty} N[F_n]_R \leqq 2\lambda N[F_1]_R, \end{aligned} \tag{108}$$

woraus die Konvergenz der Reihen (107) folgt. Auf Grund von E_5 ergibt sich weiter, daß die Reihen (106) im Kreise R gleichmäßig konvergieren, und daß ihre Summen in diesem Kreise normal sind. Es ist folglich u im Kreise R nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung normal, es ist

$$\begin{aligned} D_1 u &= D_1 u_0 + D_1 v_1 + \ldots + D_1 v_n + \ldots, \\ D_2 u &= D_2 u_0 + D_2 v_1 + \ldots + D_2 v_n + \ldots, \end{aligned}$$

und wir erhalten weiter unter Beachtung von (108):

$$N[u - z_0]_R \leqq N[u_0 - z_0]_R + \sum_{n=1}^{\infty} N[v_n]_R \leqq 300\,MR + 2\lambda N[F_1]_R,$$

$$N\left[\frac{\partial u}{\partial x} - p_0\right]_R \leqq N\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_R + \sum_{n=1}^{\infty} N\left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R \leqq 300\,MR + 2\lambda N[F_1]_R,$$

. . . . . .

$$N\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - t_0\right]_R \leqq N\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right]_R + \sum_{n=1}^{\infty} N\left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}\right]_R \leqq 300\,MR + 2\lambda N[F_1]_R.$$

Nun ist, nach (105_*), $N[F_1]_R \leqq 300\,MR\,k_2$, also nach (78):

$$300\,MR + 2\lambda N[F_1]_R \leqq 300\,MR(1 + 2\lambda k_2) < \varepsilon,$$

und damit sind die Ungleichungen

$$N[u - z_0]_R,\ N\Big[\frac{\partial u}{\partial x} - p_0\Big]_R,\ \ldots,\ N\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - t_0\Big]_R < \varepsilon_0$$

erwiesen, weil nämlich $\varepsilon < \varepsilon_0$ gewählt wurde.

Wir haben noch zu zeigen, daß u eine Lösung von (66) ist, und daß auf der Peripherie des Kreises $\zeta = u$ ist. Beides folgt sogleich aus dem Verfahren selbst; es war ja

$$\Delta u_0 = r_0 + t_0,$$

$$\Delta v_1 = f\Big(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\Big) - f(x_0, y_0, z_0, p_0, \ldots, t_0),$$

. . . . . .

$$\Delta v_n = f\Big(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2}\Big) - f\Big(x, y, u_{n-2}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial y^2}\Big).$$

Durch Addition ergibt sich, wegen $r_0 + t_0 = f(x_0, y_0, z_0, p_0, \ldots, t_0)$, die Beziehung

$$\Delta u_n = f\Big(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2}\Big). \tag{109}$$

Lassen wir hier n gegen unendlich gehen, so konvergiert die linke Seite, infolge der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen (106), gegen Δu, und die Argumente von f konvergieren gegen $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, also gegen eine Stelle im Stetigkeitsbereiche von f (vgl. die Abschätzungen für $N[u - z_0]_R$, $\ldots, N\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - t_0\Big]_R$). Wir dürfen also in (109) zur Grenze übergehen und erhalten die Gleichung

$$\Delta u = f\Big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big).$$

Schließlich war auf der Peripherie des Kreises R

$$u_0 = \zeta, \qquad v_1 = v_2 = \ldots = 0.$$

Also ist dort auch $u_n = u_0 + v_1 + \ldots + v_n = \zeta$, und da im abgeschlossenen Kreise u_n gleichmäßig gegen u konvergiert, so ist auf der Peripherie $\zeta = u$.

Damit ist Hilfssatz 2 begründet und der Beweis des Hilbertschen Theorems im Sinne des in Nr. 4 der Einleitung erklärten Gedankenganges zu Ende geführt.

7. Wenn die rechte Seite der Gleichung (66) von r, s, t frei ist, also die Gleichung wie folgt lautet:

$$r + t = \varphi(x, y, z, p, q),$$

so liegt der durch Lütkemeyer und Holmgren untersuchte Spezialfall vor. Die Lösung der Randwertaufgabe im Kleinen gestaltet sich hier wesentlich einfacher. Die Gleichungskette lautet

$$\Delta u_0 = r_0 + t_0,$$
$$\Delta v_1 = \varphi\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - \varphi(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),$$
$$\Delta v_2 = \varphi\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - \varphi\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man bemerkt, daß die zweiten Ableitungen von $u_0, u_1, \ldots, v_1, \ldots$ gar nicht abgeschätzt werden müssen. Dies hat einmal die Folge, daß es nicht nötig ist, die Existenz der dritten Ableitungen von $\zeta(x, y)$ vorauszusetzen; außerdem wird der auf die zweiten Ableitungen bezügliche Teil von E_6 nicht benützt. In diesem Spezialfalle kommt man also bereits mit den durch Picard eingeführten Normen durch, welche alle die Postulate E_1 bis E_6 erfüllen, bis auf denjenigen Teil von E_6, welcher sich auf die zweiten Ableitungen bezieht. Das Hilbertsche Theorem, in seiner allgemeinen Fassung, erfordert hingegen zu seinem Beweise die zugkräftigere S. Bernsteinsche Normbildung, welche auch die Beherrschung der zweiten Ableitungen gestattet; die wesentliche Schwierigkeit, die bei der Untersuchung des allgemeinen Hilbertschen Theorems im Sinne des Picardschen Gedankenganges zu überwinden ist, liegt also in der Konstruktion einer Funktionaloperation, welche die in Teil I, § 2 beschriebenen Eigenschaften E_1 bis E_6 besitzt.

Leipzig, Juni 1925.

(Eingegangen am 6. Juli 1925.)

Über das Archimedische Axiom.

Von

Georg Feigl in Berlin.

Einleitung.

Das Archimedische Axiom, das erste Stetigkeitsaxiom in dem Hilbertschen Axiomensystem der Geometrie, hat folgenden Wortlaut: *Es sei C_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man konstruiere die Punkte $C_2, C_3, C_4, \ldots$ so, daß C_1 zwischen A und C_2, C_2 zwischen C_1 und C_3, C_3 zwischen C_2 und C_4 usw. liegt und daß überdies die Strecken $AC_1, C_1C_2, C_2C_3, \ldots$ einander kongruent sind: Dann gibt es in der Folge der Punkte $C_2, C_3, \ldots$ stets einen solchen Punkt C_n, daß B zwischen A und C_n liegt*[1]).

Die erste Anwendung findet das Axiom beim Beweise des ersten Legendreschen Satzes über die Winkelsumme im Dreieck[2]), welcher, wie Dehn in seiner Dissertation[3]) gezeigt hat, ohne Benutzung des Archimedischen Axioms aus den drei ersten Axiomgruppen allein nicht bewiesen werden kann. Diese Anwendung des für Strecken formulierten Axioms bezieht sich jedoch auf Winkel. Im folgenden soll gezeigt werden: Wird das Archimedische Axiom für Strecken postuliert, so kann daraus der analoge Satz für Winkel, und zwar nur mit Hilfe der drei ersten Axiomgruppen, hergeleitet werden. Und umgekehrt: Wird der Winkelsatz vorausgesetzt, so läßt sich mit denselben Mitteln der Satz für Strecken

[1]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 5. Aufl. 1922, Kap. I, § 8, S. 21, 22. Das Axiom wird bei Hilbert mit der Nummer V 1 bezeichnet.

[2]) Dieser Satz sagt aus, daß in der durch die Hilbertschen Axiomgruppen I, II, III und das Archimedische Axiom V 1 charakterisierten Geometrie die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte nicht übertrifft; vgl. z. B. H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 3. Aufl. 1923, S. 15. Die Hilbertschen Axiomgruppen I, II, III sind die der Verknüpfung, Anordnung und Kongruenz (Hilbert, a. a. O. S. 2).

[3]) M. Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, Diss. Göttingen 1900.

beweisen. Der Strecken- und der Winkelsatz sind einander also durchaus gleichwertig.

Der Archimedische Satz für Winkel: Es sei k_1 ein beliebiger, vom Scheitel O des Winkels (g, h) ausgehender, im Innern des Winkels verlaufender Halbstrahl. Trägt man den Winkel (g, k_1) in O an den Halbstrahl k_1 nach derjenigen Seite der Ebene, welche den Halbstrahl g nicht enthält, bis zum Halbstrahl k_2 an; ferner denselben Winkel in O an k_2 nach derjenigen Seite der Ebene, welche k_1 nicht enthält, bis zum Halbstrahl k_3 an usw., so gibt es in der Folge der Halbstrahlen $k_2, k_3, \ldots$ einen Halbstrahl k_n, welcher außerhalb des Winkels (g, h) liegt.

Ein Winkel ist dabei wie üblich als Paar von einem Punkte ausgehender Halbstrahlen definiert; er zerlegt, wie aus den Axiomgruppen I und II folgt[4]), die Ebene in genau zwei Gebiete, deren eines — das Innere — dadurch ausgezeichnet ist, daß je zwei Punkte in bezug auf den Winkel durch eine einzige Strecke verbindbar sind; jeder vom Scheitel ausgehende, im Innern des Winkels verlaufende Halbstrahl schneidet jede Strecke, die zwei auf verschiedenen Schenkeln gelegene Punkte verbindet, in einem inneren Punkte.

Der Beweis des behaupteten Satzes ergibt sich unmittelbar, wenn man das zweite Stetigkeitsaxiom, das Vollständigkeitsaxiom[5]), hinzunimmt; aus diesem folgt mit Benutzung von V 1 der Satz vom Dedekindschen Schnitt[6]) und daraus weiterhin die Tatsache, daß jeder von einem inneren Punkte eines Kreises ausgehende Halbstrahl diesen Kreis in genau einem Punkte schneidet[7]). Schlägt man also um den Scheitel O des Winkels (g, h) einen Kreis, so wird er von den Halbstrahlen $g, h, k_1, k_2, \ldots$ in je einem Punkte $A, B, C_1, C_2, \ldots$ geschnitten. Der aus dem Satz vom Dedekindschen Schnitt wie üblich herzuleitende Satz von der oberen Grenze gestattet, jedem Kreisbogen eine Länge zuzuordnen und das Archimedische Streckenaxiom auch auf die Kreisbögen AB und AC_1 anzuwenden.

Hier soll nun ein Beweis für die Gleichwertigkeit des Archimedischen Strecken- und Winkelsatzes erbracht werden, bei dem — abgesehen von jeweils dem einen dieser beiden Sätze — nur von den Axiomgruppen I, II, III, aber nicht von dem Axiom V 2 Gebrauch gemacht wird. Die beim Beweise zu benutzenden Folgerungen aus I, II, III, die über die

---

[4]) Vgl. z. B. die Darstellung des Verf.: Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie, Jahresbericht der D. M. V., Band 33; § 2, Satz 10, S. 19.

[5]) Hilbert, a. a. O. S. 22; Axiom V 2.

[6]) Hilbert, a. a. O. S 23.

[7]) Q heißt innerer (bzw. äußerer) Punkt in bezug auf den Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, wenn $MQ < r$ (bzw. $MQ > r$) ist.

drei ersten Kongruenzsätze und den Satz von der Kongruenz je zweier rechter Winkel[8]) hinausgehen, sollen hier kurz zusammengestellt werden.

§ 1.

Hilfssätze.

(1) Von einem Punkte läßt sich auf eine Gerade ein und nur ein Lot fällen.

Die Existenz des vom Punkte P auf die Gerade a gefällten Lotes ergibt sich durch folgende Konstruktion[9]): Man verbinde P mit einem beliebigen Punkt A von a, trage den Winkel, den der Halbstrahl AP mit einem von A ausgehenden Halbstrahl a_1 der Geraden a bildet, in A an a_1 nach der entgegengesetzten Seite der Ebene an und bestimme auf dem freien Schenkel den Punkt P' so, daß $AP \equiv AP'$ ist. Die Gerade PP' ist das gesuchte Lot.

Um die Eindeutigkeit des Lotes zu beweisen, nehme man an, daß PA und PA' zwei von P auf a gefällte Lote sind, und trage die Strecke PA auf demjenigen von A ausgehenden Halbstrahl der Geraden PA, welcher P nicht enthält, bis zum Punkte Q an. Die Dreiecke PAA' und QAA' erfüllen, weil der Winkel PAA' als rechter seinem Nebenwinkel QAA' kongruent ist, die Voraussetzungen des Kongruenzaxioms der Dreiecke; mithin sind auch die Winkel $PA'A$ und $QA'A$ kongruent. Da $\sphericalangle PA'A$ nach Annahme ein rechter Winkel ist, so liegen — auf grund der Kongruenz je zweier rechter Winkel und auf grund des Axioms III 4 — die Punkte P, A', Q in gerader Linie. Aus der Annahme zweier von P auf a gefällter Lote folgt also, daß durch die Punkte P und Q zwei voneinander verschiedene gerade Linien PAQ und $PA'Q$ gelegt werden können. Da P und Q auf verschiedenen von A ausgehenden Halbstrahlen derselben Geraden gelegen sind und mithin niemals zusammenfallen können[10]), so ist ein Widerspruch gegen das Axiom I 2 hergestellt.

(2) Jeder Winkel besitzt eine und nur eine innere Winkelhalbierende.

Der vom Scheitel O des Winkels (g, h) ausgehende Halbstrahl k heißt innere Winkelhalbierende, wenn er im Innern des Winkels gelegen und wenn $\sphericalangle(g, k) \equiv \sphericalangle(k, h)$ ist. Die Existenz von k lehrt folgende Konstruktion: Man trägt von O aus auf g und h kongruente Strecken $OA \equiv OA'$, $OB \equiv OB'$ so ab, daß B zwischen O und A, B' zwischen O und A' liegt; die Strecken AB' und $A'B$ schneiden einander in einem

---

[8]) Hilbert, a. a. O. S. 14—18; § 6, Satz 11, 12, 16, 17.

[9]) H. Liebmann, Nichteuklid. Geom., 2. Aufl. 1912, S. 7.

[10]) Vgl. die angeführte Darstellung des Verf., Satz 8, S. 7. Dieser Schluß versagt in der elliptischen Geometrie; dort gilt auch der Satz 1 nicht.

inneren Punkte C. OC ist der gesuchte Halbstrahl und zugleich Mittelsenkrechte der Basis AA' im gleichschenkligen Dreieck OAA'. Daraus folgt nach (1) die Eindeutigkeit.

(3) Jede Strecke besitzt einen und nur einen Mittelpunkt.

C heißt Mittelpunkt der Strecke AB, wenn C zwischen A und B gelegen und wenn $AC \equiv CB$ ist. Der Satz ist bewiesen, wenn man über der Basis AB ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren kann: Man lege durch A einen beliebigen Halbstrahl h und verbinde B mit einem beliebigen Punkt D von h. Sind $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ einander kongruent, so ist die Konstruktion beendet; wenn nicht, so suche man den kleineren der beiden Winkel auf. Ist $\sphericalangle A < \sphericalangle B$,[11]) so trage man $\sphericalangle A$ in B an den Halbstrahl BA nach der durch D bestimmten Seite der Ebene bis zum Halbstrahl h' an. h' verläuft im Innern von $\sphericalangle B$ und schneidet daher die Strecke AD in einem inneren Punkte E. Das Dreieck ABE ist gleichschenklig.

(4) Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder Innenwinkel, welcher nicht sein Nebenwinkel ist. — Der Beweis operiert mit (3) und dem Axiom II 3[12]). Aus (4) folgt sofort:

(5) Zwei Geraden, die mit einer dritten kongruente Wechselwinkel bilden, schneiden einander nicht.

Unmittelbare Folgerungen aus (4) sind ferner die Ungleichheitsbeziehungen im Dreieck:

(6) Die Summe je zweier Winkel ist kleiner als zwei Rechte. Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber und umgekehrt. Die Summe je zweier Seiten ist größer als die dritte[12]).

(7) Der vierte Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Ist $AB \equiv A'B'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ vorausgesetzt, so genügt es, die Kongruenz von AC und $A'C'$ zu beweisen. Die Annahme $A'C' < AC$ führt sofort zum Widerspruch gegen (4), wenn man $A'C'$ von A auf dem Halbstrahl AC bis zum Punkte C'' abträgt. Da C'' zwischen A und C

---

[11]) Von zwei Strecken $A'B'$ und AB heißt $A'B'$ die kleinere, wenn man bei Abtragung der Strecke $A'B'$ von A auf dem Halbstrahl AB zu einem inneren Punkte B'' der Strecke AB gelangt. Analog lautet die Definition für Winkel: Man trage den Winkel (g', h') im Scheitel des Winkels (g, h) an den Halbstrahl g nach der durch h bestimmten Seite der Ebene bis zum Halbstrahl h'' an. Liegt h'' im Innern von $\sphericalangle (g, h)$, so heißt $\sphericalangle (g', h') < \sphericalangle (g, h)$. Diese Ordnungsbeziehung ist für Strecken und für Winkel selbstverständlich asymmetrisch und transitiv. Ein Winkel heißt spitz (stumpf), wenn er kleiner (größer) als ein Rechter ist.

[12]) H. Liebmann, a. a. O., 2. Aufl., S. 7, 8.

liegt, so ist $\sphericalangle AC''B$ Außenwinkel des Dreiecks $CC''B$; aber andererseits ist $\sphericalangle AC''B \equiv \sphericalangle C$.

Den allgemein bekannten Hilfssätzen (1) bis (7) wird ein weiterer Hilfssatz hinzugefügt, der im folgenden das wichtigste Beweismotiv bildet:

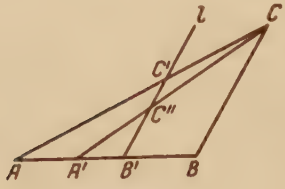


Fig. 1.

(8) *Ist ABC ein Dreieck, ist B' zwischen A und B gelegen und trägt man $\sphericalangle B$ in B' an $B'A$ nach der durch C bestimmten Seite der Ebene bis zum Halbstrahl l an, so schneidet l die Seite AC in einem inneren Punkte C', und es ist $B'C' < BC$.* (Fig. 1.)

Die den Halbstrahl l tragende Gerade, die nach Voraussetzung die Seite AB innen und nach (5) die Gerade BC überhaupt nicht schneidet, geht nach II 4 durch einen inneren Punkt C' von AC. C' liegt auf dem Halbstrahl l, wie aus der Definition von l ohne weiteres hervorgeht. Den zweiten Teil der Behauptung, die Beziehung $B'C' < BC$, beweist man indirekt, indem man die Unmöglichkeit der Beziehungen $B'C' \equiv BC$ und $B'C' > BC$ darlegt. Unter der Annahme $B'C' \equiv BC$ erfüllen die Dreiecke $AB'C'$ und ABC die Voraussetzungen von (7): $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle B' \equiv \sphericalangle B$, $B'C' \equiv BC$. Da aber B' zwischen A und B gelegen ist, so ist $AB' < AB$ und nicht $AB' \equiv AB$. Unter der Annahme $B'C' > BC$ kann man die Strecke BC von B' aus auf dem Halbstrahl $B'C'$ bis zu einem inneren Punkte C'' der Strecke $B'C'$ abtragen. Die Gerade CC'' geht durch einen inneren Punkt A' der Strecke AB', wie die Anwendung von II 4 auf das Dreieck $AB'C'$ und die Transversale CC'' lehrt. Da A' zwischen A und B', B' zwischen A und B gelegen ist, so liegt B' zwischen A' und B[13]), d. h.: es ist $A'B' < A'B$. Andererseits sind in den Dreiecken $A'B'C''$ und $A'BC$ wiederum die Voraussetzungen von (7). erfüllt ($\sphericalangle A' \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B' \equiv \sphericalangle B$, $B'C'' \equiv BC$), so daß $A'B' \equiv A'B$ sein müßte[14]).

§ 2.

Beweis des Archimedischen Satzes für Winkel.

Es seien g, h, k_1 drei vom Punkte O ausgehende Halbstrahlen, von denen k_1 im Innern von $\sphericalangle(g, h)$ verläuft[15]); l sei die innere Winkel-

[13]) Auf grund der Transitivität der Zwischenbeziehung; vgl. die angeführte Darstellung des Verf., Satz 2, S. 4.

[14]) Über die Winkel bei C und C' kann in (8) natürlich keine Aussage gemacht werden.

[15]) g und h sollen nicht Halbstrahlen einer und derselben Geraden sein.

halbierende von $\sphericalangle(g, h)$. Man bezeichne den Winkel (g, k_1) abkürzend mit $\mathfrak{w}$. Durch die früher beschriebene sukzessive Abtragung von $\mathfrak{w}$ erhält man die Halbstrahlen $k_2, k_3, \ldots$. Man bestimmt auf g und h die Punkte C und D so, daß $OC \equiv OD$ ist, und erhält auf der Geraden $CD = a$ durch den Schnitt mit l den Mittelpunkt M der Strecke CD, durch den Schnitt mit den Halbstrahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ die Folge der Punkte $C_1, C_2, C_3, \ldots$. Auf diese ist das Archimedische Axiom nicht anwendbar, da die Strecken $CC_1, C_1C_2, C_2C_3, \ldots$ nicht zueinander kongruent sind.

Es soll nun gezeigt werden, daß es in der Menge der Strecken, die von dem Winkel $\mathfrak{w}$ auf der Geraden a ausgeschnitten werden, eine kleinste gibt. Diese Minimalstrecke AB erhält man, wenn man den Winkel $\frac{1}{2}\mathfrak{w}$ [16]) in O nach beiden Seiten an den Halbstrahl l anträgt. Ist also PQ eine beliebige von $\mathfrak{w}$ auf a ausgeschnittene, von AB verschiedene Strecke, so ist zu beweisen:

$$AB < PQ. \tag{9}$$

Der Beweis von (9) ist verschieden zu führen, je nachdem die beiden Punktepaare A, B und P, Q einander trennen oder nicht trennen.

1. Betrachtet man zunächst den letzteren Fall (Fig. 2), so können wegen der Kongruenz der Winkel AOB und POQ die Punkte P, Q nicht auf verschiedenen von A ausgehenden Halbstrahlen der Geraden a gelegen sein. Die Annahme, daß B, P, Q demselben von A ausgehenden Halbstrahl angehören und daß P zwischen B und Q liegt, beschränkt die Allgemeinheit nicht. Ist W derjenige innere Punkt der Strecke PQ, der auf der Halbierenden des Winkels POQ gelegen ist, so ist $\sphericalangle OWQ$ als Außenwinkel des bei M rechtwinkligen Dreiecks OMW nach (4) ein stumpfer Winkel. Errichtet man also in W auf WO die Senkrechte, so schneidet sie die Strecke OQ in einem inneren Punkte T. Da von den Strecken OM und OW die letztere als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks OMW nach (6) die größere ist, so gelangt man bei Abtragung der Strecke OM von O aus auf dem Halbstrahl OW zu einem inneren Punkte M' der Strecke OW. Errichtet man auch in M' die Senkrechte auf OW, so schneidet sie nach (8) die Strecke OT in einem inneren Punkte B', und es ist $M'B' < WT$. Andererseits ist $\sphericalangle OTW$ ein spitzer und folglich der Nebenwinkel QTW ein stumpfer Winkel. Daraus folgt nach (6) die Beziehung $WT < WQ$. Schließlich sind die Dreiecke OMB und $OM'B'$ kongruent ($\sphericalangle M \equiv \sphericalangle M' \equiv 1$ Rechter, $OM \equiv OM'$, $\sphericalangle MOB \equiv \sphericalangle M'OB' \equiv \frac{1}{2}\mathfrak{w}$),

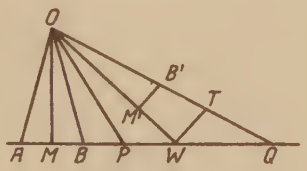


Fig. 2.

[16]) Die Existenz und Eindeutigkeit des halben Winkels ist durch (2) gesichert.

so daß $MB \equiv M'B'$ ist. Also ist schließlich $MB < WQ$. Analog verläuft, unter Benutzung der Stumpfwinkligkeit des Dreiecks OPW, der Beweis der Beziehung $AM < PW$. Da M zwischen A und B, W zwischen P und Q liegt, so liefern die beiden Beziehungen $AM < PW$, $MB < WQ$ zusammen die Behauptung (9).

Man kann den Beweis von (9) in diesem Fall durch Anwendung von (8) ohne Einschaltung des Hilfspunktes W nicht führen. Es ist $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle OBM < 1$ Rechter $< \sphericalangle OPQ$ und $OA < OP$. Man kann also zwischen O und P den Punkt A'' so bestimmen, daß $OA \equiv OA''$ ist. Trägt man den Winkel OAM in P an PO und in A'' an $A''O$ jedesmal nach der durch Q bestimmten Seite der Ebene an, so erhält man in P einen Halbstrahl, der die Strecke OQ innen in U, und in A'' einen Halbstrahl, der OU innen in B'' schneidet, und es ist: $AB \equiv A''B''$, $A''B'' < PU$. Da aber $\sphericalangle OPU$ spitz ist und da andererseits aus der Kongruenz der drei Winkel $OA''B''$, $OB''A''$, OPU im allgemeinen nichts über den Winkel OUP gefolgert werden kann, so kann man über den Winkel QUP keine Aussage machen und zwischen den Strecken PU und PQ keine Beziehung herstellen.

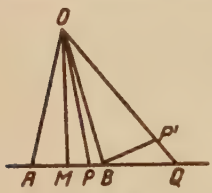


Fig. 3.

2. Trennen die Punktepaare A, B und P, Q einander (Fig. 3), so kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit P zwischen A und B, B zwischen A und Q annehmen. Da unter dieser Festsetzung die Strecken AB und PQ das Stück PB gemeinsam haben, so reduziert sich der Beweis von (9) auf den der Beziehung

$$(9') \qquad AP < BQ.$$

Ferner ist auf grund dieser Festsetzung der Winkel OBQ stumpf; denn sein Nebenwinkel OBM ist als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck OAB spitz und als solcher überdies dem Winkel OAM kongruent. Trägt man also $\sphericalangle OAM$ in B an BO nach der durch Q bestimmten Seite der Ebene hin an, so schneidet der freie Schenkel die Strecke OQ in dem inneren Punkte P', und es sind die Dreiecke OAP und OBP' kongruent. Daraus folgt: $AP \equiv BP'$. Um weiter schließen zu können, braucht man die Tatsache, daß $\sphericalangle OP'B$ nicht stumpf ist. Dies tritt ein, wenn P zwischen M und B oder in M gelegen ist. Dann ist der Nebenwinkel $QP'B$ von $\sphericalangle OP'B$ nicht spitz und mithin nach (6): $BP' < BQ$, so daß (9') erfüllt ist.

Liegt P schließlich zwischen A und M (Fig. 4), so ist $\sphericalangle OPM$ spitz und $\sphericalangle OPA$ stumpf, so daß $OP < OA$ und somit auch $OP < OB$ ist. Andererseits ist $\sphericalangle OBQ$ einem Außenwinkel des Dreiecks OAP kongruent: $\sphericalangle OBQ > \sphericalangle OPA$. Man kann also den Punkt P'' zwischen O

und B so bestimmen, daß $OP'' \equiv OP$ ist, und gelangt, wenn man den Winkel OPA in B an BO und in P'' an $P''O$ nach der durch Q bestimmten Seite der Ebene anträgt, auf der Strecke OQ zum inneren Punkte V und auf der Strecke OV zum inneren Punkte A''. Aus der Kongruenz der Dreiecke OPA, $OP''A''$ und aus (8) folgen die Beziehungen: $AP \equiv P''A'' < BV$. Da $\sphericalangle OBV$ nach Konstruktion dem stumpfen Winkel OPA kongruent ist, so ist $\sphericalangle OVB$ spitz, $\sphericalangle QVB$ stumpf, und man kann die zum Beweise von (9′) in diesem Fall noch fehlende Relation $BV < BQ$ aufstellen. Damit ist der Satz (9) vollständig bewiesen.

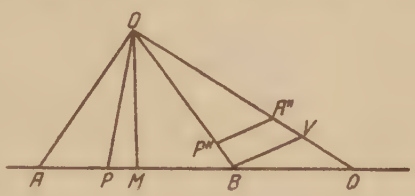


Fig. 4.

Als Korollar zu (9) ergibt sich: Ist auf der Geraden a die Strecke RS der Strecke AB kongruent, so ist

$$\sphericalangle ROS < \sphericalangle AOB. \tag{10}$$

Nunmehr bestimme man auf der Geraden CD die Folge der Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ so, daß A_1 zwischen C und A_2, A_2 zwischen A_1 und A_3, A_3 zwischen A_2 und A_4 usw. gelegen ist und daß überdies die Strecken $CA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ sämtlich der Minimalstrecke AB kongruent sind. Nach dem Archimedischen Axiom V 1 gibt es in der Folge der Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ einen Punkt A_n, der außerhalb der Strecke CD, und also auch einen letzten Punkt A_m, der innerhalb der Strecke CD gelegen ist. Bezeichnet i_ν den Halbstrahl OA_ν, so ist i_m in der Folge der Halbstrahlen $i_1, i_2, i_3, \ldots$ der letzte, der innerhalb von $\sphericalangle(g, h)$ gelegen ist. Nach (10) kann keiner der Winkel $A_\nu OA_{\nu+1}$ den Winkel $\mathfrak{w}$ übertreffen. Durch diese Tatsache erfährt die Lage des zu i_m gehörenden Halbstrahls k_m noch keine Beschränkung; er kann also noch jede der drei folgenden Lagen annehmen:

1. k_m außerhalb von $\sphericalangle(g, h)$;
2. k_m innerhalb von $\sphericalangle(i_m, h)$ oder identisch mit h;
3. k_m innerhalb von $\sphericalangle(g, i_m)$ oder identisch mit g oder i_m.

Im ersten Fall hat k_m bereits die im Hauptsatze behauptete Lage. Im zweiten Fall trage man in O an k_m nach derjenigen Seite der Ebene, welche k_{m-1} nicht enthält, den Winkel $\mathfrak{w}$ bis zum Halbstrahl k_{m+1} an. Da $\sphericalangle(k_m, h) < \sphericalangle(i_m, h) < \mathfrak{w} = \sphericalangle(k_m, k_{m+1})$ ist, so liegt k_{m+1} jedenfalls außerhalb $\sphericalangle(g, h)$. Der dritte Fall tritt dadurch ein, daß die Halbstrahlen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ zusammen mindestens einen vollen Umlauf um den Punkt O ausführen. Auch dann gibt es einen Halbstrahl k_p mit $1 < p < m$, welcher außerhalb $\sphericalangle(g, h)$ gelegen ist: k_m liegt nämlich nicht

außerhalb von $\sphericalangle(g, i_m)$, während k_1 nach (10) außerhalb von $\sphericalangle(g, i_1)$ gelegen ist. Ist k_p der erste der Halbstrahlen $k_1, k_2, \ldots, k_m$, welcher nicht außerhalb des zugehörigen Winkels (g, i_p) gelegen ist, so ist $p > 1$. Es existiert also der Halbstrahl k_{p-1}; dieser liegt außerhalb des Winkels (g, i_{p-1}), und zwar gehören k_{p-1} und i_{p-1} in bezug auf die den Halbstrahl g tragende Gerade verschiedenen Halbebenen an. Dann aber liegt k_{p-1} außerhalb des Winkels (g, h). — Damit ist der Archimedische Satz für Winkel bewiesen.

§ 3.

Beweis der Umkehrung.

Auch die Umkehrung soll bewiesen werden: Wird der Archimedische Satz für Winkel vorausgesetzt, so kann der Satz für Strecken — das Hilbertsche Axiom V 1 — und zwar wiederum nur unter Benutzung der Axiomgruppen I, II, III bewiesen werden.

Sei A, B; $C_1, C_2, C_3, \ldots$ ein System von Punkten, welches unter den früher gewählten Bezeichnungen den Voraussetzungen von V 1 genügt. Ist M der Mittelpunkt[17]) der Strecke AB und l die in M auf der Geraden $a = AB$ errichtete Senkrechte, so werde ein beliebiger, von M verschiedener Punkt O von l mit den Punkten A, B; $C_1, C_2, C_3, \ldots$ verbunden. Bezeichnet man die Halbstrahlen OA und OB mit g und h, so liegen die Halbstrahlen $OC_1, OC_2, \ldots$ zwar sämtlich im Innern von $\sphericalangle(g, h)$, doch sind die Winkel $AOC_1, C_1OC_2, \ldots$ nach (10) nicht zueinander kongruent; der vorausgesetzte Winkelsatz ist also zunächst nicht anwendbar. Man trage nun die Strecke AC_1 von A und B aus auf den die Strecke AB nicht enthaltenden Halbstrahlen der Geraden a bis zu den Punkten D und E ab. Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks OAB ist dann der Winkel AOD kongruent dem Winkel BOE; er werde abkürzend mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet. Ist PQ eine auf a gelegene, zu AC_1 kongruente Strecke, von der mindestens ein Eckpunkt innerhalb der Strecke AB gelegen ist, so ist:

$$\sphericalangle AOD < \sphericalangle POQ. \tag{11}$$

Beim Beweise von (11) sind die beiden Fälle zu unterscheiden, daß der Punkt M innerhalb oder nicht innerhalb der Strecke PQ gelegen ist.

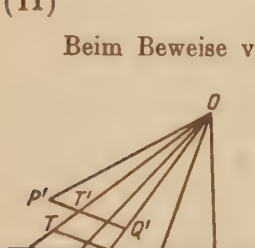


Fig. 5.

1. Im letzteren Fall (Fig. 5) läßt sich die Lage von P und Q ohne wesentliche Einschränkung so fixieren: P zwischen D und M, Q zwischen A und M oder in M. Dann ist nach (4) und (6):

$$\sphericalangle OAD > \sphericalangle OQA \geqq 1 \text{ Rechter}, \quad OA > OQ.$$

[17]) Vgl. (3).

Also läßt sich Q' zwischen O und A so bestimmen, daß $OQ \equiv OQ'$ ist. Trägt man $\sphericalangle OQA$ in A an AO und in Q' an $Q'O$ nach der durch D bestimmten Seite der Ebene an, so erhält man als Schnittpunkte der freien Schenkel mit der Geraden OD den Punkt T zwischen O und D sowie den Punkt T' zwischen O und T, und es ist nach (8): $Q'T' < AT$. Da $\sphericalangle OAT$ nicht spitz ist, so ist $\sphericalangle OTA$ nicht stumpf und der Nebenwinkel DTA nicht spitz; folglich ist nach (6) $AT < AD$. Mithin ist $Q'T' < AD \equiv AC_1 \equiv PQ$. Trägt man nun die Strecke PQ von Q' aus auf dem Halbstrahl $Q'T'$ ab bis P', so muß P' außerhalb der Strecke $Q'T'$ und somit außerhalb des Winkels DOA gelegen sein, d. h. $\sphericalangle P'OQ' > \sphericalangle DOA$. Da andererseits die auf grund der Konstruktion bestehende Kongruenz der Dreiecke POQ und $P'OQ'$ die Kongruenz der Winkel POQ und $P'OQ'$ nach sich zieht, so ist (11) in diesem Fall bewiesen.

2. Liegt M zwischen P und Q (Fig. 6), so ist aus dem beim Beweise von (9) angegebenen Grunde auf der Strecke PQ ein Hilfspunkt einzuschalten, als der der Punkt M gewählt werde. Da (in den am Anfang dieses Paragraphen gewählten Bezeichnungen) die Strecken PQ, DA und BE untereinander kongruent sind, so lassen sich der Punkt M' zwischen D und A sowie der Punkt M'' zwischen B und E so angeben, daß $DM' \equiv PM$, $M'A \equiv MQ$ und $BM'' \equiv MQ$, $M''E \equiv PM$ ist. Durch Anwendung des soeben beim ersten Fall angewendeten Verfahrens ergibt sich unmittelbar $\sphericalangle DOM' < \sphericalangle POM$ und wegen der Symmetrie der Figur in bezug auf die Gerade OM: $\sphericalangle M'OA \equiv \sphericalangle BOM'' < \sphericalangle MOQ$. Die Zusammenfassung dieser Ungleichungen liefert die Beziehung (11), die damit vollständig bewiesen ist.

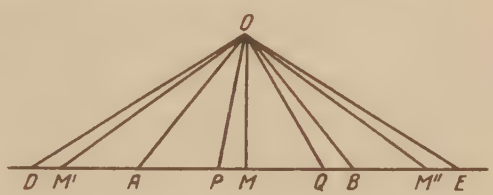


Fig. 6.

Ein Korollar zu (11) ist: Bezeichnet RS eine beliebige durch den Winkel $\mathfrak{v}$ auf der Geraden AB ausgeschnittene Strecke, von der mindestens ein Endpunkt zwischen A und B liegt, so ist

$$RS < AD. \tag{12}$$

Man trage nun $\sphericalangle DOA \equiv \mathfrak{v}$ in O an g nach der durch h bestimmten Seite der Ebene bis zum Halbstrahl i_1 an; i_1 gehört, da nach (11) $\sphericalangle DOA < \sphericalangle AOC_1$ ist, jedenfalls dem Innern von $\sphericalangle(g, h)$ an. Wenn man den Winkel $\mathfrak{v}$ fortgesetzt nach der früher angegebenen Vorschrift anträgt, so entsteht die Folge der Halbstrahlen $i_1, i_2, i_3, \ldots$, die in bezug auf den Winkel (g, h) den Voraussetzungen des Archimedischen Satzes für Winkel genügt. Also gibt es in der Folge $i_1, i_2, i_3, \ldots$ einen ersten

Halbstrahl i_{m+1}, der außerhalb von $\sphericalangle(g, h)$ gelegen ist. Da $\sphericalangle(i_m, i_{m+1}) \equiv \mathfrak{v} \equiv \sphericalangle BOE$ ist und da i_m noch in das Innere von $\sphericalangle(g, h)$ oder auf den Halbstrahl h fällt, so muß i_{m+1} innerhalb von BOE verlaufen oder mit dem Halbstrahl BE identisch sein. i_{m+1} schneidet daher die Gerade AB gewiß und zwar entweder zwischen B und E oder in E. Da ferner die Halbstrahlen $i_1, i_2, \ldots, i_m$ die Strecke AB sämtlich innen schneiden (i_m kann speziell auch durch B selbst hindurchgehen), so existieren die Punkte $F_1, F_2, \ldots, F_m, F_{m+1}$ als Schnittpunkte der Halbstrahlen $i_1, i_2, \ldots, i_m, i_{m+1}$ mit der Geraden AB. Die Strecken $AF_1, F_1F_2, \ldots$ haben die in V 1 vorausgesetzte Anordnung, doch sind sie nicht zueinander kongruent. Da aber jede der Strecken $AF_1, F_1F_2, \ldots$ nach (12) kleiner ist als die gegebene Strecke AC_1, so liegt jeder Punkt F_ν zwischen A und C_ν. Da ferner F_{m+1} als erster in der Folge der Punkte F_ν außerhalb der Strecke AB gelegen ist, so liegt C_{m+1} a fortiori außerhalb der Strecke AB. Damit ist das Axiom V 1 aus dem Archimedischen Winkelsatz und zugleich die behauptete Gleichwertigkeit dieser beiden Sätze bewiesen.

§ 4.

Schlußbemerkungen.

Der Archimedische Winkelsatz, der in der hier gebrauchten Fassung eine Aussage über das Innere eines Winkels enthält, läßt sich zu einer Aussage über die Halbebene erweitern:

Satz: *Es seien g, g', k_1 drei von einem Punkte ausgehende Halbstrahlen, von denen zwei — g und g' — in einer Geraden a liegen, ohne identisch zu sein. Trägt man den Winkel (g, k_1) in O an den Halbstrahl k_1 nach derjenigen Seite der Ebene, welche den Halbstrahl g nicht enthält, bis zum Halbstrahl k_2 an; ferner denselben Winkel in O an k_2 nach derjenigen Seite der Ebene, welche k_1 nicht enthält, bis zum Halbstrahl k_3 an usw., so gibt es in der Folge der Halbstrahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ einen solchen Halbstrahl k_n, daß k_1 und k_n in bezug auf die Gerade a verschiedenen Halbebenen angehören.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch zweimalige Anwendung des Winkelsatzes, indem man durch O einen solchen Halbstrahl h legt, daß k_1 dem Innern des Winkels (g, h) angehört. Dann gibt es in der Folge $k_1, k_2, \ldots$ einen Halbstrahl k_p, der außerhalb von $\sphericalangle(g, h)$ gelegen ist. Gehören k_p und k_1 in bezug auf a verschiedenen Halbebenen an, so ist der Satz bewiesen. Fällt k_p mit g' zusammen, so trage man $\sphericalangle(g, k_1)$ in O an g' noch einmal an und zwar nach derjenigen Seite der Ebene, welche h nicht enthält. Liegt k_p im Innern von $\sphericalangle(h, g')$, so wende man den Winkelsatz nochmals an auf den Winkel (h, g') und auf die Teil-

folge $k_p, k_{p+1}, \ldots$: In dieser gibt es dann einen ersten Halbstrahl k_m $(m \geqq p)$ von der Beschaffenheit, daß k_{m+1} außerhalb $\sphericalangle(h, g')$ gelegen ist. Da $\sphericalangle(g, k_1) \equiv \sphericalangle(k_m, k_{m+1})$ ist, so sind k_{m+1} und k_1 in bezug auf a gewiß in verschiedenen Halbebenen gelegen.

Daß der Winkelsatz sich auf das Äußere eines Winkels nicht ausdehnen läßt, ist unmittelbar an dem folgenden Beispiel ersichtlich: Die Halbstrahlen k_1 und k_2 seien die Schenkel eines rechten Winkels mit dem Scheitel O; g und h seien zwei von O ausgehende, im Innern dieses rechten Winkels gelegene Halbstrahlen. Dann gehört in der Folge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ kein Halbstrahl dem Innern von $\sphericalangle(g, h)$ an. Verläßt man schließlich die axiomatisch-geometrische Betrachtungsweise und führt man die euklidische Winkelmessung ein, die außer den bisher benutzten Axiomen I, II, III, V 1 auch die Voraussetzung des Parallelenaxioms IV und des Vollständigkeitsaxioms V 2 erfordert[18]), so erkennt man: Der Archimedische Satz ist für Winkel vom absoluten Betrage $\leqq \pi$ allgemein richtig, für Winkel vom absoluten Betrage $> \pi$ dagegen nicht. Im letzteren Fall würde der Satz allgemeine Gültigkeit nur erhalten, wenn man auch Winkel vom absoluten Betrage $\geqq 2\pi$ zuläßt, wenn man also statt der Ebene die Riemannsche Fläche des Logarithmus betrachtet, deren Windungspunkt der Scheitel des Winkels (g, h) ist.

[18]) Es werden also alle Axiome der euklidischen Geometrie vorausgesetzt, so daß die analytische Geometrie wie gewöhnlich durchgeführt werden kann. Von diesem Standpunkt ist die Aussage des Archimedischen Satzes trivial. Vgl. die Bemerkung am Schluß der Einleitung.

(Eingegangen am 20. Juli 1925.)

Über Symmetrisierung konvexer Gebilde.

Von

Konrad Zindler in Innsbruck.

§ 1.

Einleitung.

Wenn ein ebener konvexer Bereich B bezüglich einer Achse a symmetrisiert wird und dadurch B^* entsteht, wenn ferner L und L^* die Längen der Umfänge von B und B^* sind, so ist:

$$L \geqq L^*, \tag{1}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn schon B bezüglich einer Achse der Richtung a symmetrisch war (wo dann $B^* \cong B$ ist). Wenn analog ein konvexer Körper K bezüglich einer Ebene E symmetrisiert wird und dadurch K^* entsteht, wenn ferner F und F^* die Oberflächen von K und K^* sind, so ist ebenso

$$F \geqq F^* \tag{2}$$

mit analoger Beschränkung für das Gleichheitszeichen. Diese Sätze stammen von J. Steiner[1]), dessen Beweis jedoch nicht vollständig ist[2]).

Wir wollen die Differenz $L - L^*$ in Form eines Integrals darstellen, von dem unmittelbar ersichtlich ist, daß es nur im erwähnten Sonderfall verschwindet. Die analoge Betrachtung im Raum wird eine untere Schranke für $F - F^*$ ergeben, die (außer im analogen Sonderfall) von Null verschieden und positiv ist.

---

[1]) Ges. Werke II, S. 80, 266 (für die Ebene) und II, S. 88, 302 (für den Raum).

[2]) Vgl. W. Blaschke, Kreis und Kugel (Leipzig 1916), wo die nötigen Ergänzungen gegeben sind.

§ 2.

Ebene konvexe Bereiche.

Es sei ABC ein Dreieck, das bezüglich einer Achse symmetrisiert wird, die zu AB senkrecht steht. Das symmetrisierte Dreieck hat dann die Form ABC^* (Fig. 1); die Dreieckswinkel bei C und C^* seien

$$\gamma = 2\vartheta, \quad \gamma^* = 2\vartheta^*$$

und es ist:

$$\vartheta^* \geqq \vartheta, \tag{3}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn beide Dreiecke identisch sind. Ferner sei

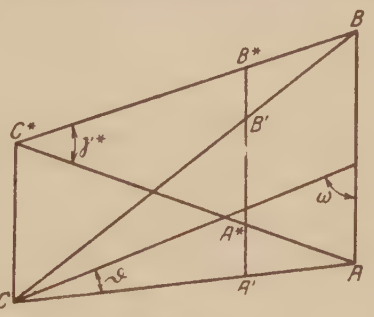


Fig. 1.

$$AB = l, \quad AC = \varrho_1, \quad CB = \varrho_2,$$
$$AC^* = BC^* = \varrho^*,$$
$$\varrho_1 + \varrho_2 = s, \quad 2\varrho^* = s^*, \quad ABC = ABC^* = f.$$

Dann findet man aus dem Kosinussatz:

$$\begin{aligned} s^2 &= l^2 + 2\varrho_1\varrho_2(1+\cos\gamma), \\ s^{*2} &= l^2 + 2\varrho^{*2}(1+\cos\gamma^*). \end{aligned} \tag{4}$$

Mit Benützung von

$$f = \frac{1}{2}\varrho_1\varrho_2\sin\gamma = \frac{1}{2}\varrho^{*2}\sin\gamma^*$$

folgt aus (4):

$$s - s^* = \frac{4f(\cot\vartheta - \cot\vartheta^*)}{s+s^*}. \tag{5}$$

Wenn wir nun durch eine Gerade $g \parallel AB$ von beiden Dreiecken zwei Trapeze abschneiden (Fig. 1) und

$$A'B' = A^*B^* = \lambda, \quad AA' + BB' = \sigma, \quad AA^* + BB^* = \sigma^*, \quad \frac{\lambda}{l} = \mu$$

setzen, so erhalten wir durch zweimalige Anwendung von (5) und Subtraktion:

$$\sigma - \sigma^* = \frac{4f(1-\mu)}{s+s^*}(\cot\vartheta - \cot\vartheta^*) = \frac{2lh}{s+s^*}(\cot\vartheta - \cot\vartheta^*), \tag{6}$$

wobei h die Höhe der Trapeze ist. Wenn nun ω einer der Winkel ist, den die Winkelhälftende von γ mit AB bildet, so findet man durch Anwendung des Sinussatzes

$$\frac{l}{s+s^*} = \frac{\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta^*}{\sin\vartheta + \sin\omega\cdot\sin\vartheta^*}, \tag{7}$$

daher:

$$\sigma - \sigma^* = \frac{2\sin(\vartheta^* - \vartheta)}{\sin\vartheta + \sin\omega\cdot\sin\vartheta^*}\cdot h. \tag{8}$$

Es bestätigt sich wegen (3), daß die rechte Seite nie negativ werden kann, da die Winkel ϑ und ϑ^* spitz sind. Zwischen den drei Winkeln besteht noch eine Beziehung:

$$\operatorname{tg}\vartheta^* = \frac{1}{2}[\cot(\omega - \vartheta) - \cot(\omega + \vartheta)]. \tag{9}$$

Geht man nun zu einem Polygon P mit dem Umfang U über und betrachtet daneben das bezüglich a symmetrisierte Polygon P^* mit dem Umfang U^*, so ziehe man durch alle Ecken von P die Senkrechten auf a, wodurch P in Trapeze zerlegt wird, unter denen zwei Dreiecke und ein Spatheck (Parallelogramm) auftreten können. Wenn wir die Symbole $\vartheta, \vartheta^*, \omega, h$ durch Indizes $1, \ldots, n$ für die einzelnen Trapeze vervielfältigen, erhalten wir aus (8):

$$U - U^* = 2\sum_1^n \frac{\sin(\vartheta_\nu^* - \vartheta_\nu)}{\sin\vartheta_\nu + \sin\omega_\nu\cdot\sin\vartheta_\nu^*}\cdot h_\nu. \tag{10}$$

Dabei ist, im Falle ein Spatheck auftritt, die Summe nur auf die übrigen Trapeze zu erstrecken und für das Spatheck noch das Glied

$$2h\left(\frac{1}{\sin\omega} - 1\right) \tag{11}$$

besonders hinzuzufügen, wenn ω ein Winkel des Spathecks ist und h seine Breite.

Wenn nun C eine ebene, geschlossene konvexe Kurve mit der Länge L ist, so legen wir die zur Symmetrisierungsachse a senkrechten Stützgeraden, wählen die eine zur Y-Achse so, daß die Abszisse b der anderen positiv wird und nehmen a als X-Achse. Dann zerlegen wir den durch C umschlossenen Bereich durch Parallele zur Y-Achse in Streifen, die durch C eingeschriebene Trapeze approximiert werden können. Wenn der Umfang des symmetrisierten Bereiches die Länge L^* hat, geht die Summe in (10) in ein Integral über und man erhält:

$$L - L^* = 2\int_0^b \frac{\sin(\vartheta^* - \vartheta)}{\sin\vartheta + \sin\omega\cdot\sin\vartheta^*}\cdot dx, \tag{12}$$

wobei die Symbole jetzt folgende Bedeutung haben: Wenn je zwei Punkte A, B von C mit derselben Abszisse x „zugeordnet" heißen, und wenn sich die Tangenten zweier zugeordneten Punkte in S schneiden, so ist ϑ der halbe bei S liegende Winkel des Dreiecks ABS, und ϑ^* hat dieselbe Bedeutung für das durch Symmetrisierung entsprechende Dreieck; ω ist der

Winkel, den die von S ausgehende Winkelhälftende des Dreiecks ABS mit der Y-Achse bildet[3]). Der Integrand ist also eine Funktion von x, die bei einer Ecke einen Sprung macht, aber immer endlich bleibt und nie negativ wird. Sie wird nur unbestimmt, wenn die Tangenten in den zugeordneten Punkten parallel werden und ist der Entstehungsweise des Integrals nach dort durch den Grenzwert zu ersetzen, den der Integrand an der Unbestimmtheitsstelle annimmt. Man kann unmittelbar bestätigen, daß dieser Grenzwert der Klammerausdruck von (11) ist.

§ 3.

Konvexe Körper.

Wir denken uns ein dreiseitiges Prisma $\mathfrak{P} = ABCA_1B_1C_1$ (Fig. 2), dessen Basisfläche ABC zur Seitenfläche ABB_1A_1 senkrecht steht, so daß die Höhe $CC' = h$ des Dreiecks ABC zugleich der kürzeste Abstand der Kanten AB und CC_1 ist. Bezüglich einer Ebene E, die auf AB senkrecht steht, symmetrisieren wir dieses Prisma in zwei Schritten: Im ersten Schritt lassen wir das Dreieck $A_1B_1C_1$ als starres Gebilde längs des Trägers der Kante A_1B_1 nach $A_2B_2C_2$ gleiten, so daß nun das Prisma $\overline{\mathfrak{P}} = ABCA_2B_2C_2$ ein gerades ist. Im zweiten Schritt symmetrisieren wir $\overline{\mathfrak{P}}$ bezüglich E, wodurch $\mathfrak{P}^*$ entsteht. Wenn $f, \bar{f}, f^*$ die Oberflächen von $\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P}^*$ sind, so tragen zu $f - \bar{f}$ nur zwei von den fünf Flächenpaaren bei, ebenso zu $\bar{f} - f^*$, und zwar ist

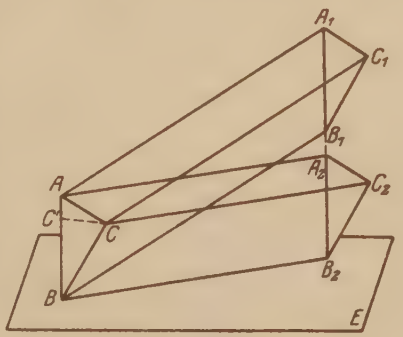


Fig. 2.

$$f > \bar{f}, \tag{13}$$

außer wenn $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ identisch sind. Man sieht das am schnellsten, indem man A_1C_1 in sich selbst nach $A_1'C_1'$ verschiebt, bis auch $ACC_1'A_1'$ ein Rechteck wird. Dann ist $CC_1' > CC_2$, usw. Den Ausdruck für $\bar{f} - f^*$ erhalten wir aus (8), indem wir mit $AA_2 = a$ beiderseits multiplizieren, da nämlich das Dreieck ABC in Fig. 2 dieselbe Rolle spielt wie das gleichnamige in Fig. 1. Wenn nun in einem konvexen Polyeder nicht die ganzen Prismenflächen auftreten, sondern nur ein von einem beliebigen Vieleck V begrenzter Teil von ACC_1A_1, ebenso derjenige Teil von BCC_1B_1,

[3]) Da nur der $\sin\omega$ auftritt, ist es gleichgültig, ob man den spitzen oder den stumpfen Winkel nimmt.

der durch einen prismatischen Mantel ausgeschnitten wird, der durch V in der Richtung AB gelegt wird, so kann man ebenfalls die erwähnte aus (8) gewonnene Formel anwenden, wenn man nur den Faktor $h \cdot a$ rechts durch die Fläche der Projektion von V auf E ersetzt.

Ist nun ein beliebiges konvexes Polyeder Π vorgelegt, und wird es an E symmetrisiert, so daß Π^* entsteht, so nennen wir die zu dieser Ebene senkrechte Richtung ϱ die „Symmetrisierungsrichtung". Man lege dann durch alle Polyederkanten, die nicht dem wahren Umriß bezüglich ϱ angehören, die Ebenen, welche ϱ enthalten. So wird Π in Säulen zerlegt, deren jede von einem prismatischen Mantel und zwei schneidenden Ebenen e, e' begrenzt ist. Wenn Π und Π^* die Oberflächen F und F^* haben, so gewinnt man für $F - F^*$ eine untere Schranke, die so wie die rechte Seite von (10) gebaut ist, nur daß statt der Faktoren h_ν die senkrechten Querschnitte q_ν der prismatischen Mäntel stehen. Nur wenn e, e' für eine Säule parallel sind, tritt an Stelle des betreffenden Summengliedes der Ausdruck

$$2 q_\nu \left(\frac{1}{\cos \mu} - 1 \right),$$

wobei μ der spitze Neigungswinkel von e oder e' gegen E ist.

Wenn endlich K ein beliebiger konvexer Körper ist, K^* der symmetrisierte, wenn ferner F und F^* die Oberflächen von K und K^* sind, so seien A, B zwei „zugeordnete" Punkte der Oberfläche von K, deren Verbindungslinie nämlich zu E (die wir als XY-Ebene nehmen) senkrecht steht. Dann geht die erwähnte Summenformel über in:

$$F - F^* \geqq 2 \iint \frac{\sin(\vartheta^* - \vartheta)}{\sin \vartheta + \sin \omega \cdot \sin \vartheta^*} \cdot dx\, dy, \tag{14}$$

wobei der Integrationsbereich die Projektion von K auf E umfaßt, und die Bedeutung der Symbole die folgende ist: Bringt man je eine Stützebene in A und B zum Schnitt[4]) in c und ist C der auf c liegende Fußpunkt des kürzesten Abstandes zwischen AB und c, so ist ϑ der halbe Winkel des Dreiecks ABC bei C, und ϑ^* der entsprechende Winkel in der symmetrisierten Figur; ω ist der Winkel, den die Hälftende des ersten Winkels mit AB (der Richtung ϱ) bildet. Das Gleichheitszeichen gilt in (14) nur, wenn alle Linien des Strahlensystems c zu E parallel sind[5]).

---

[4]) Die Punktpaare A, B, für welche diese Regel zu keiner eindeutigen Geraden c führt, bilden höchstens eine Mannigfaltigkeit erster Dimension, haben also auf den Wert des Integrals keinen Einfluß.

[5]) Selbst wenn alle c in dieselbe Ebene fallen, braucht deshalb K noch nicht symmetrisch zu sein. Beispiel: Man lasse die eine Hälfte einer durch eine Symmetrie-

Der Integrand verschwindet nur, wenn die Stützebenen zugeordneter Punkte bezüglich einer zu E parallen Ebene zueinander symmetrisch sind und ist sonst positiv.

Man erhält aus (14) (auch schon aus (12)) minder scharfe Ungleichungen, indem man im Nenner einen oder mehrere Sinus durch eins ersetzt[6]); z. B.:

$$F - F^* > \iint \sin(\vartheta^* - \vartheta)\, dx\, dy. \tag{15}$$

ebene E geteilten konvexen Fläche Φ ungeändert und transformiere die andere (durch eine spezielle Affinität) so, daß man die Abstände zwischen E und den Punkten von Φ alle im selben Verhältnis ändert.

[6]) Dabei ist auszuschließen, daß K und K^* kongruent sind.

(Eingegangen am 27. Juli 1925.)

Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung.

III. Mitteilung.

Der lineare Wärmeleiter mit beliebiger Anfangstemperatur. Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes.

Von

Gustav Doetsch in Stuttgart.

In der ersten Mitteilung[1]) wurde die partielle Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

die für das Gebiet $0 < x < c$, $t > 0$ unter den Randbedingungen

$$\left.\begin{array}{ll} \Phi(x,t) \to \Phi(x) & \text{für } t \to 0 \text{ bei } 0 < x < c; \\ \Phi(x,t) \to A(t) & \text{für } x \to 0 \text{ von rechts} \\ \Phi(x,t) \to B(t) & \text{für } x \to c \text{ von links} \end{array}\right\} \text{bei } t > 0,$$

zu integrieren ist, durch die Laplace-Transformation zu der totalen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = s\varphi - \Phi(x)$$

mit den Randbedingungen

$$\varphi(x,s) \to a(s) = L(A) \text{ für } x \to 0 \text{ von rechts},$$
$$\varphi(x,s) \to b(s) = L(B) \text{ für } x \to c \text{ von links}$$

in Korrespondenz gebracht. Die Lösung dieser Gleichung (im Unterbereich) ergibt durch „Zurückübersetzung" die Lösung der ursprünglichen (im Ober-

---

[1]) I. Mitteilung von F. Bernstein und G. Doetsch. Eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 285–292.

II. Mitteilung von G. Doetsch. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. Die allgemeinste Lösung und die Frage der Eindeutigkeit. Ebenda S. 293–306.

Im Folgenden als M I, M II zitiert.

bereich). Es bot sich als naturgemäß der Weg dar, zunächst die *homogene* totale Differentialgleichung zu lösen, d. h. die Anfangstemperatur $\Phi(x)$ als identisch verschwindend anzunehmen. Die vollständige Lösung dieses Problems ist in den beiden ersten Mitteilungen enthalten, und wir wenden uns nunmehr zum *inhomogenen* Fall, bei dem $\Phi(x) \not\equiv 0$ ist (§ 1). Wie in M I so ist auch hier nur die Methode neu, das Ergebnis natürlich wohlbekannt. Dagegen bringt § 3 (nach einer Vorbereitung durch § 2) ein neues Resultat, nämlich die Entscheidung darüber, ob und wie weit sich ein Wärmezustand zeitlich zurückverfolgen läßt.

§ 1.

Die Lösung bei beliebigem Anfangszustand.

Offenbar genügt es, nunmehr die der Voraussetzung $A(t) \equiv B(t) \equiv 0$, d. h. $a(s) \equiv b(s) \equiv 0$ entsprechende Lösung zu suchen, da der allgemeine Fall sofort durch Superposition dieser und der früheren speziellen Lösung erledigt wird. Es handelt sich also zunächst im Unterbereich darum, dasjenige partikuläre Integral der Differentialgleichung $\frac{d^2\varphi}{dx^2} - s\varphi + \Phi(x) = 0$ zu finden, das in den Punkten $x = 0$ und $x = c$ verschwindet. Dabei setzen wir voraus, daß $\Phi(x)$ in jedem Teilintervall $0 < x_1 \leqq x \leqq x_2 < c$ eigentlich, in die Randpunkte $x = 0$ und $x = c$ hinein absolut uneigentlich integrabel sei. Die Lösung läßt sich vermittels der zu den Randbedingungen gehörigen Greenschen Funktion[2])

$$\gamma(x, \xi; s) = \begin{cases} \dfrac{\sin[(c-\xi)\sqrt{-s}]\sin[x\sqrt{-s}]}{\sqrt{-s}\sin[c\sqrt{-s}]} & \text{für} \quad x \leqq \xi, \\ \dfrac{\sin[(c-x)\sqrt{-s}]\sin[\xi\sqrt{-s}]}{\sqrt{-s}\sin[c\sqrt{-s}]} & \text{für} \quad x \geqq \xi \end{cases}$$

in der eleganten Form darstellen[3]):

$$\varphi(x, s) = \int_0^c \gamma(x, \xi; s)\, \Phi(\xi)\, d\xi.$$

---

[2]) Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig u. Berlin 1912, S. 39 f., insbesondere S. 52 und Satz 11, S. 46. Dort ist $c = 1$; man hat also x durch $\frac{x}{c}$ und λ durch $-c^2 s$ zu ersetzen, um auf unsere Gleichung nebst Randbedingungen zurückzufallen. Damit die Ableitung der Greenschen Funktion bei $x = \xi$ wieder den Sprung 1 habe, ist sie mit c zu multiplizieren.

[3]) Bei Hilbert wird von Φ Stetigkeit und demgemäß von der Lösung φ zweimalige stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt. Die hieraus in unserem allgemeineren Fall resultierenden Bedenken stellen wir bis zur Diskussion der Lösung im Oberbereich zurück.

Um von hier aus zum Oberbereich übergehen zu können, nehmen wir folgende Zerlegung vor:

$$2\frac{\sin(c-\xi)\sqrt{-s}\sin x\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin c\sqrt{-s}} = -\frac{\cos(x-\xi+c)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin c\sqrt{-s}} + \frac{\cos(x+\xi-c)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin c\sqrt{-s}} \quad (x \leqq \xi),$$

$$2\frac{\sin(c-x)\sqrt{-s}\sin\xi\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin c\sqrt{-s}} = -\frac{\cos(x-\xi-c)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin c\sqrt{-s}} + \frac{\cos(x+\xi-c)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin c\sqrt{-s}} \quad (x \geqq \xi).$$

Da die Thetafunktion

$$\vartheta_3(v,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2mi\pi v - m^2\pi^2 t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(v+m)^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

die Unterfunktion

$$f_3(v,s) = \begin{cases} -\dfrac{\cos(2v+1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}} & \text{für } -1 \leqq v \leqq 0, \\ -\dfrac{\cos(2v-1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}} & \text{für } 0 \leqq v \leqq 1 \end{cases}$$

hat[4]), so ergibt sich:

$$\gamma(x,\xi;s) = c\,\frac{f_3\left(\frac{x-\xi}{2c}, c^2 s\right) - f_3\left(\frac{x+\xi}{2c}, c^2 s\right)}{2}.$$

Besitzt aber die Unterfunktion $f(s)$ die Oberfunktion $F(t)$, so gehört[5]) zur Unterfunktion $f(c^2 s)$ die Oberfunktion $\frac{1}{c^2}F\left(\frac{t}{c^2}\right)$. Folglich entspricht $\gamma(x,\xi;s)$ im Oberbereich die Greensche Funktion

$$\Gamma(x,\xi;t) = \frac{1}{2c}\left[\vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2c}, \frac{t}{c^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2c}, \frac{t}{c^2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{c}\sum_{1}^{\infty} e^{-m^2\pi^2\frac{t}{c^2}} \sin m\pi\frac{x}{c}\sin m\pi\frac{\xi}{c} \qquad (1)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi+2cm)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2cm)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \qquad (2)$$

(polarisierte Thetafunktion), und unter der Voraussetzung, daß die Umkehrung der Laplace-Transformation mit der Integration nach ξ vertauschbar ist, erhalten wir zu $\varphi(x,s)$ die Oberfunktion:

$$\Phi(x,t) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t)\,\Phi(\xi)\,d\xi.$$

---

[4]) Doetsch, Transzendente Additionstheoreme der elliptischen Thetafunktionen und andere Thetarelationen vom Faltungstypus. Math. Ann. 90 (1923), S. 19–2[illegible] [S. 21].

[5]) M I, S. 291. Hier sind übrigens zwei Druckfehler zu verbessern: Zeile 3 im Exponenten $-c^2 st$ statt $c^2 s$, Zeile 5 $F\left(\frac{t}{c^2}\right)$ statt $F\left(\frac{1}{c^2}\right)$.

Da $\Gamma(x, \xi; t)$ bei festem $t > 0$ und festem x in ξ stetig ist, so existiert das Integral, wenn Φ absolut uneigentlich integrierbar ist.

Wir zeigen nun leicht, daß $\Phi(x, t)$ unabhängig von den bei der Herleitung benutzten Voraussetzungen eine Lösung unseres Problems darstellt. (Daß es nicht die einzige ist, sondern daß es unendlich viele gibt, wissen wir durch M II, § 2.) Da dies sonst unter engeren Voraussetzungen über $\Phi(x)$ bewiesen zu werden pflegt, so sei der Beweis kurz angedeutet. Zunächst ist klar, daß bei festem $t > 0$ die Funktion $\Gamma(x, \xi; t)$ für $x \to 0$ und $x \to c$ (von innen) gegen 0 strebt und zwar gleichmäßig in ξ, so daß für $\Phi(x, t)$ dasselbe gilt. Weiterhin nähert sich $\Phi(x, t)$ bei festem x $(0 < x < c)$ für $t \to 0$ dem Werte $\Phi(x)$, wenn x eine Stetigkeitsstelle für $\Phi(x)$ ist (oder dem Werte $\frac{1}{2}\{\Phi(x+0) + \Phi(x-0)\}$, wenn die einseitigen Grenzwerte existieren), wie zuerst Weierstraß[6]) exakt bewies. Schließlich ist noch leicht zu zeigen, daß $\Phi(x, t)$ die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ erfüllt, da dies nach einer bekannten Eigenschaft der ϑ_3-Funktion für $\Gamma(x, \xi; t)$ gilt (vgl. M II, S. 297) und der Ausdruck für $\Phi(x, t)$ unter dem Integralzeichen differenziert werden darf. (Dies ergibt sich sofort daraus, daß die entstehenden Integrale in der Nähe einer Stelle $0 < x < c$, $t > 0$ gleichmäßig konvergieren[7]).)

Wir können also folgendes Theorem formulieren:

Die Funktion $\Phi(x)$ sei für $0 < x < c$ definiert und in jedem Teilintervall eigentlich integrabel; ihr bis zu den Punkten $x = 0$ und $x = c$ erstrecktes uneigentliches Integral konvergiere absolut. Dann gilt:

a) *Die Funktion* $\Phi(x, t) = \int_0^c \Gamma(x, \xi; t)\, \Phi(\xi)\, d\xi$ *genügt im Halbstreifen $0 < x < c$, $t > 0$ der Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

b) *Bei einer festen Stelle x $(0 < x < c)$, an der $\Phi(\xi)$ stetig ist, gilt $\Phi(x, t) \to \Phi(x)$ für $t \to 0$.*

c) *Bei festem $t > 0$ ist $\Phi(x, t) \to 0$ für $x \to 0$ und $x \to c$.*

---

[6]) Weierstraß, Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente. Berl. Sitzungsber. 1885, S. 633–639, 789–805. Werke 3, S. 1–37. Um das bei Weierstraß stehende $\int_{-c}^{+c} \vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2c}, \frac{t}{c^2}\right) \Phi(\xi)\, d\xi$ zu erhalten, braucht man nur $\Phi(\xi)$ in das Intervall $-c < x < 0$ als ungerade Funktion fortzusetzen und zu schreiben: $-\int_0^c \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2c}, \frac{t}{c^2}\right) \Phi(\xi)\, d\xi = \int_{-c}^{0} \vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2c}, \frac{t}{c^2}\right) \Phi(\xi)\, d\xi$. Der Weierstraßsche Beweis bleibt auch unter unseren weiter gefaßten Voraussetzungen über $\Phi(x)$ gültig. — Die Annäherung ist eine gleichmäßige in jedem Stetigkeitsintervall.

[7]) De la Vallée-Poussin, Cours d'analyse infinitésimale 2. 5e éd. Louvain-Paris 1924, p. 30.

Die Annäherungen gegen die Randpunkte sind dabei senkrecht gegen die Ränder von innen heraus vorzunehmen.

Da wir $\Phi(x)$ in jedem Teilintervall $0 < x_1 \leqq x \leqq x_2 < c$ als eigentlich integrabel im Riemannschen Sinne und daher als beschränkt vorausgesetzt haben, so können die Unstetigkeitspunkte im Intervall $0 < x < c$ höchstens eine Nullmenge bilden[8]). *Die Beziehung* b) *ist daher fast überall erfüllt.*

Die *allgemeine Lösung* des Randwertproblems, wie es zu Beginn formuliert wurde, lautet also (vgl. M II, S. 296):

$$\Phi(x,t) = A(t) * G(x,t) + B(t) * G(c-x,t) + \int_0^c \Gamma(x,\xi;t)\,\Phi(\xi)\,d\xi + N(x,t),$$

wo $N(x,t)$ eine beliebige der unendlich vielen „singulären" Lösungen der Differentialgleichung darstellt, die sich überall den Randwerten 0 anschließt (M II, S. 299). Wird vorausgesetzt, daß für jedes feste t des Intervalls $0 < t < T$ $\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x}$ für $x \to 0$ und $x \to c$ *beschränkt* bleibt und für $t \to 0$ die Annäherung von $\Phi(x,t)$ gegen $\Phi(x)$ sich *gleichmäßig* in x vollzieht, daß ferner $\int_0^c \Phi^2(x,t)\,dx$ (unter dem Integralzeichen) nach t differenzierbar ist, so ist $N(x,t) \equiv 0$ im Gebiet $0 < x < c$, $0 < t < T$. (Dies folgt aus den Bemerkungen M II, S. 299, 300; daß es Lösungen unserer Differentialgleichung gibt, die in dem Rechteck $0 < x < c$, $0 < t < T$ identisch verschwinden, in dem übrigen Teil des Streifens aber nicht und dabei die Randwerte 0 besitzen, zeigt das Beispiel:

$$N(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < t \leqq T, \\ G(x, t-T) & \text{für} \quad t > T. \end{cases}$$

Auch auf der Linie $t = T$ ist die Differentialgleichung erfüllt, vgl. M II, S. 301. Bei dieser Funktion ist $\int_0^c \Phi^2(x,t)\,dx$ für $t = T$ nicht einmal stetig, geschweige denn differenzierbar, vgl. M II, S. 300.)

Setzt man für $\Gamma(x,\xi;t)$ den expliziten Reihenausdruck (1) ein, so ergibt sich, da man wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe und der absoluten Integrabilität von $\Phi(x)$ gliedweise integrieren darf, die oben abgeleitete Partikularlösung in der Gestalt:

$$\Phi(x,t) = \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\pi^2 \frac{t}{c^2}} \sin m\pi \frac{x}{c} \int_0^c \Phi(\xi) \sin m\pi \frac{\xi}{c}\,d\xi.$$

---

[8]) Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin 1918, S. 460.

$\sqrt{\frac{2}{c}}\int_0^c \Phi(\xi)\sin m\pi\frac{\xi}{c}\,d\xi$ ist der Fourierkoeffizient a_m von $\Phi(x)$ hinsichtlich des normierten Orthogonalsystems $\sqrt{\frac{2}{c}}\sin m\pi\frac{x}{c}$, folglich

$$\Phi(x,t)=\sum_1^\infty e^{-m^2\pi^2\frac{t}{c^2}}a_m\sqrt{\frac{2}{c}}\sin m\pi\frac{x}{c}.$$

Ist also speziell $\Phi(x)$ in eine Fourierreihe der Gestalt

$$\Phi(x)=\sum_1^\infty a_m\sqrt{\frac{2}{c}}\sin m\pi\frac{x}{c}$$

entwickelbar (wie es die klassischen Theorien, z. B. von Fourier und Riemann, als selbstverständlich voraussetzen), so erhält man in bekannter Weise die Temperatur zur Zeit t, indem man zu jeder Anfangsschwingung $a_m\sqrt{\frac{2}{c}}\sin m x\frac{x}{c}$ den Abklingungsfaktor $e^{-m^2\pi^2\frac{t}{c^2}}$ hinzufügt.

Da es später gebraucht wird, so sei daran erinnert[9]), daß, wenn $c=\infty$ ist, d. h. der Stab sich von 0 bis $+\infty$ erstreckt, die Lösung lautet:

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right)\Phi(\xi)\,d\xi,$$

und wenn der Stab sich beiderseits bis ins Unendliche erstreckt:

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\Phi(\xi)\,d\xi,$$

was man leicht durch Grenzübergang aus dem Resultat für den endlichen Stab ableitet.

§ 2.

Die Eigenschaften der Greenschen Funktion $\Gamma(x,\xi;t)$.

Die Greensche Funktion $\Gamma(x,\xi;t)$ $\left(0<\frac{x}{\xi}<c,\ t>0\right)$ besitzt eine Reihe von interessanten Eigenschaften. Sie ist *symmetrisch* in x und ξ: $\Gamma(x,\xi;t)=\Gamma(\xi,x;t)$. Weiterhin genügt sie, wie bereits bemerkt, der Differentialgleichung der Wärmeleitung; bei festem $t>0$ nähert sie sich für $x\to 0$ und $x\to c$ den Randwerten 0 (wegen der Eigenschaften:

$$\vartheta_3(-v,t)=\vartheta_3(v,t);\qquad \vartheta_3\left(\tfrac{1}{2}-v,t\right)=\vartheta_3\left(\tfrac{1}{2}+v,t\right)$$

[9]) Vgl. z. B. Carslaw, Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids. 2nd ed. London 1921, pp. 33, 30.

der Thetafunktion) und bei festem $x \neq \xi$ für $t \to 0$ ebenfalls (da $\vartheta_3(v, t) \to 0$ für nicht ganzzahliges v), während sie an der Stelle $x = \xi$ unendlich wird wie $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}$ (da für $v = 0$ $\vartheta_3(0, t)$ sich in der Nähe von $t = 0$ wie $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ verhält). Sie entspricht, wie man sich analog zu M II, S. 301 überzeugt, *physikalisch* der Temperaturverteilung, die entsteht, wenn man einem Stab von der Anfangstemperatur 0 längs eines verschwindend kleinen Stückes $\xi - \delta \ldots \xi + \delta$ eine so große Temperatur $\Phi(x)$ zuführt, daß $\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \Phi(x)\,dx$ endlich, gleich 1, bleibt, und die Enden auf der Temperatur 0 hält. Diese Lösung $\Gamma(x, \xi; t)$ ähnelt in ihrem Verhalten den singulären Lösungen $G(x, t)$, $\frac{\partial G}{\partial t}$, ... (M II, S. 301); diese nähern sich an allen von den Ecken des Gebietes verschiedenen Punkten den Werten 0, während sie in den Ecken selbst singulär sind. Da man aber die Ecken bei senkrechter Annäherung von innen heraus nicht erreichen kann, so geben diese Funktionen Veranlassung zu der paradoxen Tatsache, daß es Lösungen gibt, die auf senkrechten Wegen gegen den Rand überall gegen 0 streben, ohne identisch zu verschwinden; die Lösung des Randwertproblems ist daher nicht eindeutig[10]). Die Funktion $\Gamma(x, \xi; t)$ hingegen hat ihre Singularität an der Stelle ξ $(0 < \xi < c)$, wo sie sich wie $\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$ verhält, und gehört daher zwar nicht zu den Lösungen, die bei unserer Formulierung die Eindeutigkeit stören, jedoch hat sie wie die Funktionen G, $\frac{\partial G}{\partial t}$, ... die physikalische Bedeutung, den Wärmezustand darzustellen, der durch eine „Wärmeexplosion", d. h. durch Auftauchen einer unendlich hohen Temperatur in einem einzelnen Randpunkt, entsteht. — Ein genau analoges Verhalten wie $\Gamma(x, \xi; t)$ zeigen, wie leicht einzusehen, auch die Ableitungen

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial \xi^3}, \ldots,$$

da ja

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = -\frac{1}{4c^2}\left[\frac{\partial \vartheta_3\left(v, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x-\xi}{2c}} - \frac{1}{4c^2}\left[\frac{\partial \vartheta_3\left(v, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x+\xi}{2c}}$$

$$= \frac{G(x-\xi, t) + G(x+\xi, t)}{2},$$

---

[10]) Zu M II, S. 299 sei nachgetragen, daß auch das in Anm. [9]) zitierte Werk von Carslaw, das wohl die vollständigste Behandlung der Wärmeleitung darstellt, den falschen Eindeutigkeitsbeweis wiedergibt (S. 14).

wenn $G(-z,t) = -G(z,t)$ gesetzt wird, und eine zweimalige Differentiation nach ξ mit einer einmaligen nach t gleichbedeutend ist.

Formulieren wir, wie das nach dem Ergebnis S. 612 eigentlich ganz natürlich wäre, die auf den Rand $0 < x < c$ bezügliche Randbedingung so, daß wir ihr Erfülltsein nur „fast überall" verlangen, so sind auch $\Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}, \ldots$ als singuläre Lösungen anzusehen, die zu jeder anderen Lösung hinzutreten können und die Eindeutigkeit stören.

Die Funktion $\Gamma(x, \xi; t)$ besitzt ein *transzendentes Additionstheorem* hinsichtlich des Parameters t, das sich folgendermaßen ableiten läßt: Die Funktion $\Gamma(x, y; t + t_2)$, wo $t_2 > 0$, stellt eine Lösung des Wärmeleitungsproblems dar, wenn der Anfangszustand $\Phi(x) = \Gamma(x, y; t_2)$ und an den Stabenden die konstante Temperatur 0 vorgeschrieben ist. Nach unserem allgemeinen Ausdruck S. 612 muß also

$$\Gamma(x, y; t + t_2) = \int_0^c \Gamma(x, \xi; t)\, \Gamma(\xi, y; t_2)\, d\xi + N(x, t)$$

sein. Da aber die S. 612 genannten Bedingungen erfüllt sind, so ist $N(x,t) \equiv 0$, und wenn man $t = t_1$ setzt, so ergibt sich [10a]):

Für $0 < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} < c$ *und* $\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} > 0$ *ist*

$$\int_0^c \Gamma(x, \xi; t_1)\, \Gamma(\xi, y; t_2)\, d\xi = \Gamma(x, y; t_1 + t_2).$$

Dieses formal sehr einfache, transzendente Additionstheorem läßt sich leicht auch in Thetafunktionen (s. die Definition von Γ) schreiben; setzt man für Γ den Reihenausdruck (1) ein, so besagt es nicht mehr, als daß die Funktionen $\sqrt{\frac{2}{c}} \sin m\pi \frac{x}{c}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ein normiertes Orthogonalsystem des Grundgebietes $0 \leqq x \leqq c$ bilden.

[10a]) Wäre die Lösung der Wärmeleitungsgleichung eindeutig, so könnte man den Beweis so führen (wie ich es in der vorläufigen Mitteilung: „Über das Problem der Wärmeleitung", Jahresber. d. deutsch. Math. Vrg. **33** (1924), S. 45–52 [S. 51] getan habe), daß man die einem beliebigen Anfangszustand $\Phi(x)$ entsprechende Temperatur zur Zeit $t_1 + t_2$ einmal direkt und ein andermal durch sprungweises Vorgehen, erst um t_1 und dann um t_2, bestimmt, wobei schließlich das beliebig gebliebene $\Phi(x)$ herausfällt. Diese Art des Schließens ist mir zuerst durch einen analogen Beweis für das Additionstheorem der $\wp$-Funktion (vgl. M II, S. 305), den F. Bernstein schon vor Jahren erdacht und mir mündlich mitgeteilt hat, bekannt geworden. Durch die Entdeckung der Nichteindeutigkeit der Lösung (M II) wurde jedoch diese Schlußweise hinfällig. Die obige Art, die Greensche Funktion für ein nichtsinguläres Argument $t = t_2$ selbst als Randbedingung zu wählen und das Erfülltsein der für die Eindeutigkeit hinreichenden Bedingungen an den vorkommenden *bekannten* Funktionen zu verifizieren, vermeidet jenen Einwand.

Die Greensche Funktion als Kern einer Integralgleichung.

Der in x und ξ symmetrische Kern $\Gamma(x, \xi; t)$ hat, wie man der Form (1) unmittelbar ansieht, hinsichtlich des Variablenpaares x, ξ die normierten *Eigenfunktionen* $\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin m\pi \frac{x}{c}$ und die *Eigenwerte* $\lambda_m = e^{m^2\pi^2 \frac{t}{c^2}}$. Γ ist ein abgeschlossener Kern, d. h. es gibt keine stetige Funktion $h(x) \not\equiv 0$, die zu sämtlichen $\varphi_m(x)$ orthogonal wäre, oder, was dasselbe ist, für die $\int_0^c \Gamma(x, \xi; t)\, h(\xi)\, d\xi = 0$ ist $\left(0 \leqq x \leqq c \text{ ist nur das halbe Periodizitätsintervall der Funktionen } \sin m\pi \frac{x}{c}\right)$.

Die *Iterationen* von Γ lassen sich sofort explizit angeben. Setzt man nämlich in dem obigen Additionstheorem $t_1 = t$, $t_2 = nt$ $(t > 0$, n positiv ganzzahlig), so ergibt sich

$$\int_0^c \Gamma(x, \xi; t)\, \Gamma(\xi, y; nt)\, d\xi = \Gamma(x, y; (n+1)t).$$

Wendet man dies der Reihe nach auf $n = 1, 2, \ldots$ an, so sieht man, daß die n-te iterierte Funktion von $\Gamma(x, y; t)$ gleich $\Gamma(x, y; nt)$ ist. Die n-te Iteration hat also dieselben Eigenfunktionen wie der Kern, ihre Eigenwerte sind die n-ten Potenzen derjenigen des Kernes [11]).

Die zu $\lambda\Gamma(x, y; t)$ *reziproke Funktion* $Z(x, y; t; \lambda)$, die die Gleichung erfüllt:

$$\lambda\Gamma(x, y; t) + Z(x, y; t; \lambda) = \int_0^c \lambda\Gamma(x, \xi; t)\, Z(\xi, y; t; \lambda)\, d\xi$$

$$= \int_0^c \lambda Z(x, \xi; t; \lambda)\, \Gamma(\xi, y; t)\, d\xi,$$

läßt sich nun folgendermaßen ausdrücken:

$$Z(x, y; t; \lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(x, y; nt)\, \lambda^n,$$

wobei die absolute Konvergenz der Reihe für $|\lambda| < \lambda_1$, also für $|\lambda| \leqq 1$ jedenfalls gesichert ist, da für $t > 0$ alle Eigenwerte $\lambda_m > 1$ sind.

Tragen wir die Reihenausdrücke (1) für die $\Gamma(x, y; nt)$ ein und vertauschen die Summationsfolge, so ergibt sich

---

[11]) Im allgemeinen ist dies ja nicht der Fall; vgl. E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil. Math. Ann. **63** (1907), S. 433 bis 476 [S. 448].

$$Z(x,y;t;\lambda) = -\frac{2}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n \sum_{m=1}^{\infty} e^{-nm^2\pi^2\frac{t}{c^2}} \sin m\pi\frac{x}{c}\sin m\pi\frac{y}{c}$$

$$= -\frac{2}{c}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda e^{-m^2\pi^2\frac{t}{c^2}}}{1-\lambda e^{-m^2\pi^2\frac{t}{c^2}}}\sin m\pi\frac{x}{c}\sin m\pi\frac{y}{c}$$

$$= -\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{c}}\sin m\pi\frac{x}{c}\cdot\sqrt{\frac{2}{c}}\sin m\pi\frac{y}{c}}{e^{m^2\pi^2\frac{t}{c^2}}-\lambda},$$

eine Formel, die für alle $\lambda \neq \lambda_m$ gültig ist und auch direkt aus der Theorie der Integralgleichungen hätte abgeleitet werden können[12]).

In der Folge werden wir $Z(x,y;t;1)$ kurz mit $Z(x,y;t)$ bezeichnen.

§ 3.

Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes.

Herrscht an den Enden des Stabes konstant die Temperatur 0, so folgt aus dem Anfangszustand $\Phi(x)$ die Temperatur $\Phi(x,t)$ zu jeder späteren Zeit t aus der Formel

$$\Phi(x,t) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t)\,\Phi(\xi)\,d\xi + N(x,t).$$

Wir stellen uns nun die umgekehrte Aufgabe: Aus der Temperaturverteilung $\Phi(x,t_0)$ zu einer beliebigen, aber festen Zeit $t_0 > 0$ den *Anfangszustand* $\Phi(x)$ *zu bestimmen*; mit anderen Worten: Läßt sich eine Funktion $F(x)$ als Temperaturverteilung $\Phi(x,t_0)$, hervorgegangen aus einem gewissen Anfangszustand $\Phi(x)$ nach Ablauf einer bestimmten, vorgegebenen Zeit $t_0 > 0$ auffassen, d. h. gibt es eine Funktion $\Phi(x,t)$, die für $0 < x < c$, $t > 0$ der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$ genügt, sich bei festem $t > 0$ für $x \to 0$ und $x \to c$ dem Werte 0 nähert, bei festem x zwischen 0 und c für $t \to 0$ einen Grenzwert hat und für $t = t_0$ mit der Funktion $F(x)$ zusammenfällt? Letztere ist naturgemäß als stetig und mit den Randwerten $F(0) = F(c) = 0$ anzunehmen. Die Frage läßt sich unter Verschiebung des Zeitnullpunktes auch dahin formulieren, ob und evtl. wie weit eine Integration der Wärmeleitungsgleichung für einen nach der Seite der *negativen* t sich erstreckenden Halbstreifen möglich ist. Gibt es eine Lösungsfunktion $\Phi(x,t)$ und wird der Grenzwert für $t \to 0$ mit $\Phi(x)$ bezeichnet, so muß

$$F(x) = \Phi(x,t_0) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t_0)\,\Phi(\xi)\,d\xi + N(x,t_0)$$

[12]) E. Schmidt, l. c. [11]), S. 454.

sein, so daß sich unser Problem in die Frage nach der Lösbarkeit dieser Integralgleichung für $\Phi(x)$ kleiden läßt.

Um jene Frage möglichst umfassend zu beantworten, ist es nötig, sich auf einen allgemeineren Standpunkt als bisher zu stellen. Der natürliche Bereich für die Lösungen von linearen Integralgleichungen 1. Art, in denen die gegebene Funktion stetig ist, wird von der Menge der *samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrablen Funktionen*, nach einer gebräuchlichen Bezeichnungsweise: der Funktionsklasse L^2, gebildet. Wir wollen daher in der Folge allgemeiner $\Phi(x)$ als zur Klasse L^2 gehörig voraussetzen und müssen uns zunächst fragen, in welchem Sinne das (für $t > 0$ sicher existierende) Lebesguesche Integral

$$\Phi(x,t) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t)\,\Phi(\xi)\,d\xi$$

noch eine Lösung unseres Randwertproblems darstellt. Genau wie früher folgt, daß $\Phi(x,t)$ der Differentialgleichung genügt und sich bei festem $t > 0$ für $x \to 0$ und $x \to c$ dem Werte 0 nähert, ferner an jeder *Stetigkeitsstelle* x_0 von $\Phi(x)$ für $t \to 0$ gegen $\Phi(x_0)$ konvergiert. Da jedoch jetzt die Menge der Unstetigkeitsstellen von $\Phi(x)$ von positivem Maß sein kann, so läßt sich nicht behaupten, daß die Konvergenz gegen $\Phi(x)$ fast überall statthat[13]).

Des weiteren ist zu überlegen, welche Bedeutung die nicht weiter bestimmbare singuläre Lösung $N(x,t_0)$, die von der gegebenen Temperaturverteilung $\Phi(x,t_0)$ in Abzug zu bringen ist, für die Lösung $\Phi(x)$ der Integralgleichung hat.

Die Funktionen $\Phi(x)$ und $\bar{\Phi}(x)$ mögen den Integralgleichungen

$$\Phi(x,t_0) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t_0)\,\Phi(\xi)\,d\xi$$

und

$$\Phi(x,t_0) - N(x,t_0) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t_0)\,\bar{\Phi}(\xi)\,d\xi$$

genügen, wo $\Phi(x,t_0)$ und $N(x,t_0)$ gegeben sind. Mit diesen Lösungen lassen sich die Funktionen

$$\Phi(x,t) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t)\,\Phi(\xi)\,d\xi \equiv J$$

[13]) Natürlich kann auch an Unstetigkeitsstellen Konvergenz vorliegen, und es gibt gewisse Typen des Verhaltens der Funktion, für die sich die Konvergenz allgemein beweisen läßt. Man vergleiche die Untersuchungen von H. Hahn, Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, I. Mitteilung. Denkschriften der Kais. Akad. der Wiss. in Wien, math.-naturwiss. Kl. 93 (1916), insb. § 14.

und

$$\Phi(x,t) - N(x,t) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t)\,\bar{\Phi}(\xi)\,d\xi \equiv J$$

definieren. Dann muß

$$N(x,t) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t)\,[\Phi(\xi) - \bar{\Phi}(\xi)]\,d\xi$$

sein. Die linke Seite strebt für $t \to 0$ gegen 0, die rechte an allen Stellen, wo J gegen $\Phi(x)$ und $\bar{J}$ gegen $\bar{\Phi}(x)$ strebt (also z. B. an den gemeinsamen Stetigkeitsstellen der Funktionen Φ und $\bar{\Phi}$), gegen $\Phi(x) - \bar{\Phi}(x)$. An allen diesen Stellen ist also $\Phi(x) = \bar{\Phi}(x)$. Kommen wir daher überein — wie das dem Sinne unserer ursprünglichen Problemstellung: den Zustand zu bestimmen, dem ein gegebener bei Zurückverfolgung um die Zeit t_0 sich nähert, durchaus gemäß ist — zwei solche Lösungen $\Phi(x)$ und $\bar{\Phi}(x)$, für die die Grenzwerte der Integrale J und $\bar{J}$ beim Grenzübergang $t \to 0$ an allen Stellen, wo sie beide existieren, dieselben sind, als nicht verschieden anzusehen [14]), so erhellt, daß wir uns darauf beschränken können, $N(x,t) \equiv 0$ anzunehmen. Gibt es dann keine Lösung, so bleibt nur noch die Möglichkeit offen, daß $F(x)$ unter Mitwirkung einer „Wärmeexplosion" entstanden ist, d. h. daß nach Abzug einer geeigneten, aber nicht allgemein bestimmbaren singulären Lösung sich ein Anfangszustand ergeben würde. Schließt man singuläre Lösungen überhaupt aus, indem man *gleichmäßige* Approximation des Anfangszustandes verlangt, so fällt diese Möglichkeit fort.

Wir haben also die Integralgleichung

$$F(x) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t_0)\,\Phi(\xi)\,d\xi$$

zu betrachten, bei der die gegebene Funktion $F(x)$ stetig im Intervall $0 \leqq x \leqq c$ und $F(0) = F(c) = 0$ ist. Da der Kern Γ abgeschlossen ist, so läßt sich die Frage der Lösbarkeit durch das bekannte Theorem von Picard [15]) entscheiden: Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Eigenwerte, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ die normierten (orthogonalen) Eigenfunktionen des abgeschlossenen symmetrischen Kernes; $c_1, c_2, \ldots$ die Fourierkoeffizienten der Funktion $F(x)$ hinsichtlich der Orthogonalfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$:

$$c_\nu = \int_0^c F(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx.$$

---

[14]) Z. B. alle Funktionen, die äquivalent sind, d. h. sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, haben diese Eigenschaft.

[15]) Picard, Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique. Rend. del circ. mat. di Palermo 29 (1910), S. 79—97.

Dann ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer zur Klasse L^2 gehörigen Lösung $\Phi(x)$ die Konvergenz der Reihe

$$\lambda_1^2 c_1^2 + \lambda_2^2 c_2^2 + \dots .$$

In unserem Fall ist

$$\lambda_\nu = e^{\nu^2 \pi^2 \frac{t_0}{c^2}}, \qquad \varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \nu \pi \frac{x}{c},$$

und die c_ν sind die gewöhnlichen Fourierkoeffizienten von $F(x)$:

$$c_\nu = \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c F(x) \sin \nu \pi \frac{x}{c}\, dx .$$

Es ist allerdings zu beachten, daß eigentlich bei den „gewöhnlichen" Fourierkoeffizienten zu dem Grundgebiet $0 \dots c$ die normierten Orthogonalfunktionen $\sqrt{\frac{2}{c}} \sin 2m\pi \frac{x}{c}$ und $\sqrt{\frac{2}{c}} \cos 2m\pi \frac{x}{c}$ gehören. Denken wir uns $F(x)$ in das Intervall $-c \dots 0$ als ungerade Funktion fortgesetzt: $F(-x) = -F(x)$, und bilden für das Grundgebiet $-c \dots +c$ die Fourierkoeffizienten hinsichtlich der hierzu gehörigen normierten Orthogonalfunktionen $\frac{1}{\sqrt{c}} \sin m\pi \frac{x}{c}$ und $\frac{1}{\sqrt{c}} \cos m\pi \frac{x}{c}$, so verschwinden die letzteren, während die Sinus-Glieder der Fourierentwicklung mit denen der früheren übereinstimmen:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-c}^{+c} F(x) \sin m\pi \frac{x}{c}\, dx \right\} \frac{1}{\sqrt{c}} \sin m\pi \frac{x}{c}$$

$$= \left\{ \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c F(x) \sin m\pi \frac{x}{c}\, dx \right\} \sqrt{\frac{2}{c}} \sin m\pi \frac{x}{c} .$$

Wir erhalten also folgenden

Satz: *Ein gegebener stetiger Temperaturzustand $F(x)$ mit $F(0) = F(c) = 0$ kann dann und nur dann aus einem um die Zeit t_0 zurückliegenden Zustand $\Phi(x)$ von der Klasse L^2 unter Konstanthaltung der Temperatur an den Stabenden entstanden sein* (in dem Sinne, daß es eine Funktion, nämlich $\int_0^c \Gamma(x, \xi; t)\, \Phi(\xi)\, d\xi$ gibt, die für $t = t_0$ mit $F(x)$ übereinstimmt, für $0 < x > c$, $t > 0$ der Wärmeleitungsgleichung genügt, für $x \to 0$ und $x \to c$ bei festem t an die Randwerte 0 anschließt und sich an den Stetigkeitsstellen von $\Phi(x)$ für $t \to 0$ dem Werte $\Phi(x)$ nähert), *d. h. die*

Temperatur kann dann und nur dann singularitätenfrei um t_0 rückwärts fortgesetzt werden, wenn die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(e^{\nu^2\pi^2\frac{t_0}{c^2}}c_\nu\right)^2$ konvergiert, wo die c_ν die gewöhnlichen Fourierkoeffizienten der als ungerade fortgesetzten Funktion $F(x)$ im Intervall $-c\ldots+c$ sind.

Die Herstellung des gesuchten Anfangszustandes hat in bekannter Weise folgendermaßen zu erfolgen: Es ist

$$c_\nu = \sqrt{\frac{2}{c}}\int_0^c F(x)\sin\nu\pi\frac{x}{c}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{c}}\int_0^c \sin\nu\pi\frac{x}{c}\,dx\int_0^c \Gamma(x,\xi;t_0)\,\Phi(\xi)\,d\xi$$

$$= \sqrt{\frac{2}{c}}\int_0^c \Phi(\xi)\,d\xi\int_0^c \Gamma(x,\xi;t_0)\sin\nu\pi\frac{x}{c}\,dx.$$

Da $\sqrt{\frac{2}{c}}\sin\nu\pi\frac{x}{c}$ die zum Eigenwert $e^{\nu^2\pi^2\frac{t_0}{c^2}}$ gehörige Eigenfunktion von $\Gamma(x,\xi;t_0)$ ist, so haben wir

$$e^{\nu^2\pi^2\frac{t_0}{c^2}}\sqrt{\frac{2}{c}}\int_0^c \Gamma(x,\xi;t_0)\sin\nu\pi\frac{x}{c}\,dx = \sqrt{\frac{2}{c}}\sin\nu\pi\frac{\xi}{c}$$

und folglich

$$e^{\nu^2\pi^2\frac{t_0}{c^2}}c_\nu = \sqrt{\frac{2}{c}}\int_0^c \Phi(\xi)\sin\nu\pi\frac{\xi}{c}\,d\xi.$$

Bezeichnen wir die Fourierkoeffizienten von $\Phi(x)$ mit a_ν, so ist also

$$a_\nu = e^{\nu^2\pi^2\frac{t_0}{c^2}}c_\nu.$$

Da wir $\sum_1^\infty a_\nu^2$ als konvergent vorausgesetzt haben, so gibt es nach dem Riesz-Fischerschen Satz genau eine Funktion $\Phi(x)$ der Klasse L^2, die durch ihre „im Mittel konvergierende" Fourierentwicklung

$$\Phi(x)\sim\sqrt{\frac{2}{c}}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\sin\nu\pi\frac{x}{c} = \sqrt{\frac{2}{c}}\sum_1^\infty e^{\nu^2\pi^2\frac{t_0}{c^2}}c_\nu\sin\nu\pi\frac{x}{c}$$

dargestellt wird in dem Sinne, daß

$$\lim_{n=\infty}\int_0^c\left(\Phi(x)-\sqrt{\frac{2}{c}}\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\sin\nu\pi\frac{x}{c}\right)^2 dx = 0$$

ist. Ist speziell $\Phi(x)$ beschränkt, so konvergiert die Fourierreihe fast überall.

Da $F(x)$ die Gestalt $\int_0^c \Gamma(x, \xi; t_0)\, \Phi(\xi)\, d\xi$ hat und daher nach dem Hilbert-Schmidtschen Entwicklungssatz[16]) durch seine im gewöhnlichen Sinne (sogar absolut und gleichmäßig) konvergente Fourierentwicklung dargestellt wird:

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin \nu \pi \frac{x}{c},$$

so können wir unser Resultat unter Heranziehung des Teilergebnisses von S. 613 und unter irrelevanter Verschiebung des Zeitnullpunktes folgendermaßen aussprechen:

Ein Stab werde an seinen Enden für alle Zeiten auf der Temperatur 0 gehalten. Ist zu einer bestimmten Zeit ($t = 0$) der Temperaturzustand als absolut integrable Funktion $\Phi(x)$ gegeben und in eine Fourierreihe entwickelbar:

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu \pi \frac{x}{c},$$

so läßt sich die Temperatur für alle ***zukünftigen*** *Zeiten $t > 0$ dadurch bestimmen, daß man zu jeder Schwingung $\sin \nu \pi \frac{x}{c}$ den Abklingungsfaktor $e^{-\nu^2 \pi^2 \frac{t}{c^2}}$ hinzufügt, wodurch man eine konvergente Fourierreihe erhält:*

$$\Phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{1}^{\infty} a_\nu e^{-\nu^2 \pi^2 \frac{t}{c^2}} \sin \nu \pi \frac{x}{c}.$$

In die ***Vergangenheit*** *$t < 0$ läßt sich der Temperaturzustand* ***nur dann*** *zurückverfolgen, wenn $\Phi(x)$ in eine Fourierreihe entwickelbar ist, und zwar stets* ***genau so weit,*** *als $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(e^{-\nu^2 \pi^2 \frac{t}{c^2}} a_\nu\right)^2$ konvergent bleibt. Ist $t_0 < 0$ ein Zeitwert, für den diese Bedingung erfüllt ist, so wird der Temperaturzustand zur Zeit t_0 dadurch erhalten, daß man zu jeder Schwingung $\sin \nu \pi \frac{x}{c}$ den Verstärkungsfaktor $e^{-\nu^2 \pi^2 \frac{t_0}{c^2}}$ hinzufügt, wodurch man eine im Mittel konvergente Fourierreihe für $\Phi(x, t)$ erhält:*

$$\Phi(x, t) \sim \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\nu^2 \pi^2 \frac{t_0}{c^2}} \sin \nu \pi \frac{x}{c}.$$

---

[16]) L. c. [11]). Wegen der hier benötigten Verallgemeinerung des Satzes S. 452 vgl. insbesondere S. 459.

Kehren wir wieder zur früheren Bezeichnungsweise zurück (gegebener Zustand $\Phi(x, t_0) = F(x)$), und betrachten wir einmal die Bedingungen, die $F(x)$ *notwendig* erfüllen muß, damit überhaupt eine Zurückverfolgung möglich ist! Wir sahen, daß $F(x)$ in eine Fourierreihe entwickelbar sein muß:

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin \nu \pi \frac{x}{c},$$

und daß die Koeffizienten c_ν so beschaffen sein müssen, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(e^{\nu^2 \pi^2 \frac{t_0}{c^2}} c_\nu \right)^2$ für ein $t_0 > 0$ konvergiert. Da hieraus folgt

$$e^{\nu^2 \pi^2 \frac{t_0}{c^2}} c_\nu \to 0, \quad \text{d. h.} \quad c_\nu = o\left(e^{-\nu^2 \pi^2 \frac{t_0}{c^2}} \right),$$

und

$$\left| \sin \nu \pi \frac{x}{c} \right| = \left| \frac{e^{i \nu \pi \frac{x}{c}} - e^{-i \nu \pi \frac{x}{c}}}{2i} \right| \leqq e^{\nu \pi \frac{|x|}{c}}$$

ist, so konvergiert die Reihe für $F(x)$ für jedes komplexe x, und zwar in jedem endlichen Gebiet gleichmäßig, stellt daher eine ganze transzendente Funktion dar. Damit also der Temperaturzustand $F(x)$ in die Vergangenheit fortgesetzt werden kann, muß er *notwendig eine ganze Funktion* sein. Natürlich ist dies nicht hinreichend, denn z. B. $\sum_{1}^{\infty} e^{-\nu^2/2\pi^2} \sin \nu \pi \frac{x}{c}$ ist eine ganze Funktion, bei der aber $\sum_{1}^{\infty} \left(e^{\nu^2 \pi^2 \frac{t}{c^2}} c_\nu \right)^2$ für kein noch so kleines t konvergiert. — Interessante Beispiele sind auch die ganzen Funktionen $G(x, t_0)$ und $\Gamma(x, \xi; t_0)$, die nicht weiter als um $t < t_0$ zurückverfolgt werden können.

Hier ordnet sich ein Resultat ein, das Sophie von Kowalevsky in ihrer berühmten Dissertation[17]) erhalten hat und das die noch von Weierstraß[18]) als paradox angesprochene Erscheinung aufklärte, daß eine der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ formal genügende Reihe nach Potenzen von t:

$$\Phi(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^{2\nu} \Phi(x)}{dx^{2\nu}} \frac{t^\nu}{\nu!},$$

die so angesetzt ist, daß sie für $t = 0$ in eine Potenzreihe $\Phi(x) = \sum_{0}^{\infty} b_n x^n$

---

[17]) S. v. Kowalevsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Journ. f. d. reine u. ang. Math. 80 (1875), S. 1—32.

[18]) Vgl. den Brief Weierstraß' in Jahresber. der deutsch. Math. Vrg. 18 (1909), S. 90.

übergeht, im allgemeinen, d. h. wenn Φ nicht besondere Bedingungen erfüllt, divergiert. Sie fand, daß $\Phi(x)$ notwendig eine ganze Funktion sein muß, daß dies jedoch nicht hinreichend sei. Wenn aber $\Phi(x, t)$ durch eine Potenzreihe in t darstellbar sein soll, so muß es auch für negative t existieren, also über $t = 0$ zurück fortsetzbar sein, was nach unserem obigen Ergebnis in der Tat nur möglich ist, wenn der gegebene Zustand eine ganze Funktion ist. Im Gegensatz zu S. v. Kowalevsky wurde aber oben nicht von vornherein $\Phi(x, t)$ als analytisch in t in der Umgebung des gegebenen Wertes, hier $t = 0$, und der Anfangszustand nicht als analytisch in x vorausgesetzt.

Für den Fall des *unendlich langen Stabes* hat übrigens Appell[19]) jene notwendige Bedingung leicht aus den Weierstraßschen Untersuchungen[6]) über das hierbei auftretende Integral $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \Phi(\xi)\, d\xi$ abgeleitet, von dem Weierstraß bewies, daß es für $t > 0$ eine ganze Funktion in x ist, und man könnte den Fall endlicher Stablänge sofort auf diesen einfacheren reduzieren, indem man $\Phi(x)$ durch die Festsetzung (wir wollen speziell $c = 1$ nehmen):

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \quad \Phi(x + 2m) = \Phi(x)$$

(m positiv oder negativ ganzzahlig) über den unendlich langen Stab fortsetzt. Dann ist nämlich, wenn wir für Γ die Form (2) verwenden[20]):

$$\begin{aligned}
\Phi(x, t) &= \int_0^1 \Gamma(x, \xi; t)\, \Phi(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left(e^{-\frac{(x-\xi+2m)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2m)^2}{4t}} \right) \Phi(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^{+1} \left(e^{-\frac{(x-\xi+2m)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2m)^2}{4t}} \right) \Phi(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^{+1} \left(e^{-\frac{(x-\xi-2m)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2m)^2}{4t}} \right) \Phi(\xi)\, d\xi,
\end{aligned}$$

---

[19]) Appell, Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la théorie de la chaleur. Journ. de math. (4) 8 (1892), S. 187–216.

[20]) Die im Folgenden ausgeführten Operationen (Vertauschung von Summe und Integral, Addition von unendlich vielen Integralen) sind leicht zu rechtfertigen.

indem wir für den ersten Bestandteil die positiven und negativen Summationsindizes vertauschen. Setzen wir $\xi + 2m = \zeta$, so ergibt sich

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{2m-1}^{2m+1} \left(e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\zeta)^2}{4t}} \right) \Phi(\zeta - 2m)\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\zeta)^2}{4t}} \right) \Phi(\zeta)\, d\zeta.$$

Nun ist aber, wenn wir $\zeta = -\xi$ setzen:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+\zeta)^2}{4t}} \Phi(\zeta)\, d\zeta = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \Phi(-\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \Phi(\xi)\, d\xi,$$

also

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \Phi(\xi)\, d\xi,$$

womit wir den Ausdruck für den Temperaturzustand des unendlich langen Stabes (S. 613) haben und also nach Appell-Weierstraß schließen können, daß $\Phi(x,t)$ für $t > 0$ eine ganze Funktion ist — übrigens eine ungerade Funktion mit der Periode 2, da dies für $\Phi(x)$ zutrifft. — Man kann leicht abschätzen, daß $\Phi(x,t)$ eine ganze Funktion höchstens von der Ordnung (und damit dem Geschlechte) 2 im Sinne der Laguerre-Hadamardschen Theorie ist[21]).

Bisher gaben wir uns den Zustand $\Phi(x,t)$ zur Zeit $t > 0$ und fragten nach dem Zustand $\Phi(x)$ zur Zeit $t = 0$. Existiert ein solcher, so ist die *Temperaturdifferenz* zwischen den Zeiten 0 und t gleich

$$\Psi(x,t) = \Phi(x,t) - \Phi(x).$$

Es ist bemerkenswert, daß, wenn nur diese Differenz gegeben ist, der Anfangszustand $\Phi(x)$ und damit auch der Endzustand $\Phi(x,t)$ leicht und elegant bestimmt werden kann, d. h. wenn die Enden auf der Temperatur 0 gehalten werden, so bestimmt die *relative* Temperatur hinsichtlich eines früheren oder späteren Zustandes schon die *absolute* — natürlich nur, wenn singuläre Lösungen ausgeschlossen sind. Dann ist nämlich

$$\Phi(x,t) = \Phi(x) + \Psi(x,t) = \int_0^c \Gamma(x,\xi;t)\, \Phi(\xi)\, d\xi,$$

und da wir die reziproke Funktion $Z(x,\xi;t)$ zu dem Kern $\Gamma(x,\xi;t)$ kennen (S. 617), so folgt

---

[21]) Vgl. hierzu Lalesco, Sur les solutions analytiques de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$. Atti del IV congr. intern. dei mat. Roma 1908. Vol. II (1909), p. 87—89.

$$\Phi(x) = -\Psi(x,t) + \int_0^c Z(x,\xi;t)\,\Psi(\xi,t)\,d\xi$$

und

$$\Phi(x,t) = \int_0^c Z(x,\xi;t)\,\Psi(\xi,t)\,d\xi.$$

Haben also zwei Stäbe von der Länge c, deren Enden auf konstanter Temperatur liegen, zwischen zwei bestimmten Zeitpunkten *dieselbe Temperaturdifferenz* aufzuweisen, so sind ihre Zustände *überhaupt identisch*. — Man kann das Resultat leicht auf den Fall ausdehnen, daß die Enden variable, aber bekannte Temperaturen haben.

(Eingegangen am 3. August 1925.)

Über eine Erweiterung des Goldbachschen Problems.

Von

Hans Rademacher in Breslau.

Wenn auch das Goldbachsche Problem immer noch ungelöst ist, so haben doch die Herren Hardy und Littlewood in ihrer grundlegenden Arbeit[1]) dieses Problem in Verbindung mit der Theorie der Riemannschen ζ-Funktion und der Dirichletschen L-Funktionen gebracht und aus einer Hypothese über die Lage der Nullstellen dieser Funktionen das Goldbachsche Theorem (für mindestens drei Summanden) herleiten können. Dieselbe Hypothese reicht nun auch, wie ich zeigen will, aus, die Darstellbarkeit hinreichend großer Zahlen als Summe solcher Primzahlen zu beweisen, die vorgeschriebenen Restklassen eines Moduls angehören, wenn gewisse in der Natur der Sache liegende Kongruenzen erfüllt sind.

Die Methode, die ich hier anwende, ist nicht die ursprüngliche Hardy-Littlewoodsche, sondern eine vor allem durch die Landausche Vereinfachung[2]) charakterisierte Variante, die ich schon in meiner Arbeit über die additive Primzahltheorie des reell-quadratischen Körpers angewandt habe[3]). Während die Herren Hardy, Littlewood und Landau von der Funktion $\sum \log p\, x^p$ ausgehen, lege ich hier nicht die dazugehörende Verallgemeinerung $\sum \chi(p) \log p\, x^p$, sondern die Funktion $\sum \chi(p)\, x^p$ zugrunde. Der hiermit verbundene Nachteil, daß man auf die Logarithmen statt auf die logarithmischen Ableitungen der L-Funktionen

[1]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some Problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the Expression of a Number as a Sum of Primes. Acta Math. 44, (1922), S. 1–70.

[2]) E. Landau, Zur additiven Primzahltheorie. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo 46 (1922), S. 349—356.

[3]) H. Rademacher, Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. I: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositiven Primzahlen im reell-quadratischen Zahlkörper. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität 8 (1924), S. 109—163.

geführt wird, ist bedeutungslos, da man nach Herrn Landau doch rechts von sämtlichen Nullstellen sämtlicher L-Funktionen bleibt. Die Funktion $\sum \chi(p) x^p$ bietet dagegen den Vorteil, direkt auf die gesuchte Anzahlfunktion zu führen, wodurch auch eine genauere asymptotische Bestimmung als bisher ermöglicht wird. Schon in der Einleitung zu meiner oben erwähnten Arbeit habe ich darauf hingewiesen, daß, ähnlich wie der Integrallogarithmus sich der Primzahlfunktion besser anschmiegt als $\frac{n}{\log n}$, so auch hier sich eine Funktion angeben läßt, die asymptotisch besser ist als die bei der Zerlegung in m Primzahlsummanden ($m \geqq 3$) auftretende Größenordnung $\frac{n^{m-1}}{(\log n)^m}$. Die durch jene Funktion erzielte Güte der Abschätzung hängt sogar unmittelbar von der Lage der Nullstellen der L-Funktionen ab, was gleichfalls der Rolle entspricht, die der Integrallogarithmus für die Verteilung der Primzahlen spielt. Während ich jedoch jene Funktion früher nur in einer undurchsichtigen Form als ein Integral über Γ-Quotienten angeben konnte, werde ich jetzt durch eine einfache Umformung (siehe **4.3**) auf

$$L_m(n) = \int_{2 \leqq v_q} \cdots \int_{\sum_1^{m-1} v_q \leqq n-2} \frac{dv_1\, dv_2 \ldots dv_{m-1}}{\log v_1 \log v_2 \ldots \log v_{m-1} \log (n - \sum v_q)}$$

geführt, in welcher Form die Analogie zum Integrallogarithmus noch deutlicher in die Erscheinung tritt.

Ich habe im folgenden die Abschätzungen nicht nur in Hinsicht auf die zu zerlegende Zahl n, sondern auch auf den Modul K durchgeführt, was vor allem in dem Ergänzungssatz von **5.4** zum Ausdruck kommt. Die auftretenden positiven Konstanten habe ich unterschiedslos mit C bezeichnet, ohne damit irgendetwas über Gleichheit oder Verschiedenheit dieser Größen andeuten zu wollen. Eine an der betreffenden Stelle hervorgehobene Ausnahme von dieser Festsetzung habe ich nur in **5.4** gemacht. Die Konstanten C können abhängen von m, Θ, Θ_1 und ε, sind aber unabhängig von n und K und natürlich von den Integrations- und Summationsbuchstaben und den Variablen der analytischen Funktionen.

1. Zahlentheoretische Hilfssätze.

1.1. Es sei $\mathrm{X}(n)$ ein Charakter mod K, $\chi(n)$ ein Charakter mod k. Dann ist offenbar $\mathrm{X}(n)\chi(n)$ ein Charakter mod v, wo $v = v(K,k) = \frac{K \cdot k}{(K,k)}$ ist.

Hilfssatz 1. $\mathrm{X}(n)\chi(n)$ *ist dann und nur dann der Hauptcharakter* mod v, *wenn* $\mathrm{X}(n) = \bar{\chi}(n)$ *für* $(n, v) = 1$ *und wenn* X *und* χ *überdies*

so beschaffen sind, daß sie je einen Charakter $\bmod d = (K, k)$ *induzieren*[4]).

Beweis. Daß $X(n)\chi(n)$ Hauptcharakter $\bmod v$ ist, besagt nichts anderes als

$$X(n)\chi(n) = 1 \quad \text{für} \quad (n, v) = 1,$$

also

$$X(n) = \bar{\chi}(n) \quad \text{für} \quad (n, v) = 1. \tag{1.11}$$

Nun seien a und b so bestimmt, daß

$$d = (K, k) = aK + bk$$

ist. Ferner seien

$$(n_1, K) = (n_2, K) = 1 \quad \text{und} \quad n_1 \equiv n_2 \bmod d. \tag{1.12}$$

Dann lassen sich zwei Zahlen c_1 und c_2 so bestimmen, daß

$$(n_1 + c_1 K, v) = (n_2 + c_2 K, v) = 1.$$

Setzen wir noch

$$(n_1 - n_2) + (c_1 - c_2) K = qd,$$

so schließen wir durch wiederholte Anwendung von (1. 11) und Beachtung der Moduln von χ und X:

$$X(n_1) = X(n_1 + c_1 K) = X(n_2 + c_2 K + qd) = X(n_2 + c_2 K + qaK + qbk)$$
$$= \bar{\chi}(n_2 + c_2 K + qaK + qbk) = \bar{\chi}(n_2 + c_2 K + qaK) = X(n_2 + c_2 K + qaK)$$
$$= X(n_2),$$

also

$$X(n_1) = X(n_2). \tag{1.13}$$

Unter der Voraussetzung (1. 12) besagt (1. 13) aber, daß $X(n)$ einen Charakter $\bmod d$ induziert. Entsprechend beweist man die Behauptung des Hilfssatzes über $\chi(n)$.

1. 2. Hilfssatz 2. *Es sei* $(j, k) = 1$, $d|k$ *und* $(r, d) = 1$. *Dann ist*

$$\sum_{\substack{1 \le l \le k \\ (l,k)=1 \\ l \equiv r \bmod d}} e^{\frac{2\pi i j l}{k}} = \mu\left(\frac{k}{d}\right) e^{\frac{2\pi i j Q r}{d}} \quad \text{für} \quad \left(\frac{k}{d}, d\right) = 1$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad \left(\frac{k}{d}, d\right) > 1, \tag{1.21}$$

worin $Q \bmod d$ *so bestimmt ist, daß* $\frac{k}{d} Q \equiv 1 \bmod d$.

Beweis. Es sei

$$S(k) = \sum_{\substack{1 \le l \le k \\ l \equiv r \bmod k}} e^{\frac{2\pi i j l}{k}}. \tag{1.22}$$

[4]) Ist also $d < K$, so muß X ein *uneigentlicher* Charakter $\bmod K$ sein, und entsprechend für χ und k.

Nun ist

$$\sum_{\substack{1\leqq l\leqq k\\ l\equiv r \bmod d}} e^{\frac{2\pi i j l}{k}} = \sum_{\varrho/k} \sum_{\substack{(l_1,\varrho)=1\\ l_1\frac{k}{\varrho}\equiv r(d)\\ 1\leqq l_1\leqq \varrho}} e^{\frac{2\pi i j l_1 \frac{k}{\varrho}}{k}},$$

also

$$S(k) = \sum_{\varrho/k} T_\varrho, \tag{1.23}$$

mit

$$T_\varrho = \sum_{\substack{(l_1,\varrho)=1\\ l_1\frac{k}{\varrho}\equiv r(d)\\ 1\leqq l_1\leqq \varrho}} e^{\frac{2\pi i j l_1}{\varrho}}. \tag{1.24}$$

Ferner sei für k_1/k

$$S(k_1) = \sum_{\substack{1\leqq l\leqq k_1\\ \frac{k}{k_1} l\equiv r(d)}} e^{\frac{2\pi i j l}{k_1}}, \tag{1.25}$$

also

$$S(k_1) = \sum_{\varrho/k_1} \sum_{\substack{(l_1,\varrho)=1\\ \frac{k}{k_1} l_1 \frac{k_1}{\varrho}\equiv r(d)}} e^{\frac{2\pi i j l_1 \frac{k_1}{\varrho}}{k_1}} = \sum_{\varrho/k_1} \sum_{\substack{(l_1,\varrho)=1\\ l_1\frac{k}{\varrho}\equiv r(d)}} e^{\frac{2\pi i j l_1}{\varrho}}$$

und somit nach (1.24)

$$S(k_1) = \sum_{\varrho/k_1} T_\varrho.$$

Aus dieser Gleichung und aus (1.23) folgt

$$\sum_{k_1/k} \mu\left(\frac{k}{k_1}\right) S(k_1) = \sum_{\varrho/k} T_\varrho \sum_{\tau \mid \frac{k}{\varrho}} \mu\left(\frac{k}{\varrho\tau}\right) = T_k$$

und wegen (1.24) also

$$T_k = \sum_{\substack{1\leqq l\leqq k\\ (l,k)=1\\ l\equiv r(d)}} e^{\frac{2\pi i j l}{k}} = \sum_{k_1/k} \mu\left(\frac{k_1}{k}\right) S(k_1). \tag{1.26}$$

Die Definition (1.25) umfaßt für $k_1 = k$ auch (1.22). Ist $\left(\frac{k}{k_1}, d\right) > 1$, so gibt es wegen $(d, r) = 1$ kein l, das der Summationsbedingung in (1.25) genügt, also

$$S(k_1) = 0 \quad \text{für} \quad \left(\frac{k}{k_1}, d\right) > 1. \tag{1.271}$$

Ferner ist

$$S(k_1) = \sum_{\substack{1\leqq l\leqq k_1\\ \frac{k}{k_1} l\equiv r(d)}} e^{\frac{2\pi i j l}{k_1}} = \sum_{\substack{1\leqq l'\leqq k_1\\ \frac{k}{k_1} l'\equiv r(d)}} e^{\frac{2\pi i j (l'+d)}{k_1}} = e^{\frac{2\pi i j d}{k_1}} S(k_1),$$

woraus

(1. 272) $$S(k_1) = 0 \quad \text{für} \quad k_1 \nmid j\,d$$

folgt. Dagegen ist für $k_1 \mid j\,d$ und $\left(\frac{k}{k_1}, d\right) = 1$, wenn man $Q \bmod d$ so wählt, daß $\frac{k}{k_1} Q \equiv 1 \bmod d$,

(1. 273) $$S(k_1) = \sum_{\substack{1 \leqq l \leqq k_1 \\ \frac{k}{k_1} l = r(d)}} e^{\frac{2\pi i j l}{k_1}} = \sum_{1 \leqq l_1 \leqq \frac{k_1}{d}} e^{\frac{2\pi i j (l_1 d + Q r)}{k_1}} = \frac{k_1}{d} e^{\frac{2\pi i j Q r}{k_1}}.$$

Die Ergebnisse (1. 27) tragen wir in (1. 26) ein, wobei wir bemerken, daß im Hilfssatz 2 $(j, k) = 1$ vorausgesetzt ist. Dann hat $k_1 \mid j\,d$ zur Folge $k_1 \mid d$, also wegen (1. 271) $S(k_1) = 0$ für $k_1 < d$. Daher ergibt sich

$$\sum_{\substack{1 \leqq l \leqq k \\ (l, k) = 1 \\ l = r(d)}} e^{\frac{2\pi i j l}{k}} = \mu\left(\frac{k}{d}\right) S(d) = \mu\left(\frac{k}{d}\right) e^{\frac{2\pi i j Q r}{d}} \quad \text{für} \quad \left(\frac{k}{d}, d\right) = 1$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad \left(\frac{k}{d}, d\right) > 1,$$

womit der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

2. Funktionentheoretische Entwicklungen.

2. 1. Es sei für $|x| < 1$ und den Bedeutungen von **1. 1**

(2. 11) $$f(x, \mathrm{X}) = \sum_{p} \mathrm{X}(p)\, x^p,$$

und ferner sei $\frac{j}{k}$ eine zwischen 0 und 1 gelegene rationale Zahl, $(j, k) = 1$ und $0 < j < k$ für $k > 1$, und $j = 0$ nur für $k = 1$. Wir zerlegen bei festgehaltenem k die Funktion $f(x, \mathrm{X})$ in zwei Summanden

(2. 12) $$f(x, \mathrm{X}) = f_1(x, \mathrm{X}) + f_2(x, \mathrm{X}),$$

(2. 13) $$f_1(x, \mathrm{X}) = \sum_{p \nmid k} \mathrm{X}(p)\, x^p, \qquad f_2(x, \mathrm{X}) = \sum_{p \mid k} \mathrm{X}(p)\, x^p.$$

Setzen wir

(2. 14) $$x = e^{-\frac{1}{n} + 2\pi i \left(\frac{j}{k} + \xi\right)}, \qquad \Re(\xi) > -\frac{1}{2\pi n},$$

so wird aus (2. 13)

$$f_1(x, \mathrm{X}) = \sum_{p \nmid k} \mathrm{X}(p)\, e^{-\frac{p}{n} + 2\pi i p \left(\frac{j}{k} + \xi\right)} = \sum_{\substack{1 \leqq l \leqq k \\ (l, k) = 1}} e^{2\pi i \frac{j l}{k}} \cdot \sum_{p \equiv l \bmod k} \mathrm{X}(p)\, e^{-\frac{p}{n} + 2\pi i p \xi}$$

Durchläuft nun χ alle Charaktere mod k, so haben wir

$$f_1(x,\mathsf{X}) = \sum_{\substack{1\leqq l\leqq k\\(l,k)=1}} e^{2\pi i\frac{jl}{k}} \sum_p \mathsf{X}(p)\, e^{-\frac{p}{n}+2\pi i p\xi} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi \chi(p)\bar\chi(l)$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi \sum_{\substack{1\leqq l\leqq k\\(l,k)=1}} \bar\chi(l) e^{2\pi i\frac{jl}{k}} \sum_p \mathsf{X}(p)\chi(p)\, e^{-\frac{p}{n}+2\pi i p\xi},$$

$$f_1(x,\mathsf{X}) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi C(\chi) G(\xi, \mathsf{X}\chi) \tag{2.15}$$

mit

$$C(\chi) = \sum_{1\leqq l\leqq k} \bar\chi(l) e^{2\pi i\frac{jl}{k}}, \tag{2.16}$$

$$G(\xi,\mathsf{X}\chi) = \sum_p \mathsf{X}(p)\chi(p)\, e^{-\frac{p}{n}+2\pi i p\xi}, \tag{2.17}$$

wobei in den Summationsbedingungen von (2.16) Gebrauch von $\chi(l)=0$ für $(l,k)>1$ gemacht worden ist.

Durch Anwendung der Mellinschen Formel auf (2.17) erhalten wir

$$G(\xi,\mathsf{X}\chi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_p \mathsf{X}(p)\chi(p) \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s)\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^{-s} p^{-s}\, ds,$$

$$G(\xi,\mathsf{X}\chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s)\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^{-s} Z(s,\mathsf{X}\chi)\, ds \tag{2.18}$$

mit

$$Z(s,\mathsf{X}\chi) = \sum_p \frac{\mathsf{X}(p)\chi(p)}{p^s}. \tag{2.19}$$

2.2. Nun ist $\mathsf{X}\chi$ ein Charakter mod $v = \frac{K\cdot k}{(K,k)}$, also

$$L(s,\mathsf{X}\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{X}(n)\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{\mathsf{X}(p)\chi(p)}{p^s}}$$

eine Dirichletsche L-Reihe. Durch Festlegung eines Zweiges des Logarithmus erhalten wir

$$\log L(s,\mathsf{X}\chi) = \sum_{\substack{p\\ m\geqq 1}} \frac{\mathsf{X}(p^m)\chi(p^m)}{m\, p^{ms}} = \sum_p \frac{\mathsf{X}(p)\chi(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p\\ m\geqq 2}} \frac{\mathsf{X}(p^m)\chi(p^m)}{m\, p^{ms}} \tag{2.21}$$

$$= Z(s,\mathsf{X}\chi) + \Xi(s,\mathsf{X}\chi),$$

wo $\Xi(s, \chi_i)$ offenbar für $\Re(s) = \sigma > \frac{1}{2}$ regulär ist und

$$|\Xi(s, \chi\chi)| \leqq \sum_{m \geqq 2}^{p} \frac{1}{m\, p^{m\sigma}}, \qquad \sigma > \frac{1}{2}. \tag{2.22}$$

Setzen wir nun

$$b = b(\chi\chi) = 1 \quad \text{wenn } \chi\chi \text{ Hauptcharakter mod } v$$
$$= 0 \text{ sonst}, \tag{2.23}$$

so ist $L(s, \chi\chi)\ (s-1)^{b(\chi\chi)}$ regulär in der ganzen Ebene. Es sei nun Θ die obere Grenze der Realteile der Nullstellen aller $L(s, \chi)$ aller Moduln k. Dann ist bekanntlich $\frac{1}{2} \leqq \Theta \leqq 1$. Wir machen im folgenden die Hardy-Littlewoodsche Hypothese:

Es sei

$$\Theta < \frac{3}{4}. \tag{2.24}$$

Die Funktion $\log L(s, \chi\chi) + b(\chi\chi)\log(s-1)$ ist dann regulär für $\Re(s) > \Theta$. Für

$$\Re(s) \geqq \Theta_1 > \Theta \tag{2.25}$$

erhält man dann nach Landau[5]) durch Anwendung einer Carathéodoryschen Ungleichung, $s = \sigma + it$ gesetzt und unter $\log(s-1)$ den für $s > 1$ reellen Zweig verstanden,

$$|\log L(s, \chi\chi) + b(\chi\chi)\log(s-1)| < C v^{\varepsilon}(1 + |t|)^{\varepsilon}$$

und wegen (2.21) und (2.22)

$$|Z(s, \chi\chi) + b(\chi\chi)\log(s-1)| < C K^{\varepsilon} k^{\varepsilon}(1 + |t|)^{\varepsilon}, \tag{2.26}$$

wo C noch von ε und Θ_1 abhängen kann.

2.3. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$H(s) = Z(s, \chi\chi) + b(\chi\chi)\log(s-1), \tag{2.31}$$

so schreibt sich (2.18)

$$G(\xi, \chi\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s)\left(\frac{1}{n} - 2\pi i\xi\right)^{-s} H(s)\, ds$$
$$- \frac{b(\chi\chi)}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s)\left(\frac{1}{n} - 2\pi i k\right)^{-s} \log(s-1)\, ds. \tag{2.32}$$

Wegen (2.31) und (2.26) kann man den Integrationsweg des ersten Integrals in (2.32) ohne weiteres bis Θ_1 nach links schieben; beim zweiten Integral kann man diese Verschiebung auch ausführen, wenn man

[5]) l. c. [2]) S. 350—352.

nur den von $s=1$ bis $s=-\infty$ längs der reellen Achse geführten Verzweigungsschnitt umgeht. Das ergibt

$$G(\xi,\mathsf{X}\chi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Theta_1-i\infty}^{\Theta_1+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^s}\mathsf{H}(s)\,ds$$

$$-\frac{b}{2\pi i}\int\limits_{\Theta_1-i\infty}^{\Theta_1}\frac{\Gamma(s)}{\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^s}\log(s-1)ds-\frac{b}{2\pi i}\int\limits_{\Theta_1}^{1}\frac{\Gamma(\sigma)}{\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^\sigma}(\log(1-\sigma)-\pi i)\,d\sigma$$

$$-\frac{b}{2\pi i}\int\limits_{1}^{\Theta_1}\frac{\Gamma(\sigma)}{\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^\sigma}(\log(1-\sigma)+\pi i)ds-\frac{b}{2\pi i}\int\limits_{\Theta_1}^{\Theta_1+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^s}\log(s-1)\,ds,$$

und folglich, wenn man noch

$$\Phi_n(\xi)=\int\limits_{\Theta_1}^{1}\frac{\Gamma(\sigma)}{\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^\sigma}d\sigma \tag{2.33}$$

setzt,

$$G(\xi,\mathsf{X}\chi)=b\,\Phi_n(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Theta_1-i\infty}^{\Theta_1+i\infty}\frac{\Gamma(s)\,\mathsf{H}(s)}{\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^s}ds \tag{2.34}$$

$$-\frac{b}{2\pi i}\left\{\int\limits_{\Theta_1-i\infty}^{\Theta_1}+\int\limits_{\Theta_1}^{\Theta_1+i\infty}\right\}\frac{\Gamma(s)\log(s-1)}{\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^s}ds,$$

wo die durch die Schreibweise angedeutete Zerlegung des zweiten Integrals an die verschiedenen Bestimmungen von $\log(s-1)$ auf beiden Stücken des Integrationsweges erinnern soll.

2. 4. Wir fassen nun in (2. 34) die Funktion $b(\mathsf{X}\chi)\Phi_n(\xi)$ als eine Approximation von $G(\xi,\mathsf{X}\chi)$ auf und benutzen (2. 34) als Ausgangspunkt für die Abschätzung des Fehlers. Nach (2. 26), (2. 31) und (2. 34) ist

$$|G(\xi,\mathsf{X}\chi)-b(\mathsf{X}\chi)\Phi_n(\xi)|<CK^\varepsilon k^\varepsilon\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty}\frac{|\Gamma(\Theta_1+it)|\,(1+|t|)^\varepsilon}{\left|\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)^{\Theta_1+it}\right|}dt$$

$$<\frac{CK^\varepsilon k^\varepsilon}{\left|\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right|^{\Theta_1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,(1+|t|)^{\Theta_1-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{e^{-|t|\left|\arg\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)\right|}}dt,$$

und mit der Abkürzung

$$\delta=\frac{\pi}{2}-\left|\arg\left(\frac{1}{n}-2\pi i\xi\right)\right|>0 \tag{2.41}$$

haben wir

$$|G(\xi, X\chi) - b(X\chi)\Phi_n(\xi)| < \frac{CK^\varepsilon k^\varepsilon}{\left|\frac{1}{n} - 2\pi i\xi\right|^{\Theta_1}} \int_0^\infty e^{-\delta t}(1+t)^{\Theta_1 - \frac{1}{2} + \varepsilon} dt$$

$$< \frac{CK^\varepsilon k^\varepsilon}{\left|\frac{1}{n} - 2\pi i\xi\right|^{\Theta_1}} \int_0^\infty e^{-\delta t} t^{\Theta_1 - \frac{1}{2} + \varepsilon} dt,$$

$$|G(\xi, X\chi) - b(X\chi)\Phi_n(\xi)| < \frac{CK^\varepsilon k^\varepsilon}{\left|\frac{1}{n} - 2\pi i\xi\right|^{\Theta_1} \delta^{\Theta_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon}}. \tag{2.42}$$

Durch Anwendung von (2.15) folgt hieraus

$$\left|f_1(x, X) - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi b(X\chi) C(\chi) \Phi_n(\xi)\right|$$

$$< \frac{1}{\varphi(k)} \frac{CK^\varepsilon k^\varepsilon}{\left|\frac{1}{n} - 2\pi i\xi\right|^{\Theta_1} \delta^{\Theta_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon}} \sum_\chi |C(\chi)|. \tag{2.43}$$

Nun ist bekanntlich[6])

$$|C(\chi)| < Ck^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{2.44}$$

also

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi |C(\chi)| < Ck^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{2.45}$$

Ferner ist nach der Definition (2.23) $b(X\chi)$ nur dann von Null verschieden und zwar gleich 1, wenn $X\chi$ der Hauptcharakter mod $v = \frac{K \cdot k}{(K, k)}$ ist. Nach Hilfssatz 1 tritt dies dann und nur dann ein, wenn $X(n) = \bar{\chi}(n)$ für alle n mit $(n, v) = 1$, und wenn X einen Charakter mod $d = (K, k)$ induziert. Dieser durch X eindeutig bestimmte Charakter mod d heiße X_d. Dann sei X_k derjenige Charakter mod k, der durch

$$\begin{aligned} X_k(n) &= X_d(n) \quad \text{für} \quad (n, k) = 1, \\ X_k(n) &= 0 \qquad\quad \text{für} \quad (n, k) > 1 \end{aligned} \tag{2.46}$$

definiert ist. Nur für $\chi(n) = \bar{X}_k(n)$ ist dann $X\chi$ der Hauptcharakter mod v. Unter der Berücksichtigung dieser Tatsache und der Ungleichung (2.45) geht aus (2.43) hervor

$$\left|f_1(x, X) - \frac{1}{\varphi(k)} C(\bar{X}_k) \Phi_n(\xi)\right| < \frac{CK^\varepsilon k^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}}{\left|\frac{1}{n} - 2\pi i\xi\right|^{\Theta_1} \delta^{\Theta_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon}}, \tag{2.47}$$

---

[6]) Vgl. z. B. Landau l. c. [3]) Satz 3, S. 352.

worin $C(\bar{\chi}_k) = 0$ gesetzt sei, wenn $\bar{\chi}_k$ nicht existiert, d. h. wenn χ keinen Charakter $\bmod d = (K, k)$ induziert, während sonst $C(\bar{\chi}_k)$ die sich aus (2.16) ergebende Bedeutung besitzt.

Nach (2.13) ist ferner

$$(2.48) \qquad |f_2(x, \chi)| = \Big|\sum_{p/k} \chi(p) x^p\Big| \leqq \sum_{p/k} 1 \leqq \frac{\log k}{\log 2} < C k^\varepsilon,$$

also nach (2.12), (2.47) und (2.48)

$$(2.49) \qquad \Big|f(x, \chi) - \frac{1}{\varphi(k)} C(\bar{\chi}_k)\, \Phi_n(\xi)\Big| < \frac{C K^\varepsilon k^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}}{\Big|\frac{1}{n} - 2\pi i \xi\Big|^{\Theta_1} \delta^{\Theta_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon}} + C k^\varepsilon.$$

2.5. Wir werden später $|x| = e^{-\frac{1}{n}}$, also nach (2.14) ξ *reell* nehmen. Dann besagt (2.41)

$$\sin \delta = \frac{\frac{1}{n}}{\Big|\frac{1}{n} - 2\pi i \xi\Big|},$$

und aus (2.49) erhält man

$$(2.51) \qquad \Big|f(x, \chi) - \frac{1}{\varphi(k)} C(\bar{\chi}_k)\, \Phi_n(\xi)\Big|$$

$$< \frac{C K^\varepsilon}{\Big(\Big|\frac{1}{n} - 2\pi i \xi\Big| \sin \delta\Big)^{\Theta_1}} \Big(\frac{k}{\sin \delta}\Big)^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} + C k^\varepsilon$$

$$< C K^\varepsilon n^{\Theta_1} \Big(k n \Big|\frac{1}{n} - 2\pi i \xi\Big|\Big)^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} + C k^\varepsilon$$

$$< C K^\varepsilon n^{\Theta_1} (k + 2\pi k n |\xi|)^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} + C k^\varepsilon.$$

Den Kreis $|x| = e^{-\frac{1}{n}}$ denken wir uns nach Hardy und Littlewood in die Farey-Bögen zu den Brüchen mit Nennern $\leqq [\sqrt{n}]$ zerlegt, und ξ werde auf den zu $\frac{j}{k}$ gehörenden Bogen $\mathfrak{F}_{jk}$ beschränkt. Dann ist bekanntlich[7])

$$(2.52) \qquad |\xi| < \frac{1}{k[\sqrt{n}]}.$$

Da außerdem nur Brüche mit den Nennern

$$(2.53) \qquad k \leqq [\sqrt{n}]$$

in Betracht gezogen werden, folgt aus (2.51)

$$(2.54) \qquad \Big|f(x, \chi) - \frac{1}{\varphi(k)} C(\bar{\chi}_k) \Phi_n(\xi)\Big| < C K^\varepsilon n^{\Theta_1 + \frac{1}{4} + \varepsilon}$$

auf dem Fareybogen $\mathfrak{F}_{jk}$.

[7]) Hardy-Littlewood l. c. [1]) S. 5, 6.

3. Asymptotische Bestimmung der Koeffizienten einer Potenzreihe.

3.1. Es seien nun $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(m)}$ beliebige Charaktere mod K, unter denen auch gleiche vorkommen können. Zu diesen Charakteren bilden wir gemäß (2.11) die Funktionen $f(x, \chi^{(r)})$, $r = 1, 2, \ldots, m$. Es sei dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_m(n) x^n = f(x, \chi^{(1)}) \cdot f(x, \chi^{(2)}) \cdot \ldots \cdot f(x, \chi^{(m)}), \tag{3.11}$$

wo die $B_m(n)$ noch von den $\chi^{(r)}$ abhängen werden. Nach der Definition der $f(x, \chi^{(r)})$ ist nämlich

$$B_m(n) = \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=n} \chi^{(1)}(p_1)\chi^{(2)}(p_2)\ldots\chi^{(m)}(p_m). \tag{3.12}$$

Anderseits ergibt die Cauchysche Integralformel

$$B_m(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=e^{-\frac{1}{n}}} \frac{f(x, \chi^{(1)}) f(x, \chi^{(2)}) \ldots f(x, \chi^{(m)})}{x^{n+1}}\, dx,$$

und wenn wir die in 2.5 erwähnte Fareyzerschneidung einführen,

$$B_m(n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j \\ \overline{k} \\ k \leqq \sqrt{n}}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \frac{f(x, \chi^{(1)}) f(x, \chi^{(2)}) \ldots f(x, \chi^{(m)})}{x^{n+1}}\, dx. \tag{3.13}$$

Nun seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ beliebige zu K teilerfremde positive Zahlen, $0 < a_r < K$. Nach (3.12) ist dann

$$\sum_{\chi^{(1)}\ldots\chi^{(m)}} B_m(n)\, \overline{\chi}^{(1)}(a_1)\, \overline{\chi}^{(2)}(a_2)\ldots\overline{\chi}^{(m)}(a_m) = (\varphi(K))^m \sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_m=n \\ p_r \equiv a_r \bmod K}} 1, \tag{3.14}$$

wo in der ersten Summe $\chi^{(1)} \ldots \chi^{(m)}$ unabhängig voneinander sämtliche Charaktere mod K durchlaufen sollen. Anderseits folgt aus (3.13), wenn wir $A_m(n)$ zur Abkürzung einführen,

$$(\varphi(K))^m A_m(n) = \sum_{\chi^{(1)}\ldots\chi^{(m)}} B_m(n)\, \overline{\chi}^{(1)}(a_1)\, \overline{\chi}^{(2)}(a_2)\ldots\overline{\chi}^{(m)}(a_m) \tag{3.15}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j \\ \overline{k} \\ k \leqq \sqrt{n}}} \sum_{\chi^{(1)}\ldots\chi^{(m)}} \overline{\chi}^{(1)}(a_1)\ldots\overline{\chi}^{(m)}(a_m) \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \frac{f(x, \chi^{(1)}) \ldots f(x, \chi^{(m)})}{x^{n+1}}\, dx.$$

Wegen der beabsichtigten Approximation von $f(x, \chi)$ durch $\frac{1}{\varphi(k)} C(\overline{\chi}_k) \Phi_n(\xi)$ bringen wir die letzte Gleichung durch Hinzufügen von Gliedern mit paarweise entgegengesetzten Vorzeichen in die Gestalt:

(3.16) $$2\pi i\,\varphi(K)^m A_m(n)$$

$$= \sum_{\substack{j \\ k \\ k\le\sqrt{n}}} \frac{1}{\varphi(k)^m} \prod_{r=1}^{m} \sum_{\chi^{(r)}} \overline{\chi}^{(r)}(a_r)\, C(\overline{\chi}_k^{(r)}) \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^m(\xi)\,\frac{dx}{x^{n+1}}$$

$$+ \sum_{\substack{j \\ k \\ k\le\sqrt{n}}} \frac{1}{\varphi(k)^{m-1}} \prod_{r=1}^{m-1} \sum_{\chi^{(r)}} \overline{\chi}^{(r)}(a_r)\, C(\overline{\chi}_k^{(r)}) \times$$

$$\times \sum_{\chi^{(m)}} \overline{\chi}^{(m)}(a_m) \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^{m-1}(\xi) \Big\{ f(x, \chi^{(m)}) - \frac{C(\overline{\chi}_k^{(m)})\,\Phi_n(\xi)}{\varphi(k)} \Big\} \frac{dx}{x^{n+1}}$$

$$+ \sum_{\substack{j \\ k \\ k\le\sqrt{n}}} \frac{1}{\varphi(k)^{m-2}} \prod_{r=1}^{m-2} \sum_{\chi^{(r)}} \overline{\chi}^{(r)}(a_r)\, C(\overline{\chi}_k^{(r)}) \times$$

$$\times \sum_{\chi^{(m-1)}} \overline{\chi}^{(m-1)}(a_{m-1}) \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^{m-2}(\xi) \Big\{ f(x, \chi^{(m-1)}) - \frac{C(\overline{\chi}_k^{(m-1)})\,\Phi_n(\xi)}{\varphi(k)} \Big\}$$

$$\times \sum_{\chi^{(m)}} \overline{\chi}^{(m)}(a_m)\, f(x, \chi^{(m)})\, \frac{dx}{x^{n+1}}$$

$$+ \quad . \quad . \quad .

worin χ_d nur alle Charaktere mod $d = (K, k)$ durchläuft. Die Ausführung der Summation nach den χ_d ergibt

$$\sum_{\chi} \overline{\chi}(a)\, C(\overline{\chi}_k) = \varphi(d) \sum_{\substack{1 \le l \le k \\ l \equiv a \bmod d \\ (l,k)=1}} e^{2\pi i \frac{jl}{k}},$$

und nach Hilfssatz 2, (1.21), ist folglich

$$\sum_{\chi} \overline{\chi}(a)\, C(\overline{\chi}_k) = \varphi(d)\, \mu\left(\frac{k}{d}\right) e^{\frac{2\pi i j Q a}{d}} \quad \text{für} \quad \left(\frac{k}{d}, d\right) = 1, \tag{3.17}$$

$$= 0 \qquad \text{für} \quad \left(\frac{k}{d}, d\right) > 1$$

mit der in Hilfssatz 2 angegebenen Bedeutung von Q.

Ferner ist nach (2.11)

$$\sum_{\chi} \overline{\chi}(a)\, f(x, \chi) = \varphi(K) \sum_{p \equiv a \bmod K} x^p = F(x, a), \tag{3.18}$$

wie wir kurz schreiben wollen. Die Anwendung von (3.17) und (3.18) auf (3.16) ergibt

$$\begin{aligned}
.9)\quad & 2\pi i \varphi(K)^m A_m(n) - \sum_{\substack{k \le \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \left(\frac{\varphi(d)}{\varphi(k)} \mu\left(\frac{k}{d}\right)\right)^m \sum_{\substack{1 \le j \le k \\ (j,k)=1}} e^{\frac{2\pi i j Q}{d} \sum_{r=1}^{m} a_r} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^m(\xi) \frac{dx}{x^{n+1}} \\
= & \sum_{\substack{k \le \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \left(\frac{\varphi(d)}{\varphi(k)} \mu\left(\frac{k}{d}\right)\right)^{m-1} \sum_{\substack{1 \le j \le k \\ (j,k)=1}} e^{\frac{2\pi i j Q}{d} \sum_{r=1}^{m-1} a_r} \times \\
& \times \sum_{\chi^{(m)}} \overline{\chi}^{(m)}(a_m) \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^{m-1}(\xi) \left\{ f(x, \chi^{(m)}) - \frac{C(\overline{\chi}_k^{(m)})\, \Phi_n(\xi)}{\varphi(k)} \right\} \frac{dx}{x^{n+1}} \\
+ & \sum_{\substack{k \le \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \left(\frac{\varphi(d)}{\varphi(k)} \mu\left(\frac{k}{d}\right)\right)^{m-2} \sum_{\substack{1 \le j \le k \\ (j,k)=1}} e^{\frac{2\pi i j Q}{d} \sum_{r=1}^{m-2} a_r} \times \\
& \times \sum_{\chi^{(m-1)}} \overline{\chi}^{(m-1)}(a_{m-1}) \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^{m-2}(\xi) \left\{ f(x, \chi^{(m-1)}) - \frac{C(\overline{\chi}_k^{(m-1)})\, \Phi_n(\xi)}{\varphi(k)} \right\} F(x, a_m) \frac{dx}{x^{n+1}} \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & \sum_{\substack{k \le \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \left(\frac{\varphi(d)}{\varphi(k)} \mu\left(\frac{k}{d}\right)\right) \sum_{\substack{1 \le j \le k \\ (j,k)=1}} e^{\frac{2\pi i j Q}{d} a_1} \times \\
& \times \sum_{\chi^{(2)}} \overline{\chi}^{(2)}(a_2) \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n(\xi) \left\{ f(x, \chi^{(2)}) - \frac{C(\overline{\chi}_k^{(2)})\, \Phi_n(\xi)}{\varphi(k)} \right\} \prod_{r=3}^{m} F(x, a_r) \frac{dx}{x^{n+1}} \\
+ & \sum_{k \le \sqrt{n}} \sum_{\substack{1 \le j \le k \\ (j,k)=1}} \sum_{\chi^{(1)}} \overline{\chi}^{(1)}(a_1) \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \left\{ f(x, \chi^{(1)}) - \frac{C(\overline{\chi}_k^{(1)})\, \Phi_n(\xi)}{\varphi(k)} \right\} \prod_{r=2}^{m} F(x, a_r) \frac{dx}{x^{n+1}}.
\end{aligned}$$

3.2. In (3.19) führen wir gemäß (2.14) ξ als Integrationsvariable ein durch

$$\frac{dx}{x^{n+1}} = 2\pi i\, e^{1-2\pi i n\left(\frac{j}{k}+\xi\right)} d\xi$$

und schätzen die rechte Seite unter Zuhilfenahme von (2.54) nach oben ab

$$(3.21)\quad \left|\varphi(K)^m A_m(n) - \sum_{\substack{k\leqq\sqrt{n}\\ \left(\frac{k}{d},d\right)=1}} \left(\frac{\mu\left(\frac{k}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^m \sum_{\substack{1\leqq j\leqq k\\ (j,k)=1}} e^{2\pi i j\left(\frac{Q}{d}\sum_{r=1}^{m} a_r - \frac{n}{k}\right)} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^m(\xi)\, e^{1-2\pi i n\xi}\right.$$

$$\leqq C K^{\varepsilon} n^{\Theta_1+\frac{1}{2}+\varepsilon}\Bigg\{ \sum_{\substack{k\leqq\sqrt{n}\\ \left(\frac{k}{d},d\right)=1}} \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^{m-1} \varphi(K) \sum_{\substack{1\leqq j\leqq k\\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |\Phi_n(\xi)|^{m-1} d\xi$$

$$+ \sum_{\substack{k\leqq\sqrt{n}\\ \left(\frac{k}{d},d\right)=1}} \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^{m-2} \varphi(K) \sum_{\substack{1\leqq j\leqq k\\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |\Phi_n(\xi)|^{m-2} |F(x,a_m)|\, d\xi$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \sum_{\substack{k\leqq\sqrt{n}\\ \left(\frac{k}{d},d\right)=1}} \frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)} \varphi(K) \sum_{\substack{1\leqq j\leqq k\\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |\Phi_n(\xi)| \prod_{r=3}^{m} |F(x,a_r)|\, d\xi$$

$$+ \sum_{k\leqq\sqrt{n}} \varphi(K) \sum_{\substack{1\leqq j\leqq k\\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \prod_{r=2}^{m} |F(x,a_r)|\, d\xi \Bigg\}.$$

Aus der Definition (2.33) folgt

$$(3.22)\quad |\Phi_n(\xi)| \leqq C \int_{\Theta_1}^{1} \frac{d\sigma}{\left(\frac{1}{n}+2\pi|\xi|\right)^{\sigma}} \leqq \frac{C}{\left(\frac{1}{n}+2\pi|\xi|\right)^{\Theta_1}} + \frac{C}{\frac{1}{n}+2\pi|\xi|},$$

und da speziell auf dem Fareybogen $\mathfrak{F}_{jk}$ für $|\xi|$ die Einschränkung (2.52) besteht, so ist in den Integralen von (3.21) überall

$$(3.23)\qquad |\Phi_n(\xi)| \leqq \frac{C}{\frac{1}{n}+2\pi|\xi|}.$$

Ferner ist nach (3.18) und wegen $|x| = e^{-\frac{1}{n}}$

$$|F(x,a)| \leqq \varphi(K) \sum_{p\equiv a \bmod K} e^{-\frac{p}{n}} < K\sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{Kr+a}{n}} < K\sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{Kr}{n}}$$

$$= \frac{K}{1-e^{-\frac{K}{n}}} = \frac{Ke^{\frac{K}{n}}}{e^{\frac{K}{n}}-1} < \frac{Ke^{\frac{K}{n}}}{\frac{K}{n}} = n e^{\frac{K}{n}},$$

und da wir ohne weiteres

$$n > K \tag{3.24}$$

annehmen können, so ist auf $\mathfrak{F}_{jk}$

$$|F(x,a)| < Cn. \tag{3.25}$$

Für das Folgende bemerken wir noch, daß

$$\sum_{k\leq\sqrt{n}} \sum_{\substack{1\leq j\leq k\\(j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |F(x,a)|^2 d\xi$$

$$= \int_0^1 \left| F\left(e^{-\frac{1}{n}+2\pi i\xi}, a\right)\right|^2 d\xi = \varphi(K)^2 \sum_{p\equiv a \bmod K} e^{-\frac{2p}{n}} < \frac{1}{2} Kn e^{\frac{2K}{n}},$$

und wegen (3.24)

$$\sum_{k\leq\sqrt{n}} \sum_{\substack{1\leq j\leq k\\(j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |F(x,a)|^2 d\xi < CKn \tag{3.26}$$

ist. Endlich brauchen wir noch die Abschätzung für $C > u > 1$

$$\int_{\mathfrak{F}_{jk}} |\Phi_n(\xi)|^u d\xi \leqq C \int_0^{\frac{1}{k[\sqrt{n}]}} \frac{d\xi}{\left(\frac{1}{n}+2\pi\xi\right)^u} = C \int_0^{\frac{2\pi}{k[\sqrt{n}]}} \frac{d\xi}{\left(\frac{1}{n}+\xi\right)^u} \tag{3.27}$$

$$< C \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^u} = C n^{u-1},$$

wobei von (2.52) und (3.23) Gebrauch gemacht worden ist.

3.3. In der geschweiften Klammer auf der rechten Seite von (3.21) sind alle Glieder, außer dem ersten und dem letzten, die besonders betrachtet werden sollen, von folgender Bauart:

$$U_q = \sum_{\substack{k\leq\sqrt{n}\\(\frac{k}{d},d)=1}} \sum_{\substack{1\leq j\leq k\\(j,k)=1}} \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^q \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |\Phi_n(\xi)|^q \prod_{r=q+2}^{m} |F(x,a_r)|\, d\xi \tag{3.31}$$

$$q = 1, 2, \ldots, (m-2),$$

abgesehen von einem Faktor $\varphi(K)$. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, zuerst auf die Integrale, dann auf die Summen angewandt, ist

$$U_q^2 \leqq \left\{ \sum_{\substack{k=\sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^q \sqrt{\int_{\mathfrak{J}_{jk}} |\Phi_n(\xi)|^{2q} \prod_{r=q+2}^{m-1} |F(x,a_r)|^2 d\xi} \sqrt{\int_{\mathfrak{J}_{jk}} |F(x,a_m)|^2 \right.$$

$$\leqq \sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^{2q} \int_{\mathfrak{J}_{jk}} |\Phi_n(\xi)|^{2q} \prod_{r=q+2}^{m-1} |F(x,a_r)|^2 d\xi \times$$

$$\times \sum_{k \leqq \sqrt{n}} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{J}_{jk}} F(x,a_m)|^2 d\xi$$

und nach (3.25) und (3.26)

$$U_q^2 \leqq C n^{2(m-q-2)} K n \sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^{2q} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{J}_{jk}} |\Phi_n(\xi)|^{2q} d\xi,$$

also nach (3.27) und wegen $q \geqq 1$

$$U_q^2 \leqq C K n^{2(m-2)} \sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \varphi(k) \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^2 = C K n^{2(m-2)} \sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \frac{\varphi(d)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}. \tag{3.32}$$

Nun ist $\left(\frac{k}{d}, d\right) = \left(\frac{k}{d}, (k, K)\right) = \left(\frac{k}{d}, K\right)$ und dabei d/K. Setzen wir $\frac{k}{d} = h$, so läßt (3.32) sich schreiben

$$U_q^2 \leqq C K n^{2(m-2)} \sum_{d/K} \varphi(d) \sum_{\substack{h \leqq \frac{\sqrt{n}}{d} \\ (h,K)=1}} \frac{1}{\varphi(h)} \leqq C K n^{2(m-2)} \sum_{d/K} \varphi(d) \sum_{h \leqq \sqrt{n}} \frac{\log h}{h}$$

$$< C K n^{2(m-2)+\varepsilon} \sum_{d/K} \varphi(d) = C K^2 n^{2(m-2)+\varepsilon},$$

also

$$U_q < C K n^{m-2+\varepsilon}. \tag{3.33}$$

Das letzte Glied der geschweiften Klammer von (3.21) ist, wieder abgesehen von einem Faktor $\varphi(K)$,

$$V = \sum_{k \leqq \sqrt{n}} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{J}_{jk}} \prod_{r=2}^{m} |F(x,a_r)| \, d\xi. \tag{3.34}$$

Wir setzen von nun an

$$m \geqq 3 \tag{3.35}$$

voraus und haben dann nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$V^2 \leqq \left\{ \sum_{k \leqq \sqrt{n}} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \sqrt{\int_{\mathfrak{F}_{jk}} |F(x,a_2)|^2 \, d\xi} \sqrt{\int_{\mathfrak{F}_{jk}} \prod_{r=3}^{m} |F(x,a_r)|^2 \, d\xi} \right\}^2$$

$$\leqq \sum_{k \leqq \sqrt{n}} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |F(x,a_2)|^2 \, d\xi \cdot \sum_{k \leqq \sqrt{n}} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \prod_{r=3}^{m} |F(x,a_r)|^2 \, d\xi$$

und nach (3.25)

$$V^2 \leqq C n^{m-3} \sum_{k \leqq \sqrt{n}} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |F(x,a_2)|^2 \, d\xi \cdot \sum_{k \leqq \sqrt{n}} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |F(x,a_3)|^2 \, d\xi,$$

und folglich nach (3.26)

$$V \leqq C K n^{\frac{m-1}{2}},$$

und wegen (3.35) erst recht

$$V \leqq C K n^{m-2+\varepsilon}. \tag{3.36}$$

Das erste Glied der geschweiften Klammer in (3.21) schließlich ist, abgesehen von dem Faktor $\varphi(K)$,

$$U_{m-1} = \sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)} \right)^{m-1} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} |\Phi(\xi)|^{m-1} \, d\xi \tag{3.37}$$

$$\leqq C n^{m-2} \sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \varphi(k) \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)} \right)^{m-1} \leqq C n^{m-2} \sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, d\right)=1}} \frac{\varphi(d)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}.$$

Bei diesen Abschätzungen ist (3.27) und (3.35) herangezogen worden. Durch die gleiche Überlegung, die von (3.32) zu (3.33) führte, gelangt man nun von (3.37) zu

$$U_{m-1} \leqq C K n^{m-2+\varepsilon}. \tag{3.38}$$

Die Eintragung von (3.31), (3.33), (3.34) (3.36) und (3.38) in (3.21) ergibt nun, indem wir zugleich wieder $\left(\frac{k}{d}, d\right) = \left(\frac{k}{d}, K\right)$ setzen,

$$\left| \varphi(K)^m A_m(n) - \sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, K\right)=1}} \left(\frac{\mu\left(\frac{k}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)} \right)^m \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} e^{2\pi i j \left(\frac{Q}{d} \sum_{r=1}^{m} a_r - \frac{n}{k} \right)} \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^m(\xi) e^{1-2\pi i n \xi} \, d\xi \right|$$

$$\leqq C K^{2+\varepsilon} n^{m-1+\left(\Theta_1 - \frac{3}{4}\right)+2\varepsilon}. \tag{3.39}$$

3.4. Es sei $\mathfrak{E}_{jk}$ die Komplementärmenge zu $\mathfrak{F}_{jk}$ in bezug auf die ganze ξ-Achse $-\infty < \xi < +\infty$. Dann ist

$$(3.41)\quad \left| \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^m(\xi) e^{1-2\pi i n\xi}\, d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^m(\xi) e^{1-2\pi i n\xi}\, d\xi \right| \leqq e \int_{\mathfrak{E}_{jk}} |\Phi_n^m(\xi)|\, d\xi.$$

Da bekanntlich in den Variablen ξ die Endpunkte des Intervalls $\mathfrak{F}_{jk}$ vom Nullpunkt mindestens den Abstand $\frac{1}{2k\sqrt{n}}$ haben[8]), so ist

$$\int_{\mathfrak{E}_{jk}} |\Phi_n^m(\xi)|\, d\xi \leqq 2 \int_{\frac{1}{2k\sqrt{n}}}^{\infty} |\Phi_n^m(\xi)|\, d\xi$$

und nach (3.22)

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{E}_{jk}} |\Phi_n^m(\xi)|\, d\xi &\leqq C \int_{\frac{1}{2k\sqrt{n}}}^{\infty} \frac{d\xi}{\left(\frac{1}{n}+2\pi\xi\right)^{m\Theta_1}} + C \int_{\frac{1}{2k\sqrt{n}}}^{\infty} \frac{d\xi}{\left(\frac{1}{n}+2\pi\xi\right)^{m}} \\ &= C\left(\frac{\pi}{k\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)^{-m\Theta_1+1} + C\left(\frac{\pi}{k\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)^{-m+1} \\ &< C\left(\frac{\pi}{k\sqrt{n}}\right)^{-m\Theta_1+1} + C\left(\frac{\pi}{k\sqrt{n}}\right)^{-m+1} < C(k\sqrt{n})^{m-1},\end{aligned}$$

also wegen (3.41)

$$(3.42)\quad \left| \int_{\mathfrak{F}_{jk}} \Phi_n^m(\xi) e^{1-2\pi i n\xi}\, d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^m(\xi) e^{1-2\pi i n\xi}\, d\xi \right| < C(k\sqrt{n})^{m-1}.$$

Dadurch erhalten wir aus (3.39)

$$(3.43)\quad \left| \varphi(K)^m A_m(n) - \sum_{\substack{k\leqq\sqrt{n}\\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}} \left(\frac{\mu\left(\frac{k}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^m \sum_{\substack{1\leqq j\leqq k\\ (j,k)=1}} e^{2\pi i j\left(\frac{Q}{d}\sum_{r=1}^{m} a_r - \frac{n}{k}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^m(\xi) e^{1-2\pi i n} \right.$$

$$\left. \leqq C K^{2+\varepsilon} n^{m-1+\left(\Theta_1-\frac{3}{4}\right)+2\varepsilon} + C n^{\frac{m-1}{2}} \sum_{\substack{k\leqq\sqrt{n}\\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}} k^{m-1} \frac{1}{\left(\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\right)^m} \varphi(k). \right.$$

Nun ist

$$\sum_{\substack{k\leqq\sqrt{n}\\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}} k^{m-1} \frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)^m} \varphi(k) = \sum_{\substack{k\leqq\sqrt{n}\\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}} d^{m-1} \varphi(d) \left(\frac{\frac{k}{d}}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^{m-1} < \sum_{d/K} d^m \sum_{\substack{h\leqq\frac{\sqrt{n}}{d}\\ (h,K)=1}} \left(\frac{h}{\varphi(h)}\right)$$

$$< C \sum_{d/K} d^m \sum_{h\leqq\frac{\sqrt{n}}{d}} (\log h)^{m-1} < C \sum_{d/K} d^m \frac{\sqrt{n}}{d} (\log n)^{m-1} < C n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{d/K} d^{m-1},$$

[8]) l. c. [1]), S. 5, 6.

und da, wenn $K = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ die Primfaktorenzerlegung von K ist,

$$(3.44)\quad \sum_{d/K} d^{m-1} = \left(1 + p_1^{m-1} + \dots + p_1^{\alpha_1(m-1)}\right) \dots \left(1 + p_\lambda^{m-1} + \dots + p_\lambda^{\alpha_\lambda(m-1)}\right)$$

$$< \frac{p_1^{\alpha_1(m-1)}}{1 - \frac{1}{p_1^{m-1}}} \dots \frac{p_\lambda^{\alpha_\lambda(m-1)}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{m-1}}} < K^{m-1} \zeta(m-1),$$

so ist schließlich

$$\sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, K\right) = 1}} k^{m-1} \frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)^m} \varphi(k) < C K^{m-1} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

also wegen (3.43)

$$\left| \varphi(K)^m A_m(n) - \sum_{\substack{k \leqq \sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d}, K\right) = 1}} \left(\frac{\mu\left(\frac{k}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)} \right)^m \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} e^{2\pi i j \left(\frac{Q}{d} \sum_{r=1}^{m} a_r - \frac{n}{k} \right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^m(\xi) e^{1-2\pi i n \xi} d\xi \right|$$

$$< C K^{2+\varepsilon} n^{m-1+\left(\Theta_1 - \frac{3}{4}\right)+2\varepsilon} + C K^{m-1} n^{\frac{m}{2}+\varepsilon}.$$

4. Umformung eines Integrals.

4.1. In (3.45) ist die asymptotische Bestimmung von $A_m(n)$ im wesentlichen geleistet. Ehe wir jedoch an die Umformung des komplizierten asymptotischen Ausdrucks gehen, werten wir noch das in (3.45) auftretende Integral asymptotisch aus. Es ist nach Definition (2.33)

$$(4.11)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^m(\xi) e^{1-2\pi i n \xi} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{\Theta_1}^{1} \dots \int_{\Theta_1}^{1} \frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\sigma_2)\dots\Gamma(\sigma_m)}{\left(\frac{1}{n} - 2\pi i \xi\right)^{\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_m}} d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_m \right\} e^{1-2\pi i n \xi} d\xi.$$

Wegen $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m \geqq 3\Theta_1 > 1$ läßt sich rechts die Integrationsreihenfolge vertauschen. Nun ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{1-2\pi i n \xi}}{\left(\frac{1}{n} - 2\pi i \xi\right)^{\sigma_1+\dots+\sigma_m}} d\xi = n^{\sigma_1+\dots+\sigma_m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{1-2\pi i n \xi}}{(1 - 2\pi i n \xi)^{\sigma_1+\dots+\sigma_m}} d\xi$$

$$= \frac{n^{\sigma_1+\dots+\sigma_m-1}}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^s}{s^{\sigma_1+\dots+\sigma_m}} ds = \frac{n^{\sigma_1+\dots+\sigma_m-1}}{\Gamma(\sigma_1+\dots+\sigma_m)},$$

worin das letzte Integral ausgewertet wird durch Umbiegen des Integrationsweges um die negativ reelle Achse, die als Schnitt für die Funktion $s^{\sigma_1+\ldots+\sigma_m}$ anzusehen ist. Aus (4.11) geht somit hervor

$$(4.12)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^m(\xi)\, e^{1-2\pi i n\xi}\, d\xi = \frac{1}{n}\int_{\Theta_1}^{1}\cdots\int_{\Theta_1}^{1} \frac{\Gamma(\sigma_1)\,\Gamma(\sigma_2)\ldots\Gamma(\sigma_m)}{\Gamma(\sigma_1+\ldots+\sigma_m)}\, n^{\sigma_1+\ldots+\sigma_m}\, d\sigma_1\ldots d\sigma_m.$$

4. 2. Um das m-fache Integral asymptotisch auszuwerten, setzen wir

$$(4.21)\qquad G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) = \frac{\Gamma(\sigma_1)\,\Gamma(\sigma_2)\ldots\Gamma(\sigma_m)}{\Gamma(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m)}.$$

Dann ist

$$(4.22)\qquad H_m(n) = \int_{\Theta_1}^{1}\cdots\int_{\Theta_1}^{1} G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)\, n^{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m}\, d\sigma_1\, d\sigma_2\ldots d\sigma_m$$

$$= \int_{\Theta_1}^{1}\cdots\int_{\Theta_1}^{1} n^{\sigma_1+\ldots+\sigma_{m-1}} \left\{\int_{\Theta_1}^{1} G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)\, n^{\sigma_m}\, d\sigma_m\right\} d\sigma_1\ldots d\sigma_{m-1}$$

und darin

$$\int_{\Theta_1}^{1} G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)\, n^{\sigma_m}\, d\sigma_m = \int_{\Theta_1}^{1} G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)\, n^{\sigma_m}\, d\sigma_m$$

$$+\int_{\Theta_1}^{1} (G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_m) - G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1))\, n^{\sigma_m}\, d\sigma_m.$$

Nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung ist

$$|G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_m) - G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)| < C(1-\sigma_m),$$

also

$$\int_{\Theta_1}^{1} G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)\, n^{\sigma_m}\, d\sigma_m$$

$$= G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)\int_{\Theta_1}^{1} n^{\sigma_m}\, d\sigma_m + O\left(\int_{\Theta_1}^{1} (1-\sigma_m)\, n^{\sigma_m}\, d\sigma_m\right)$$

$$= G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)\frac{n}{\log n} + O(n^{\Theta_1})$$

$$+ O\left(-(1-\Theta_1)\frac{n^{\Theta_1}}{\log n} + \int_{\Theta_1}^{1} \frac{n^{\sigma_m}}{\log n}\, d\sigma_m\right)$$

$$= G(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, 1)\frac{n}{\log n} + O\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right).$$

In (4.22) eingetragen ergibt dies

$$H_m(n) = \frac{n}{\log n} \int_{\Theta_1}^{1} \dots \int_{\Theta_1}^{1} G(\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, 1)\, n^{\sigma_1+\dots+\sigma_{m-1}} d\sigma_1 \dots d\sigma_{m-1}$$

$$+ O\left(\frac{n}{(\log n)^2} \int_{\Theta_1}^{1} \dots \int_{\Theta_1}^{1} n^{\sigma_1+\dots+\sigma_{m-1}} d\sigma_1 \dots d\sigma_{m-1}\right)$$

$$= \frac{n}{\log n} \int_{\Theta_1}^{1} \dots \int_{\Theta_1}^{1} G(\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, 1)\, n^{\sigma_1+\dots+\sigma_{m-1}} d\sigma_1 \dots d\sigma_{m-1}$$

$$+ O\left(\frac{n^m}{(\log n)^{m+1}}\right).$$

Hiermit ist eine Zurückführung des m-fachen Integrals auf ein $(m-1)$-faches von gleichem Bau zustande gebracht. Durch Wiederholung des Verfahrens kommt man schrittweise bis zu

$$H_m(n) = \left(\frac{n}{\log n}\right)^m G(1, 1, \dots, 1) + O\left(\frac{n^m}{(\log n)^{m+1}}\right).$$

Unter Berücksichtigung von (4.21) ergibt sich daher aus (4.12)

$$(4.23) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^m(\xi)\, e^{1-2\pi i n\xi} d\xi = \frac{1}{(m-1)!} \frac{n^{m-1}}{(\log n)^m} + O\left(\frac{n^{m-1}}{(\log n)^{m+1}}\right).$$

4. 3. Während hier das Fehlerglied nur von der Ordnung $\log n$ niedriger als das Hauptglied ist, wollen wir nun eine Formel für das Integral herleiten, in der das Fehlerglied eine um $n^{1-\Theta_1}$ niedrigere Ordnung als das Hauptglied aufweist, das seinerseits dafür aber nicht in der expliziten Form von (4.23), sondern selbst als ein bemerkenswertes Integral auftreten wird. Wir gehen zu diesem Zwecke aus von der für $\sigma_r > 0$ gültigen Gleichung

$$(4.31) \qquad \frac{\Gamma(\sigma_1)\,\Gamma(\sigma_2)\dots\Gamma(\sigma_m)}{\Gamma(\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_m)}$$

$$= \int_{\substack{0<y_q \\ y_1+\dots+y_{m-1}<1}} \dots \int y_1^{\sigma_1-1} y_2^{\sigma_2-1} \dots y_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1} \Big(1 - \sum_{q=1}^{m-1} y_q\Big)^{\sigma_m-1} dy_1 \dots dy_{m-1},$$

die man sofort aus einer Dirichletschen Formel[9]) ableitet:

---

[9]) G. P. Lejeune Dirichlet, Werke I, S. 391—410, vgl. auch E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 3d edit., Cambridge (1920), S. 258.

$$\int\limits_{\substack{0<y_q \\ y_1+\ldots+y_{m-1}<1}} \ldots \int (1-\Sigma y_j)^{\sigma_m-1} y_1^{\sigma_1-1} \ldots y_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1}\, dy_1 \ldots dy_{m-1}$$

$$= \frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\sigma_2)\ldots\Gamma(\sigma_{m-1})}{\Gamma(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{m-1})} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\sigma_m-1} \tau^{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{m-1}-1}\, d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\sigma_2)\ldots\Gamma(\sigma_{m-1})}{\Gamma(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{m-1})} \mathsf{B}(\sigma_m, \sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{m-1}),$$

woraus (4.31) folgt. Durch Eintragen von (4.31) in (4.12) ergibt sich

$$(4.32) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^m(\xi)\, e^{1-2\pi i n\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_{\vartheta_1 \leqq \sigma_r \leqq 1} \ldots \int n^{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m} \int\limits_{\substack{0<y_q \\ y_1+\ldots+y_{m-1}<1}} \ldots \int y_1^{\sigma_1-1} \ldots y_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1} \Big(1-\sum_{q=1}^{m-1} y_q\Big)^{\sigma_m-1} dy_1 \ldots dy_{m-1}\, d\sigma_1$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_{\substack{\frac{2}{n} \leqq \vartheta_q \\ \sum \vartheta_q \leqq 1-\frac{2}{n}}} \ldots \int \int\limits_{\vartheta_1 \leqq \sigma_r \leqq 1} \ldots \int n^{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m} y_1^{\sigma_1-1} \ldots y_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1} \Big(1-\sum_{q=1}^{m-1} y_q\Big)^{\sigma_m-1} d\sigma_1 \ldots d\sigma_m\, dy_1 \ldots$$

$$+ \frac{1}{n} \int\limits_{\vartheta_1 \leqq \sigma_r \leqq 1} \ldots \int n^{\sigma_1+\ldots+\sigma_m} \int\limits_{R_y} \ldots \int y_1^{\sigma_1-1} \ldots y_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1} \Big(1-\sum_{q=1}^{m-1} y_q\Big)^{\sigma_m-1} dy_1 \ldots dy_{m-1}\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_m$$

worin die Vertauschung der Integrationsreihenfolge links erlaubt ist, da es sich um positive Integranden handelt, und worin R_y diejenige Punktmenge im Raum der $y_1 \ldots y_{m-1}$ bedeutet, die der Menge $0 = y_q$, $\Sigma' y_q < 1$, aber nicht der Menge $\frac{2}{n} \leqq q$, $\Sigma y_q \leqq 1 - \frac{2}{n}$ angehört, d. h. R_y ist die Menge aller $(y_1 \ldots y_{m-1})$, die den Ungleichungen

$$(4.33) \qquad 0 < y_1, \ \ldots, \ 0 < y_{m-1}, \ \sum_{q=1}^{m-1} y_q < 1$$

und dazu *mindestens einer* von den Ungleichungen

$$0 < y_1 < \frac{2}{n}, \ \ldots, \ 0 < y_{m-1} < \frac{2}{n}, \quad 1 - \frac{2}{n} < \sum_{q=1}^{m-1} y_q < 1$$

genügt. Wegen der positiven Integranden gilt also

$$(4.34) \qquad \int\limits_{R_y} \ldots \int < \int\limits_{0<y_1<\frac{2}{k}} \ldots \int + \int\limits_{0<y_2<\frac{2}{n}} \ldots \int + \ldots + \int\limits_{0<y_{m-1}<\frac{2}{n}} \ldots \int + \int\limits_{1-\frac{2}{n}<\Sigma y_q<1} \ldots \int$$

wobei die nicht aufgeschriebenen Ungleichungen im übrigen aus (4.33) zu entnehmen sind. Nun ist

$$(4.35)\quad \int\limits_{\substack{0<y_1<\frac{2}{n}\\ 0<y_q\\ \sum y_q<1}}\dots\int y_1^{\sigma_1-1}y_2^{\sigma_2-1}\dots y_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1}\Big(1-\sum_{q=1}^{m-1}y_q\Big)^{\sigma_m-1}dy_1\dots dy_{m-1}$$

$$=\int\limits_0^{\frac{2}{n}} y_1^{\sigma_1-1}(1-y_1)^{\sigma_2+\dots+\sigma_m-1}\int\limits_{\substack{0<y_2\\ \vdots\\ 0<y_{m-1}\\ \sum_2^{m-1}y_q<1-y_1}}\dots\int\Big(\frac{y_2}{1-y_1}\Big)^{\sigma_2-1}\dots\Big(\frac{y_{m-1}}{1-y_1}\Big)^{\sigma_{m-1}-1}\Big(1-\frac{\sum_{q=2}^{m-1}y_q}{1-y_1}\Big)^{\sigma_m-1}\frac{dy_2}{1-y_1}\dots\frac{dy_{m-1}}{1-y_1}dy_1$$

$$=\int\limits_0^{\frac{2}{n}} y_1^{\sigma_1-1}(1-y_1)^{\sigma_2+\dots+\sigma_m-1}\int\limits_{\substack{0<u_2\\ \vdots\\ 0<u_{m-1}\\ \sum_2^{m-1}u_q<1}}\dots\int u_2^{\sigma_2-1}\dots u_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1}\Big(1-\sum_{q=2}^{m-1}u_q\Big)^{\sigma_m-1}du_2\dots du_{m-1}dy_1$$

$$<\int\limits_0^{\frac{2}{n}} y_1^{\sigma_1-1}dy_1\int\limits_{\substack{0<u_2\\ \vdots\\ 0<u_{m-1}\\ \sum_2^{m-1}u_q<1}}\dots\int u_2^{\Theta_1-1}\dots u_{m-1}^{\Theta_1-1}\Big(1-\sum_{q=2}^{m-1}u_q\Big)^{\Theta_1-1}du_2\dots du_{m-1},$$

wobei $m\geqq 3$ insofern benutzt ist, als $\sigma_2+\dots+\sigma_m-1\geqq\sigma_2+\sigma_3-1>0$, und daher

$$(1-y_1)^{\sigma_2+\dots+\sigma_m-1}\leqq 1$$

in Rechnung gezogen worden ist. Mit Hilfe von (4.31) geht aus (4.35) schließlich hervor:

$$(4.36)\quad \int\limits_{\substack{0<y_1<\frac{2}{n}\\ 0<y_q\\ \sum y_q<1}}\dots\int y_1^{\sigma_1-1}y_2^{\sigma_2-1}\dots y_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1}(1-\sum y_q)^{\sigma_m-1}dy_1\dots dy_{m-1}$$

$$<\frac{\Gamma(\Theta_1)^{m-1}}{\Gamma((m-1)\Theta_1)}\frac{1}{\sigma_1}\Big(\frac{2}{n}\Big)^{\sigma_1}.$$

Ganz entsprechend sind die nächsten $(m-2)$ Integrale auf der rechten Seite von (4.34) zu behandeln; es bleibt nur noch das letzte abzuschätzen. Dieses hat die Gestalt

$$\int\limits_{\substack{1-\frac{2}{n}<\sum_{q=1}^{m-1}y_q<1\\ 0<y_q}}\dots\int y_1^{\sigma_1-1}y_2^{\sigma_2-1}\dots y_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1}(1-\sum_{q=1}^{m-1}y_q)^{\sigma_m-1}dy_1\,dy_2\dots dy_{m-1}.$$

Es geht durch die Substitution

$$1-\sum_{q=1}^{m-1} y_q = y_1',\ y_2 = y_2',\ \ldots,\ y_{m-1} = y_{m-1}',$$

(folglich $y_1 = 1-\sum_{q=1}^{m-1} y_q'$) über in

$$\int\limits_{\substack{0<y_1'<\frac{2}{n}\\ 0<y_q'\\ \sum y_q'<1}}\ldots\int (1-\sum_{q=1}^{m-1} y_q')^{\sigma_1-1} y_2'^{\sigma_2-1}\ldots y_{m-1}'^{\sigma_{m-1}-1} y_1'^{\sigma_m-1}\, dy_1' dy_2'\ldots dy_{m-1}',$$

nimmt also die Gestalt der übrigen Integrale an und wird daher gleichfalls durch (4.36) abgeschätzt. Daher ergeben (4.36) und (4.34) zusammen

$$\int\limits_{R_y}\ldots\int < \frac{\Gamma(\Theta_1)^{m-1}\cdot}{\Gamma((m-1)\Theta_1)}\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{\sigma_q}\left(\frac{2}{n}\right)^{\sigma_q},$$

wodurch aus (4.32) nach Ausführung der Integrationen nach den σ_r hervorgeht:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n(\xi)^m e^{1-2\pi i n\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_{\substack{\frac{2}{n}\leqq y_q\\ \sum_1^{m-1} y_q\leqq 1-\frac{2}{n}}}\ldots\int\left[\frac{n^{\sigma_1} y_1^{\sigma_1-1}}{\log(n y_1)}\right]_{\Theta_1}^{1}\ldots\left[\frac{n^{\sigma_{m-1}} y_{m-1}^{\sigma_{m-1}-1}}{\log(n y_{m-1})}\right]_{\Theta_1}^{1}\left[\frac{n^{\sigma_m}(1-\sum y_q)^{\sigma_m-1}}{\log(n(1-\sum y_q))}\right]_{\Theta_1}^{1} dy_1\ldots dy_{m-1}$$

$$+ O\left(\frac{n^{m-2}}{(\log n)^{m-1}}\right).$$

Daher ist schließlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n^m(\xi)\, e^{1-2\pi i n\xi}\, d\xi = L_m(n) + O(n^{m-2+\Theta_1}) \tag{4.371}$$

mit

$$L_m(n) = \int\limits_{\substack{2\leqq v_q\\ \sum_{q=1}^{m-1} v_q\leqq n-2}}\ldots\int \frac{dv_1\, dv_2\ldots dv_{m-1}}{\log v_1\log v_2\ldots\log v_{m-1}\log(n-\sum v_q)}. \tag{4.372}$$

5. Summation der singulären Reihe und Beweis des Hauptsatzes.

5.1. Wird auf der linken Seite von (3.45) über *alle* k statt nur über $k\leqq\sqrt{n}$ summiert, so entsteht dadurch ein Fehler von der Größe

$$\left|\sum_{\substack{k>\sqrt{n}\\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}}\left(\frac{\mu\left(\frac{k}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^m\sum_{\substack{1\leqq j\leqq k\\ (j,k)=1}} e^{2\pi i j\left(\frac{Q}{d}\sum_{r=1}^{m} a_r-\frac{n}{k}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n^m(\xi)\, e^{1-2\pi i n\xi}\, d\xi\right|,$$

der nach (4.23) kleiner ist als

$$C \sum_{\substack{k>\sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}} \frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)^m} \varphi(k)\, n^{m-1} = C n^{m-1} \sum_{\substack{k>\sqrt{n} \\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}} \varphi(d) \frac{1}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)^{m-1}}$$

$$= C n^{m-1} \sum_{d/K} \varphi(d) \sum_{\substack{(h,K)=1 \\ h>\frac{\sqrt{n}}{d}}} \frac{1}{\varphi(h)^{m-1}} < C n^{m-1} \sum_{d/K} \varphi(d) \sum_{h>\frac{\sqrt{n}}{d}} \frac{1}{h^{m-1-\varepsilon}}$$

$$< C n^{m-1} \sum_{d/K} \varphi(d) \left(\frac{d}{\sqrt{n}}\right)^{m-2-\varepsilon} < C n^{\frac{m}{2}+\varepsilon} \sum_{d/K} d^{m-1} < C K^{m-1} n^{\frac{m}{2}+\varepsilon},$$

letzteres nach (3.44), stets unter der Voraussetzung $m \geqq 3$. Ein Fehlerglied von genau der gleichen Größenordnung findet sich aber schon auf der rechten Seite von (3.45), so daß diese Ungleichung ohne weiteres geschrieben werden kann

$$\left| \varphi(K)^m A_m(n) - \sum_{\substack{k=1 \\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}}^{\infty} \left(\frac{\mu\left(\frac{k}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^m \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} e^{2\pi i j \left(\frac{Q}{d} \sum_{r=1}^{m} a_r - \frac{n}{k}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^m(\xi)\, e^{1-2\pi i n \xi} d\xi \right|$$

$$< C K^{2+\varepsilon} n^{m-1+\left(\Theta_1-\frac{3}{4}\right)+2\varepsilon} + C K^{m-1} n^{\frac{m}{2}+\varepsilon}. \tag{1}$$

Um endlich auch (4.371) eintragen zu können, benötigen wir noch die Abschätzung

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}}^{\infty} \left(\frac{\mu\left(\frac{k}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^m \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} e^{2\pi i j \left(\frac{Q}{d} \sum_{r=1}^{m} a_r - \frac{n}{k}\right)} \right| < \sum_{\substack{k=1 \\ \left(\frac{k}{d},K\right)=1}}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{\left(\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\right)^m}$$

$$= \sum_{d/K} \varphi(d) \sum_{(h,K)=1} \frac{1}{\varphi(h)^{m-1}} < C \sum_{d/K} \varphi(d) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{m-1-\varepsilon}} < C \sum_{d/K} \varphi(d) = C K.$$

Das O-Glied von (4.371) veranlaßt also in (5.11) einen Fehler höchstens von der Größe $C K n^{m-2+\Theta_1}$; dieser Fehler läßt sich jedoch sowohl wegen der Größenordnung von K, als auch wegen der von n in das erste Fehlerglied auf der rechten Seite von (5.11) stecken, so daß schließlich aus (5.11) und (4.371) hervorgeht:

$$|\varphi(K)^m A_m(n) - L_m(n)\, \mathfrak{S}_m(n)|$$

$$< C K^{2+\varepsilon} n^{m-1+\left(\Theta_1-\frac{3}{4}\right)+2\varepsilon} + C K^{m-1} n^{\frac{m}{2}+\varepsilon} \tag{5.12}$$

mit der Abkürzung

$$(5.13)\qquad \mathfrak{S}_m(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ \left(\frac{k}{d}, K\right)=1}}^{\infty} \left(\frac{\mu\left(\frac{k}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^m \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} e^{2\pi i j\left(\frac{Q}{d}\sum_{r=1}^{m} a_r - \frac{n}{k}\right)}.$$

5. 2. Setzt man

$$(5.21)\qquad C_k(M) = \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} e^{\frac{2\pi i j M}{k}},$$

so gilt erstens für $(k_1, k_2) = 1$

$$(5.221)\qquad C_{k_1 k_2}(M) = C_{k_1}(M)\, C_{k_2}(M)$$

und ferner

$$(5.222)\qquad C_k(M) = \sum_{b/(k, M)} b\,\mu\left(\frac{k}{b}\right). \quad [10])$$

Für

$$M = \frac{Q k}{d}\sum_{r=1}^{m} a_r - n$$

folgt aus (5.21), (5.221)

$$(5.23)\qquad \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq k \\ (j,k)=1}} e^{2\pi i j\left(\frac{Q}{d}\sum_{r=1}^{m} a_r - \frac{n}{k}\right)} = C_{\frac{k}{d}}(M)\, C_d(M),$$

da $\left(\frac{k}{d}, d\right) = \left(\frac{k}{d}, K\right) = 1$ vorausgesetzt wird. Nun ist

$$(5.241)\qquad \left(\frac{k}{d}, M\right) = \left(\frac{k}{d}, \frac{Q k}{d}\sum a_r - n\right) = \left(\frac{k}{d}, n\right)$$

und ferner nach der in Hilfssatz 2 festgelegten Bedeutung von Q

$$(5.242)\qquad (d, M) = \left(d, \frac{Q k}{d}\sum a_r - n\right) = (d, \sum a_r - n),$$

also, nach (5.13), (5.222), (5.23) und (5.241), (5.242)

$$(5.25)\quad \mathfrak{S}_m(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ \left(\frac{k}{d}, K\right)=1}}^{\infty} \left(\frac{\mu\left(\frac{k}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}\right)^m \sum_{b/\left(\frac{k}{d}, n\right)} b\,\mu\left(\frac{k}{d b}\right) \sum_{b'/(d, \sum a_r - n)} b'\,\mu\left(\frac{d}{b'}\right)$$

$$= \sum_{d/K} \sum_{\substack{h=1 \\ (h, K)=1}}^{\infty} \left(\frac{\mu(h)}{\varphi(h)}\right)^m \sum_{b/(h, n)} b\,\mu\left(\frac{h}{b}\right) \sum_{b'/(d, D)} b'\,\mu\left(\frac{d}{b'}\right)$$

$$= \sum_{\substack{h=1 \\ (h, K)=1}}^{\infty} \left(\frac{\mu(h)}{\varphi(h)}\right)^m \sum_{b/(h, n)} b\,\mu\left(\frac{h}{b}\right) \sum_{d/K} \sum_{b'/(d, D)} b'\,\mu\left(\frac{d}{b'}\right)$$

---

[10]) Hardy-Littlewood l. c. [1]) S. 26, 27.

mit der Abkürzung

$$D = \sum_{r=1}^{m} a_r - n.$$

Nun ist

$$(5.26)\qquad \sum_{d/K} \sum_{b'/(d,D)} b' \mu\left(\frac{d}{b'}\right) = \sum_{b'/(K,D)} b' \sum_{a/\frac{K}{b'}} \mu(a)$$

$$= \sum_{b'/(K,D)} b' \sum_{\frac{K}{b'}=1} 1 = \begin{cases} K \text{ für } K = (K,D), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Bedingung $K = (K, D)$ ist aber gleichbedeutend mit K/D oder

$$\sum_{r=1}^{m} a_r \equiv n \pmod K.$$

Somit folgt aus (5.25) und (5.26)

$$(5.271)\qquad \mathfrak{S}_m(n) = 0 \quad \text{für} \quad \sum_{r=1}^{m} a_r \not\equiv n \pmod K$$

$$(5.272)\qquad \mathfrak{S}_m(n) = K \sum_{\substack{h=1 \\ (h,K)=1}}^{\infty} \left(\frac{\mu(h)}{\varphi(h)}\right)^m \sum_{b/(h,n)} b\, \mu\left(\frac{h}{b}\right)$$

$$= K \sum_{\substack{h=1 \\ (h,K)=1}}^{\infty} \left(\frac{\mu(h)}{\varphi(h)}\right)^m C_h(n) \quad \text{für} \quad \sum_{r=1}^{m} a_r \equiv n \pmod K.$$

Im letzteren Falle ist nun für $(h_1, h_2) = 1$

$$\left(\frac{\mu(h_1 h_2)}{\varphi(h_1 h_2)}\right)^m C_{h_1 h_2}(n) = \left(\frac{\mu(h_1)}{\varphi(h_1)}\right)^m C_{h_1}(n) \left(\frac{\mu(h_2)}{\varphi(h_2)}\right)^m C_{h_2}(n),$$

und da $\mu(h)$ nur für quadratfreie h von Null verschieden ist,

$$\mathfrak{S}_m(n) = K \prod_{p \nmid K} \left(1 + \left(\frac{\mu(p)}{\varphi(p)}\right)^m C_p(n)\right).$$

und wegen (5.222)

$$(5.28)\qquad \mathfrak{S}_m(n) = K \prod_{\substack{p \nmid K \\ p \mid n}} \left(1 - \left(\frac{-1}{p-1}\right)^{m-1}\right) \prod_{p \nmid n} \left(1 - \left(\frac{-1}{p-1}\right)^m\right).$$

Ist K gerade, so tritt der Faktor mit $p = 2$ gar nicht auf, und alle Faktoren des Produktes sind positiv. Für ungerades K sei Ω der Faktor mit $p = 2$. Dann ist

$$(5.291)\qquad \mathfrak{S}_m(n) = K\Omega \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{-1}{p-1}\right)^m\right) \prod_{\substack{p \nmid K \\ p>2}} \frac{(p-1)^m}{(p-1)^m - (-1)^m} \times$$

$$\times \prod_{\substack{p \nmid K \\ p \mid n \\ p>2}} \frac{(p-1)\left((p-1)^{m-1} - (-1)^{m-1}\right)}{(p-1)^m - (-1)^m}.$$

Für *gerades* K sind alle in (5.28) vorkommenden p von 2 verschieden, also $\Omega = 1$. Zu der folgenden Tabelle bemerken wir noch, daß bei geradem K wegen der in **3.1** gemachten Voraussetzung $(a_r, K) = 1$ alle a_r ungerade sind und die Kongruenz $\sum_{r=1}^{m} a_r \equiv n \pmod K$ in diesem Falle also zur Folge hat $m \equiv n \pmod 2$ („m und n von gleicher Parität").

Für ungerades K tritt $p = 2$ in (5.28) auf. Ist n *gerade*, so kommt $p = 2$ in dem ersten der beiden Produkte vor und erzeugt hier einen Faktor, der 2 oder 0 ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Bei ungeradem n tritt der $p = 2$ entsprechende Faktor im zweiten auf und zwar als 2 oder 0, je nachdem m ungerade oder gerade ist. Demnach sind die Werte von Ω aus folgender Tabelle zu entnehmen, in der alle Kongruenzen mod 2 verstanden sind:

(5.292)

	$m \equiv n$	$m \not\equiv n$
$K \equiv 0$	$\Omega = 1$	*
$K \equiv 1$	$\Omega = 2$	$\Omega = 0$

für $\sum_{r=1}^{m} a_r \equiv n \pmod K$.

Die Gleichung (5.291) umfaßt auch die Gleichung (5.271) mit, wenn man noch

$$\Omega = 0 \quad \text{für} \quad \sum_{r=1}^{m} a_r \not\equiv n \pmod K \tag{5.293}$$

setzt.

5.3. Tragen wir (5.29) in (5.12) ein, dividieren durch $\varphi(K)^m$ und ziehen diesen Divisor in das Produkt hinein, setzen endlich gemäß (2.25) $\Theta_1 = \Theta + \varepsilon$ und ersetzen $(m+1)\varepsilon$ und andere Vielfache von ε durch ε in neuer Bedeutung, so ergibt sich

$$\left| A_m(n) - \frac{\Omega^*}{K^{m-1}} C_m \prod_{\substack{p \mid K \\ p > 2}} \frac{p^m}{(p-1)^m - (-1)^m} \prod_{\substack{p \nmid K \\ p \mid n \\ p > 2}} \frac{(p-1)\left((p-1)^{m-1} - (-1)^{m-1}\right)}{(p-1)^m - (-1)^m} L \right. \tag{5.311}$$

$$\left. < C K^{2-m+\varepsilon} n^{m-1+(\Theta-\frac{1}{2})+\varepsilon} + C K^{-1+\varepsilon} n^{\frac{m}{2}+\varepsilon} \right.$$

mit

$$C_m = \prod_{p > 2} \left(1 - \left(\frac{-1}{p-1}\right)^m\right) \tag{5.312}$$

und (von der Division durch $\varphi(K)^m$ herrührend)

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \Omega \quad \text{für} \quad K \equiv 1 \bmod 2, \\ \Omega^* &= 2^m \Omega \quad \text{für} \quad K \equiv 0 \bmod 2. \end{aligned} \tag{5.313}$$

Nun ist C_m von n und K, Ω^* von n unabhängig, und für $\Omega^* \neq 0$ ist

$$1 \leqq \Omega^* \leqq 2^m. \tag{5.32}$$

Ferner ist

$$(5.33)\qquad 1 < \prod_{\substack{p/K\\ p>2}} \frac{p^m}{(p-1)^m-(-1)^m} < \prod_{p>2} \frac{p^m}{(p-1)^m-1},$$

$$(5.34)\qquad \prod_{p>2} \frac{(p-1)\left((p-1)^{m-1}-1\right)}{(p-1)^m+1} < \prod_{\substack{p\nmid K\\ p/n\\ p>2}} \frac{(p-1)\left((p-1)^{m-1}-(-1)^{m-1}\right)}{(p-1)^m-(-1)^m}$$

$$< \prod_{p>2} \frac{(p-1)\left((p-1)^{m-1}+1\right)}{(p-1)^m-1}.$$

Aus (5.32), (5.33), (5.34) folgt für $\Omega^* \neq 0$

$$(5.35)\qquad \frac{C'}{K^{m-1}} < \frac{\Omega^*}{K^{m-1}} C_m \prod_{\substack{p/K\\ p>2}} \frac{p^m}{(p-1)^m-(-1)^m} \prod_{\substack{p\nmid K\\ p/n\\ p>2}} \frac{(p-1)\left((p-1)^{m-1}-(-1)^{m-1}\right)}{(p-1)^m-(-1)^m}$$

$$< \frac{C''}{K^{m-1}},$$

worin C' und C'' positive, zwar von m, nicht aber von K und n abhängende Konstanten sind. Da nun nach (4.371) und (4.23)

$$(5.36)\qquad L_m(n) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{n^{m-1}}{(\log n)^m} + O\left(\frac{n^{m-1}}{(\log n)^{m+1}}\right),$$

so sind bei *festgehaltenem* K die in (5.311) auftretenden Fehlerglieder wegen der Voraussetzung (2.24) bei wachsendem n von niedrigerer Größenordnung als das Hauptglied. Wenn wir die Bedeutung von $A_m(n)$ aus (3.14) und (3.15) und die von $L_m(n)$ aus (4.372) entnehmen und (5.29), (5.31), (5.35) und (5.36) berücksichtigen, so gelangen wir zu dem

Hauptsatz. *Es sei K eine positive ganze Zahl und $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ($m \geqq 3$) seien zu K teilerfremd. Gilt dann*

$$\Theta < \frac{3}{4},$$

unter Θ die obere Grenze der Realteile aller Nullstellen aller L-Funktionen (einschließlich der ζ-Funktion selbst) verstanden, so ist bei wachsendem n

$$\sum_{\substack{p_1+p_2+\cdots+p_m=n\\ p_r \equiv a_r \pmod K}} 1 = O\left(n^{m-1+(\Theta-\frac{3}{4})+\varepsilon}\right)$$

für die beiden Fälle erstens $\sum_{r=1}^{m} a_r \not\equiv n \pmod K$ und zweitens $m \not\equiv n \pmod 2$.

Ist dagegen sowohl $\sum_{r=1}^{m} a_r \equiv n \pmod K$ als auch $m \equiv n \pmod 2$ erfüllt, so gilt

$$\sum_{\substack{p_1+p_2+\dots+p_m=n\\ p_r\equiv a_r \pmod K}} 1 = \frac{\Omega^*}{K^{m-1}} C_m \prod_{\substack{p\nmid K\\ p>2}} \frac{p^m}{(p-1)^m-(-1)^m} \prod_{\substack{p\nmid K\\ p/n\\ p>2}} \frac{(p-1)\left((p-1)^{m-1}-(-1)^{m-1}\right)}{(p-1)^m-(-1)^m} \cdot$$
$$+ O\left(n^{m-1+(\Theta-\frac{3}{4})+\varepsilon}\right)$$

mit

$$\Omega^* = 2 \quad \textit{für ungerades } K,$$
$$\Omega^* = 2^m \quad \textit{für gerades } K,$$
$$C_m = \prod_{p>2}\left(1-\left(\frac{-1}{p-1}\right)^m\right),$$
$$L_m(n) = \int\limits_{\substack{\Xi\leqq v_q\\ \sum_{q=1}^{m-1} v_q\leqq n-2}} \dots \int \frac{dv_1\, dv_2 \dots dv_{m-1}}{\log v_1 \log v_2 \dots \log v_{m-1} \log\left(n-\sum v_q\right)}$$
$$= \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{n^{m-1}}{(\log n)^m} + O\left(\frac{n^{m-1}}{(\log n)^{m+1}}\right).$$

Zu jedem K und m gehört dann also ein $N=N(K,m)$, das von $a_1, a_2, \dots, a_m$ unabhängig ist, so daß für $n \equiv \sum_{r=1}^{m} a_r \pmod K$, $n \equiv m \pmod 2$ und $n \geqq N(K,m)$ sich n als Summe von m Primzahlen vorgeschriebener Restklassen mod K darstellen läßt.

Dieser Satz enthält als Spezialfall $K=1$ den Hardy-Littlewoodschen Satz[11]), doch ist der asymptotische Vergleich mit der Funktion $L_m(n)$ neu, der zu einem kleineren Restglied als der Vergleich mit $\frac{n^{m-1}}{(\log n)^m}$ führt.

5.4. Wir wollen noch die Abhängigkeit der im Hauptsatz angegebenen Zahl $N=N(K,m)$ von K betrachten. Aus (5.311), (5.35) und (5.36) folgt

$$A_m(n) > C^* K^{1-m} n^{m-1-\varepsilon} - C^{**} K^{2-m+\varepsilon} n^{m-1+(\Theta-\frac{3}{4})+\varepsilon} - C^{**} K^{-1+\varepsilon} n^{\frac{m}{2}+\varepsilon}, \tag{5.41}$$

worin C^* und C^{**} von m, ε, Θ, aber nicht von n und K abhängen und in der folgenden Rechnung (im Gegensatz zu den bisher mit C bezeichneten Konstanten) als individuelle Konstanten festgehalten werden sollen. Ist

$$\frac{n^{\frac{3}{4}-\Theta-2\varepsilon}}{K^{1+\varepsilon}} > \frac{2C^{**}}{C^*} \quad \text{und} \quad \frac{n^{\frac{m}{2}-1-2\varepsilon}}{K^{m-2+\varepsilon}} > \frac{2C^{**}}{C^*},$$

[11]) l. c. [1]), S. 29, 30, Theorem B und C. — Den Übergang zu dem Hardy-Littlewoodschen Satz könnte man auch bei $K>1$ durch Summation über alle Systeme $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ mit $(a_r, K)=1$ und $\sum a_r \equiv n \pmod K$ bewerkstelligen. Dazu könnte man zweckmäßig eine von mir im Jahresbericht d. D. Math. Ver. 34, Aufg. 29, angegebene Formel gebrauchen.

so zeigt (5. 41), daß

$$A_m(n) > 0$$

ist. Durch eine kleine Rechnung folgt dann unter Berücksichtigung von $\frac{1}{2} \leqq \Theta$ der

Ergänzungssatz. *Es gibt eine nur von m, ε, Θ abhängende Zahl C_*, so daß*

$$N = N(K, m) = C_* K^{\frac{1}{\frac{1}{4}-\Theta}+\varepsilon}$$

die Bedingungen des Hauptsatzes erfüllt.

Sollte im besonderen $\Theta = \frac{1}{2}$ sein, so wäre also $N = C_* K^{4+\varepsilon}$ oder in Worten: Diejenige Zahl, von der an n sich nach den Bedingungen des Hauptsatzes bei vorgeschriebenem Modul K zerlegen läßt, wüchse höchstens wie die $(4+\varepsilon)$-te Potenz von K.

(Eingegangen am 25. September 1925.)

Über die Geometrie von Laguerre[1]).

VII. Kugelsysteme Ribaucours und vierfache Orthogonalsysteme.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

F. Klein hat 1871 ein Gegenstück zum Satz Dupins über Orthogonalsysteme veröffentlicht[2]), dessen Bedeutung für die Bestimmung der sogenannten W-Strahlensysteme nicht bemerkt worden zu sein scheint. Deshalb möchte ich mir hier erlauben, Kleins Satz und eine Umkehrung davon zu beweisen. Dabei werde ich die Ausdrucksweise der Kugelgeometrie bevorzugen, die in bekannter Art durch S. Lies Kugel-Geraden-Transformation mit der Liniengeometrie zusammenhängt.

Ein von zwei Parametern abhängiges System von Kugeln, auf dessen beiden Hüllflächen sich die Krümmungslinien entsprechen, pflegt man nach A. Ribaucour zu benennen. In einer vorausgegangenen Arbeit[3]) dieser Reihe habe ich gezeigt, daß die Bestimmung dieser „R-Systeme" im wesentlichen darauf hinausläuft, im vierdimensionalen Raum Euklids alle Flächen zu ermitteln, die sich auf die Ebene längentreu abbilden lassen. Hier soll festgestellt werden, daß die R-Systeme aufs innigste mit den krummlinigen rechtwinkligen Koordinaten im vierdimensionalen Raum zusammenhängen:

In der „Welt" mit dem Bogenelement

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 \tag{1}$$

[1]) Unter diesem Obertitel sind von demselben Verfasser erschienen: L. I, L. II, L. III, L. VI in den Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Hamburg 3 (1924) und 4 (1925); L. IV und L. V in dieser Mathematischen Zeitschrift 24 (1925), S. 617–621 und S. 622–639. Im folgenden wird nur auf L. V Bezug genommen werden.

[2]) F. Klein, Über einen Satz aus der Theorie der Linienkomplexe, welcher dem Dupinschen Theorem analog ist. Göttinger Nachrichten 1871, Nr. 3 = Gesammelte Abhandlungen 1 (1921), S. 98–105.

[3]) L. V. Kugelsysteme Ribaucours, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 622–639.

seien u, v; p, q krummlinige rechtwinklige Koordinaten, und zwar sei das Bogenelement ds^2 der u, v-Flächen ($p =$ konst., $q =$ konst.) positiv definit, also

$$(2) \qquad ds^2 = A\,du^2 + B\,dv^2 + C\,dp^2 + D\,dq^2; \quad A > 0,\ B > 0.$$

Dann entspricht jeder dieser Flächen ein R-System, wenn man x_1, x_2, x_3 als Mittelpunktkoordinaten und x_4 als Halbmesser einer Kugel im „Raum" mit dem Bogenelement $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ deutet, und zwar sind die Linien $u, v =$ konst. auf den Hüllflächen des Kugelsystems Krümmungslinien.

Wenn wir dieselbe Schreibweise in Vierervektoren benutzen, wie sie in L. V, § 1 [3]) auseinandergesetzt worden ist, so folgt aus der Orthogonalität der Koordinaten u, v, p, q des Weltpunktes $\mathfrak{x}$

$$(3) \qquad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_p = \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_u = 0$$

und daraus durch Ableitung nach p, u, v

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_{up}\mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{vp} &= 0, \\ \mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_p + \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{up} &= 0, \\ \mathfrak{x}_{vp}\mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_{uv} &= 0. \end{aligned}$$

Somit alle drei in (4) vorkommenden skalaren Produkte gleich Null wie z. B.

$$(5) \qquad \mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_p = 0.$$

Entsprechend ist auch

$$(6) \qquad \mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_q = 0.$$

Aus (5), (6) und

$$(7) \qquad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_p = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_q = 0, \qquad \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_p = \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_q = 0$$

folgt aber, da unsere Welt vier Dimensionen hat, die lineare Abhängigkeit der Vierervektoren $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}$:

$$(8) \qquad \mathfrak{x}_{uv} = \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v.$$

Um zu unserm in der Einleitung genannten Ergebnis vorzudringen, brauchen wir also nur mehr folgenden Hilfssatz zu bestätigen:

Hat eine in der Welt gelegene Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ mit positiv definitem Bogenelement rechtwinklige Parameterlinien mit der Eigenschaft (8), so entspricht sie einem R-System im „Raum", auf dessen Hüllflächen $u, v =$ konst. Krümmungslinien sind.

Zum Beweis führen wir zu unserer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ zwei reelle begleitende Vierervektoren $\mathfrak{y}(u, v)$ und $\mathfrak{z}(u, v)$ ein, die durch die Bedingungen

$$(9) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_u \mathfrak{y} = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y} = 0, \qquad \mathfrak{y}^2 = 0, \\ \mathfrak{x}_u \mathfrak{z} = \mathfrak{x}_v \mathfrak{z} = 0, \qquad \mathfrak{z}^2 = 0, \\ \mathfrak{y}\mathfrak{z} = 1 \end{aligned}$$

bis auf einen skalaren Faktor erklärt sind. Für die Krümmungslinien der Hüllfläche mit dem sphärischen Bild $\mathfrak{y}$ des Kugelsystems $\mathfrak{x}(u, v)$ hängen die Vektoren $\delta\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \delta\mathfrak{y}$ linear ab (vgl. L.V, § 2). Um also die Kurven $u, v =$ konst. als Krümmungslinien zu erweisen, genügt es, die lineare Abhängigkeit von $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_u$ und von $\mathfrak{x}_v, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_v$ einzusehen. Nun ist aber nach (8), (9)

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{x}_v\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u = 0, \tag{10}$$

und aus den Gleichungen

$$\mathfrak{x}_u\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_u\mathfrak{y} = 0, \tag{11}$$

$$\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}\mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}_u\mathfrak{x}_v = 0 \tag{12}$$

folgt wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_v$ ($\mathfrak{y}^2 = 0$, $\mathfrak{x}_v^2 \neq 0$) die behauptete lineare Abhängigkeit von $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_u$. Ebenso erkennt man die Abhängigkeit von $\mathfrak{x}_v, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_v$. Entsprechend sind die Linien $u, v =$ konst. auch auf dem $\mathfrak{z}$-Mantel Krümmungslinien und damit ist unser Hilfssatz erwiesen.

Wir wollen jetzt umgekehrt zeigen:

Jede Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ in der Welt, die einem R-System des Raumes entspricht, läßt sich in ein vierfaches Orthogonalsystem einbetten.

Zum Nachweis benutzen wir Formeln aus L.V[3]). Wir setzen ähnlich wie dort in L.V (38)

$$\mathfrak{k}(u, v; p, q) = \mathfrak{x}(u, v) + p\{\mathfrak{y}(u, v) + \mathfrak{z}(u, v)\} + q\{\mathfrak{y}(u, v) - \mathfrak{z}(u, v)\} \tag{13}$$

und mittels der Ableitungsgleichungen L.V (36), (37) erkennen wir sofort, daß die u, v, p, q rechtwinklige Koordinaten in der Welt bedeuten. Da überdies

$$\mathfrak{k}(u, v; 0, 0) = \mathfrak{x}(u, v) \tag{14}$$

wird, ist damit der gewünschte Nachweis beendet.

Nebenbei ergibt sich aus unsren Überlegungen: Nehmen wir $\bar{p}(p, q)$, $\bar{q}(p, q)$ so an, daß $dp^2 - dq^2 = P d\bar{p}^2 - Q d\bar{q}^2$ ($P > 0, Q > 0$) wird, so ist u, v; $\bar{p}, \bar{q}$, von naheliegenden Ausnahmefällen abgesehen, das allgemeinste vierfache Orthogonalsystem in der Welt, das eine zweiparametrige Schar von Ebenen mit indefinitem Bogenelement enthält.

Hamburg, Mathematisches Seminar, Anfang Oktober 1925.

(Eingegangen am 7. Oktober 1925.)

Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe[1]).

Von

A. Hurwitz †.

I.

Die Grundlage bildet der folgende Satz von Kronecker: „Bezeichnet ε_p die Anzahl der Primideale ersten Grades, durch welche die rationale positive Primzahl p in einem algebraischen Zahlenkörper teilbar ist, so hat man für $\varrho = 0$

$$\sum \frac{\varepsilon_p}{p^{1+\varrho}} = \lg \frac{1}{\varrho},$$

eine Gleichung, die so zu verstehen ist, daß die Differenz $\sum \frac{\varepsilon_p}{p^{1+\varrho}} - \lg \frac{1}{\varrho}$ einen endlichen Grenzwert ergibt, wenn man die positive Variable ϱ in Null übergehen läßt."

[1]) Das hier abgedruckte Manuskript faßt Untersuchungen zusammen, die in den Tagebüchern von Hurwitz vom Jahre 1895 niedergelegt sind. Diese Untersuchungen sind in der Arbeit von Frobenius, Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Berl. Sitzgsber. 1896, S. 689—703, erwähnt. Der dort auf S. 690 von Frobenius angedeutete und von Hurwitz eingeschlagene Weg ist inzwischen in einer ungarischen Arbeit von Herrn Prof. M. Bauer wiedergefunden worden. (Untersuchungen über die aus [1] entstehenden algebraischen Körper, Mathematikai és physikai lapok, 15, S. 88—109, insbesondere S. 92—99.) Der Abdruck der Arbeit von Hurwitz ist unverändert; die wenigen eingeschobenen Ergänzungen sind durch eckige Klammern gekennzeichnet. Das Manuskript trug keinen Titel; es wurde hier der Titel der entsprechenden Arbeit von Frobenius gewählt.

II.

Ist K ein Galoisscher Körper n-ten Grades, $\mathfrak{S}$ die Gruppe seiner n Substitutionen, $\mathfrak{S}'$ eine Untergruppe von $\mathfrak{S}$, so bezeichne ich mit $(\mathfrak{S}')$ den Symmetriekörper von $\mathfrak{S}'$, d. h. den Inbegriff derjenigen Zahlen von K, die bei allen Substitutionen von $\mathfrak{S}'$ ungeändert bleiben.

So bezeichnet z. B. (1) den Körper K selbst, $(\mathfrak{S})$ den Körper der rationalen Zahlen.

III.

Es sei ψ eine Substitution f-ten Grades von $\mathfrak{S}$. Sie erzeugt die zyklische Untergruppe

$$(1) \qquad \Psi = (1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{f-1}).$$

Alle zu Ψ (innerhalb $\mathfrak{S}$) ähnlichen Gruppen vereinige ich mit Ψ zu einem System

$$(2) \qquad C = [\Psi].$$

Bedeutet c die Anzahl der verschiedenen in C vereinigten Gruppen, so ist c die Zahl der *verschiedenen* unter den Gruppen $s^{-1}\Psi s$, wo s die sämtlichen Substitutionen von $\mathfrak{S}$ durchläuft. Zugleich ist $c\varphi(f)$ die Anzahl der Substitutionen f-ten Grades, die in C vereinigt sind. Jede dieser Substitutionen f-ten Grades, zu denen auch ψ gehört, heißt eine „Erzeugende" des Systems C.

Die verschiedenen Systeme C, die in der Gruppe $\mathfrak{S}$ existieren, seien in irgend einer Anordnung:

$$(3) \qquad C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\lambda.$$

Bezeichnet nun p eine rationale Primzahl, die nicht in der Diskriminante des Körpers K aufgeht, so ist im Körper K $(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \ldots$, wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ verschiedene Primideale des nämlichen Grades bezeichnen. Durch eine bestimmte zyklische Gruppe Ψ wird $\mathfrak{p}_1$ nicht geändert, ebenso $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$, und die den verschiedenen Primidealen entsprechenden zyklischen Gruppen sind Ψ ähnlich. Zu p gehört also ein bestimmtes System C. Diejenigen Primzahlen, zu denen das System C_k gehört, sollen generell mit p_k bezeichnet werden.

IV.

Nach Dedekind (Skelett, Nr. II) besteht folgender Satz: „Zur Primzahl p gehöre das System $C = [\Psi]$. $\mathfrak{S}'$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{S}$ und

$$s_1, s_2, \ldots, s_\varepsilon$$

mögen ein Restsystem von $\mathfrak{S}$ (modd $\Psi, \mathfrak{S}'$) bilden. Endlich seien $h_1, h_2, \ldots, h_e$ die Grade der größten gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{S}'$ und resp.

$$s_1^{-1}\Psi s_1,\ s_2^{-1}\Psi s_2,\ \ldots,\ s_e^{-1}\Psi s_e.$$

Dann zerfällt (p) im Körper $(\mathfrak{S}')$ in e Primideale von den Graden

$$f_1 = \frac{f}{h_1},\ f_2 = \frac{f}{h_2},\ \ldots.\ f_e = \frac{f}{h_e}.$$"

Insbesondere folgt: (p) hat im Körper $(\mathfrak{S}')$ so viele Primfaktoren ersten Grades, als es Substitutionen s in $\mathfrak{S}$ gibt, für welche $s^{-1}\Psi s$ in $\mathfrak{S}'$ enthalten ist. Dabei sind zwei Subsitutionen s als nicht verschieden anzusehen, wenn sie (modd $\Psi, \mathfrak{S}'$) kongruent sind.

V.

$\mathfrak{S}'$ sei jetzt eine zyklische Untergruppe $\Psi = (1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{f-1})$, die dem Systeme $C = [\Psi]$ angehört. Die Numerierung der verschiedenen Systeme $C_1, C_2, \ldots, C_h$ sei so gewählt, daß das System C den Index f erhält und das aus dem Zyklus

$$\Psi_\delta = (1, \psi^{\delta'}, \psi^{2\delta'}, \ldots, \psi^{(\delta-1)\delta'})$$

entspringende System den Index δ. Dabei bedeutet δ irgend einen Teiler von $f = \delta\delta'$.

Aus IV geht hervor, daß nur die Primzahlen p_δ im Körper $(\mathfrak{S}')$ [d. h. (Ψ)] durch Primideale 1. Grades teilbar sind, und zwar hat p_δ so viele Primideale 1. Grades als Faktoren, wie (modd Ψ_δ, Ψ) verschiedene Substitutionen s existieren, für welche $s^{-1}\Psi_\delta s$ in $\mathfrak{S}' = \Psi$ enthalten ist oder — da Ψ_δ die einzige Untergruppe δ-ten Grades von Ψ ist — für welche

$$s^{-1}\Psi_\delta s = \Psi_\delta$$

ist. Die Anzahl dieser Substitutionen beträgt $\frac{n}{c_\delta \cdot f}$, wo c_δ die Zahl der verschiedenen Zyklen bezeichnet, die in dem System $C_\delta = [\Psi_\delta]$ vereinigt sind.

Nach dem Satze von Kronecker ist daher für $\varrho = 0$:

$$\frac{n}{f}\sum_\delta \frac{1}{c_\delta}\sum \frac{1}{p_\delta^{1+\varrho}} = \lg\frac{1}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \sum_\delta \frac{1}{c_\delta^{\varrho}}\sum \frac{1}{p_\delta^{1+\varrho}} = \frac{f}{n}\lg\frac{1}{\varrho}.$$

Setzt man nun

$$F(\delta) = \frac{1}{c_\delta}\sum \frac{1}{p_\delta^{1+\varrho}}, \qquad F_1(f) = \sum_\delta F(\delta),$$

so ist bekanntlich [mit $q, q', \ldots$ die verschiedenen Primfaktoren von f bezeichnet]

$$F(f) = F_1(f) - \sum F_1\left(\frac{f}{q}\right) + \sum F_1\left(\frac{f}{q\cdot q'}\right) - + \ldots.$$

Also

$$\frac{1}{c}\sum\frac{1}{p^{1+\varrho}}=\lg\frac{1}{\varrho}\left\{\frac{f}{n}-\sum\frac{f}{nq}+\sum\frac{f}{nqq'}-+\ldots\right\}=\frac{1}{n}\varphi(f)\lg\frac{1}{\varrho}$$

oder

$$\sum\frac{1}{p^{1+\varrho}}=\frac{c\varphi(f)}{n}\lg\frac{1}{\varrho}.$$

Der Koeffizient von $\lg\frac{1}{\varrho}$ ist das Verhältnis der Anzahl der Erzeugenden des Systemes $[\Psi]$ zu der Gesamtzahl n der Substitutionen von $\mathfrak{S}$.

VI.

Aus dem Satze der Nr. IV geht hervor, daß die Primzahlen p, denen dasselbe System $C=[\Psi]$ entspricht, in jedem Unterkörper $\mathfrak{S}'$ die nämliche Zerlegung in Primideale (nach Anzahl und Graden) besitzen. Gibt es also eine Primzahl p, die in der Diskriminante des Galoisschen Körpers eines beliebigen Zahlenkörpers nicht aufgeht, und die in letzterem Körper in e Primideale von den Graden $f_1, f_2, \ldots, f_e$ zerfällt, so gibt es immer unendlich viele Primzahlen von derselben Eigenschaft. Zugleich leuchtet hieraus ein, daß die „Dichtigkeiten" von Primzahlen p, die in einem Unterkörper $(\mathfrak{S}')$ des Galoisschen Körpers das nämliche Verhalten bezüglich der Zahl und Grade ihrer idealen Primfaktoren besitzen, sich aus den Zahlen $\frac{c\varphi(f)}{n}$ additiv zusammensetzen.

Der Satz von Nr. IV läßt sich in eine andere Form bringen, in welcher aus ihm der Satz von Frobenius hervorgeht.

Ist p eine Primzahl, zu der das System $C=[\Psi]$ gehört, und bilden $t_1, t_2, \ldots, t_e$ ein Restsystem von $\mathfrak{S}$ (modd $\mathfrak{S}', \Psi$), so zerfällt (p) im Körper $(\mathfrak{S}')$ in e Primideale der Grade $f_1=\frac{f}{h_1}$, $f_2=\frac{f}{h_2}$, $\ldots$, $f_e=\frac{f}{h_e}$, wo $h_1, h_2, \ldots, h_e$ die Grade der gr. gem. Teiler von resp.

$$t_1^{-1}\mathfrak{S}'t_1,\ t_2^{-1}\mathfrak{S}'t_2,\ \ldots,\ t_e^{-1}\mathfrak{S}'t_e$$

mit Ψ bezeichnen. Ist nun

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}'t_1\Psi+\mathfrak{S}'t_2\Psi+\ldots+\mathfrak{S}'t_e\Psi,$$

so sind in dem einzelnen Systeme $\mathfrak{S}'t_i\Psi$ genau $n'f_i$ Substitutionen von $\mathfrak{S}$ vereinigt [wobei n' die Ordnung von $\mathfrak{S}'$ bezeichnet]. Durchläuft also t alle Substitutionen von $\mathfrak{S}$, so werden unter den Gruppen

$$t^{-1}\mathfrak{S}'t$$

$n'f_i$ existieren, die $h_i=\frac{f}{f_i}$ Substitutionen mit Ψ gemein haben.

Setzt man nun $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' t_1 + \mathfrak{S}' t_2 + \ldots + \mathfrak{S}' t_m$, so werden daher unter den Gruppen

$$t_1^{-1}\mathfrak{S}'t_1,\ t_2^{-1}\mathfrak{S}'t_2,\ \ldots,\ t_m^{-1}\mathfrak{S}'t_m$$

f_i existieren, die $h_i = \frac{f}{f_i}$ Substitutionen mit Ψ' gemein haben, oder was dasselbe ist, welche ψ^{f_i} aber keine niedrigere Potenz von ψ' enthalten. Die letzteren Gruppen sind die Gruppen der m zu $(\mathfrak{S}')$ konjugierten Körper. Ist θ eine primitive Zahl des Körpers $(\mathfrak{S}')$, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ ihre konjugierten, so stellt sich demnach ψ' als eine Substitution der $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ dar, die je einen Zyklus vom Grade $f_1, f_2, \ldots, f_e$ enthält.

„Stellt man eine der erzeugenden Substitutionen ψ' des Systemes $C = [\Psi']$ im Körper $(\mathfrak{S}')$ als Vertauschungssubstitution dar, und zerfällt sie als solche in e Zyklen von den Graden $f_1, f_2, \ldots, f_e$, so zerfällt jede zum Systeme C gehörende Primzahl p im Körper $(\mathfrak{S}')$ in e Primideale von den Graden $f_1, f_2, \ldots, f_e$."

Kombiniert man hiermit den Satz von Nr. V, so folgt der Satz von Frobenius:

„Ist ein Körper m-ten Grades gegeben und e positive ganze Zahlen $f_1, f_2, \ldots, f_e$, deren Summe gleich m ist, so ist die Dichtigkeit der rationalen Primzahlen p, welche in e ideale Primfaktoren von den Graden $f_1, f_2, \ldots, f_e$ zerfallen, gleich der Anzahl derjenigen Substitutionen der Galoisschen Gruppe des Körpers, die aus e Zyklen von $f_1, f_2, \ldots, f_e$ Wurzeln bestehen, dividiert durch die Ordnung der Gruppe."

Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Hurwitz.

Von

Fritz Gaßmann, Zürich.

Die nachfolgenden Bemerkungen sind dreierlei Art. In § 1 sind zur Arbeit von Hurwitz die nötigen Zitate und die Ausführung einiger von Hurwitz übersprungenen Zwischenüberlegungen zusammengestellt. In § 2 weise ich auf einige beim heutigen Stande dieses Gebietes mühelos sich ergebende Erweiterungen hin. In § 3 gebe ich einen Beitrag zur fundamentalen Fragestellung von Kronecker, die den Ausgangspunkt für die Arbeiten von Frobenius, Hurwitz und Bauer bildete[1a]).

[1a]) Diese Bemerkungen sind auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Pólya im Anschluß an die Herausgabe der Arbeit von Hurwitz entstanden. Vgl. Frobenius, Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den

§ 1.

Bemerkungen zu den einzelnen Abschnitten.

Zu Abschnitt I. Gemeint ist im wesentlichen der Satz, daß die Dedekindsche Zetafunktion irgend eines algebraischen Zahlkörpers im Punkte $\varrho + 1 = s = 1$ einen Pol 1. Ordnung besitzt. [Vgl. Kronecker[2]) oder neuere Darstellungen[3]).]

Zu Abschnitt III. Ist p irgend eine rationale Primzahl, $\mathfrak{p}$ eines seiner Primideale in K, so wird durch die Substitutionen einer bestimmten Untergruppe von $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{p}$ in sich selbst übergeführt. Dies ist die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}$. Sie enthält einen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe, die Trägheitsgruppe. Die Ordnung der Trägheitsgruppe ist gleich dem Exponenten der Potenz von $\mathfrak{p}$, zu welcher $\mathfrak{p}$ in p aufgeht. Nur für die Diskriminantenteiler ist dieser Exponent > 1, für alle andern Primideale ist die Zerlegungsgruppe zyklisch[4]).

Zu Abschnitt IV. Den hier angegebenen Satz von Dedekind[5]) kann man auch folgendermaßen formulieren: Zu jedem Komplex $\Psi s_i \mathfrak{S}'$ der Zerlegung

$$\mathfrak{S} = \Psi s_1 \mathfrak{S}' + \Psi s_2 \mathfrak{S}' + \ldots + \Psi s_r \mathfrak{S}'$$

gehört ein Primidealteiler von p in $(\mathfrak{S}')$. Der Grad dieses Primideals ist gleich der Anzahl der linksseitigen Nebengruppen von $\mathfrak{S}'$, die zum Komplex gehören. (Die Summe dieser Grade ist gleich dem Index von $\mathfrak{S}'$ unter $\mathfrak{S}$, d. h. gleich dem Grade des Körpers $(\mathfrak{S}')$.)

Zu Abschnitt V. Vorbemerkung: s_1 und s_2 seien zwei Substitutionen des Normalisators $\mathfrak{N}$ von Ψ_δ. Die linksseitigen Nebengruppen $s_1\Psi$ und

---

Substitutionen seiner Gruppe, Berl. Sitz.-Ber. 1896 S. 689–703. Bauer, Untersuchungen über die aus [1] entstandenen algebraischen Körper, Mathematikai és physikai lapok, **15**, S. 88–109.

[2]) L. Kronecker, Über die Irreductibilität von Gleichungen, Berliner Monatsberichte 1880, S. 155–162.

[3]) P. Bachmann, Zahlentheorie 5, Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper, 1905, neuntes Kapitel; E. Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen 1923, § 42; D. Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. 1897, Kap. VII; E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale 1918, § 13; H. Weber, Lehrbuch der Algebra 2 (1899), § 197.

[4]) Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Primideale in Galoisschen Körpern und ihren Unterkörpern befindet sich im Lehrbuch von P. Bachmann a. a. O. [3]), zwölftes Kapitel.

[5]) Mit dem in diesem Abschnitt zitierten Skelett ist folgende Arbeit gemeint: Dedekind, Zur Theorie der Ideale, Göttinger Nachrichten 1894, S. 272–277.

$s_2\Psi$ seien voneinander verschieden. Dann sind s_1 und s_2 auch (modd Ψ_δ, Ψ) verschieden, da

$$\Psi_\delta s_1 \Psi = s_1 \Psi_\delta \Psi = s_1 \Psi \quad \text{und} \quad \Psi_\delta s_2 \Psi = s_2 \Psi_\delta \Psi = s_2 \Psi.$$

Nach Definition von c_δ ist nun $\frac{n}{c_\delta}$ die Ordnung von $\mathfrak{N}$. Da Ψ_δ Normalteiler von Ψ ist, ist Ψ in $\mathfrak{N}$ enthalten. $\mathfrak{N}$ zerfällt in $\frac{n}{c_\delta \cdot f}$ linksseitige Nebengruppen von Ψ. Nach der Vorbemerkung ist daher $\frac{n}{c_\delta \cdot f}$ auch die Anzahl der (modd Ψ_δ, Ψ) verschiedenen Substitutionen von $\mathfrak{N}$.

In der Formel

$$\sum \frac{1}{p^{s+1}} = \frac{c\varphi(f)}{n} \lg \frac{1}{\varrho}$$

am Schlusse des Abschnittes ist die Summe über sämtliche Primzahlen zu erstrecken, die zum System $[\Psi]$ gehören[6]).

Zu Abschnitt VI.[7]) In der Zerlegung

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' t_1 \Psi + \mathfrak{S}' t_2 \Psi + \ldots + \mathfrak{S}' t_e \Psi$$

ist der Komplex $\mathfrak{S}' t_i \Psi$ die Zusammenfassung von f_i rechtsseitigen Nebengruppen von $\mathfrak{S}'$; wenn ψ eine Erzeugende von Ψ ist, so ist ψ^{f_i} die kleinste Potenz von ψ, die in $t_i^{-1}\mathfrak{S}' t_i$ enthalten ist. Daher lautet die Zerlegung des Komplexes in Nebengruppen von $\mathfrak{S}'$

$$\mathfrak{S}' t_i \Psi = \mathfrak{S}' t_i + \mathfrak{S}' t_i \psi + \mathfrak{S}' t_i \psi^2 + \ldots + \mathfrak{S}' t_i \psi^{f_i - 1}.$$

Es sei θ eine primitive Zahl des Körpers $(\mathfrak{S}')$, d. h. eine Körpererzeugende, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ seien ihre sämtlichen Konjugierten. Irgend eine, θ_k, entsteht aus $\theta = \theta_1$ durch eine Substitution s_k von $\mathfrak{S}$. $\theta s_k = \theta_k$, und die Reihe $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ der Konjugierten kann auch $\theta s_1, \theta s_2, \ldots, \theta s_m$ geschrieben werden, wo die s_k irgend ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{S}$ (mod $\mathfrak{S}'$) darstellen. Z. B. ist

$$\begin{aligned}
&t_1,\ t_1\psi,\ t_1\psi^2,\ \ldots,\ t_1\psi^{f_1-1},\\
&t_2,\ t_2\psi,\ t_2\psi^2,\ \ldots,\ t_2\psi^{f_2-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&t_e,\ t_e\psi,\ t_e\psi^2,\ \ldots,\ t_e\psi^{f_e-1}
\end{aligned}$$

ein solches Restsystem. Man sieht daraus unmittelbar, daß die Kon-

---

[6]) Diese Formel ist inhaltlich identisch mit einem Satze von Frobenius. Vgl. Frobenius, a. a. O. [1]), S. 702, Satz IV.

[7]) Zu dem am Schlusse dieses Abschnittes ausgesprochenen Satz von Frobenius vgl. Frobenius, a. a. O. [1]), S. 696, Satz II.

jugierten $\theta t_i, \theta t_i\psi, \theta t_i\psi^2, \ldots, \theta t_i\psi^{f_i-1}$ durch Anwendung der Substitution ψ unter sich eine zyklische Vertauschung erfahren.

§ 2.

Erweiterungen.

Ausdehnung auf Relativkörper. Die beiden Dichtigkeitssätze von Frobenius[8]) können auf Relativkörper ausgedehnt werden.

Es sei k ein algebraischer Körper, K ein relativ Galoisscher Körper darüber, $\mathfrak{S}$ die relativ Galoissche Gruppe von K von der Ordnung h. Mit n werde die Norm in k, mit N die absolute Norm in K bezeichnet, ferner mit $\mathfrak{p}$ Primideale in k und mit $\mathfrak{P}$ solche in K. Die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers K genügt der Gleichung

$$\lim_{s=1} \frac{\lg \zeta_K(s)}{\lg \frac{1}{s-1}} = 1.$$

Wenn $\mathfrak{P}_1$ allgemein ein Primideal 1. Relativgrades bezeichnet, ist

$$\lg \zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{P}} \lg \frac{1}{1 - N\mathfrak{P}^{-s}} = \sum_{\mathfrak{P}} \frac{1}{N\mathfrak{P}^s} + \Sigma' = \sum_{\mathfrak{P}_1} \frac{1}{N\mathfrak{P}_1^s} + \Sigma'' + \Sigma'$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\varepsilon_{\mathfrak{p}}}{n\mathfrak{p}^s} + \Sigma'' + \Sigma'.$$

$\varepsilon_{\mathfrak{p}}$ ist die Anzahl der Primideale 1. Relativgrades von K, die $\mathfrak{p}$ enthält. Nach bekannten Abschätzungen ist $\lim_{s=1} \frac{\Sigma'' + \Sigma'}{\lg \frac{1}{s-1}} = 0$. Daraus folgt die Übertragung des Satzes von Kronecker[9]) auf Relativkörper

$$\lim_{s=1} \frac{\sum \frac{\varepsilon_{\mathfrak{p}}}{n\mathfrak{p}^s}}{\lg \frac{1}{s-1}} = 1. \tag{1}$$

Dies ist die Grundlage für die Übertragung auf Relativkörper der ganzen Abhandlung von Hurwitz, die sich ja auf den Satz von Kronecker stützt[9a]). In der Abhandlung[10]) werden Resultate von Dedekind über Primideale in Galoisschen Körpern und ihren Unterkörpern benützt, die

[8]) Vgl. a. a. O. [6]) und [7]), ferner Abhandlung von Hurwitz, Abschn. V und VI.
[9]) Vgl. Abhandlung Hurwitz, Abschn. I.
[9a]) Vgl. Abhandlung Hurwitz, Abschnitt I.
[10]) Abhandlung Hurwitz, Abschnitte IV und VI.

ebenfalls auf Relativkörper übertragbar sind[11]). Damit ist erwiesen, daß die Sätze von Frobenius auch für Relativkörper gelten. Beispielsweise lautet die Übertragung der in Abschnitt V der Abhandlung von Hurwitz bewiesenen Formel folgendermaßen:

$$\lim_{s=1} \frac{\sum_{\mathfrak{p}_\lambda} \frac{1}{n\mathfrak{p}_\lambda^s}}{\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{n\mathfrak{p}^s}} = \lim_{s=1} \frac{\sum_{\mathfrak{p}_\lambda} \frac{1}{n\mathfrak{p}_\lambda^s}}{\lg \frac{1}{s-1}} = \frac{a_\lambda}{h}. \tag{2}$$

Mit $\mathfrak{p}_\lambda$ sind dabei allgemein die Primideale von k bezeichnet, die im Sinne von Hurwitz zum System $[\Psi]$ gehören[12]), wo Ψ die relative Zerlegungsgruppe eines in $\mathfrak{p}_\lambda$ aufgehenden Primideals von K ist. a_λ ist die Anzahl der Erzeugenden des Systems $[\Psi]$.

Einführung des modernen Begriffes der Dichtigkeit. Man betrachte in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$, ferner eine Teilmenge von Primidealen $\mathfrak{p}'$ daraus. Mit $\Pi(x)$ bezeichne man die Anzahl aller Primideale $\mathfrak{p}$ mit der Norm $N(\mathfrak{p}) \leqq x$, mit $\Pi'(x)$ die entsprechende Anzahlfunktion für die Primideale $\mathfrak{p}'$. Wenn der Grenzwert $\lim_{x=\infty} \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)}$ existiert, wird man ihn als *Dichtigkeit* der Primideale $\mathfrak{p}'$, gemessen an der Dichtigkeit aller Primideale, bezeichnen. Auf Grund heutiger Kenntnisse ist es leicht, zu zeigen, daß die beiden Dichtigkeitssätze von Frobenius und ihre Übertragungen auf Relativkörper, worin Grenzwerte von der Form

$$\lim_{s=1} \frac{\sum_{\mathfrak{p}'} \frac{1}{N\mathfrak{p}'^s}}{\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}} = \lim_{s=1} \frac{\sum_{\mathfrak{p}'} \frac{1}{N\mathfrak{p}'^s}}{\lg \frac{1}{s-1}}$$

vorkommen[13]), bei *dieser* Definition der Dichtigkeit bestehen bleiben.

Es sei k ein algebraischer Körper vom Grade m, K ein Körper vom Grade M, der k enthält. Wird mit $\Pi(x)$ die Anzahlfunktion aller Primideale in K und mit $\pi(x)$ die Anzahlfunktion der rationalen Primzahlen bezeichnet, so ist bekanntlich[14])

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\lg x}} = \lim_{x=\infty} \frac{\Pi(x)}{\frac{x}{\lg x}} = 1.$$

---

[11]) Dies bemerkt schon Dedekind in seiner Arbeit (vgl. a. a. O. [5]), S. 277; vgl. ferner E. Artin, Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Körper, Math. Annalen 89 (1923), S. 148–149, wo die Übertragung eines Satzes explizite bewiesen ist

[12]) Vgl. Abhandlung Hurwitz, Abschnitt III.

[13]) Vgl. Formel (2) dieses Paragraphen.

[14]) Vgl. Landau, a. a. O. [3]), § 20.

$\Pi_1(x)$ bezeichne die Anzahlfunktion aller Primideale von K vom 1. Relativgrade in bezug auf k, $\Sigma_1(x)$ die Anzahlfunktion der Primideale von K, deren Relativgrad >1 ist, $\Sigma_2(x)$ die Anzahlfunktion der Primideale von K, deren Absolutgrad >1 ist.

$$\Pi(x) = \Pi_1(x) + \Sigma_1(x) \leqq \Pi_1(x) + \Sigma_2(x) \leqq \Pi_1(x) + \frac{M}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{M}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \ldots + \frac{M}{M}\pi(\sqrt[M]{x}).$$

Daraus folgt

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Pi_1(x)}{\frac{x}{\lg x}} = 1 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\sum_{\mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}} \leqq x} f_\mathfrak{p}}{\frac{x}{\lg x}} = 1.$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (1) dieses Paragraphen und ermöglicht, wieder genau auf dem Wege von Hurwitz, den Beweis der beiden Dichtigkeitssätze mit dem modernen Begriff der Dichtigkeit.

§ 3.

Über eine Kroneckersche Fragestellung.

Wenn in einem algebraischen Zahlkörper von einer rationalen Primzahl die Anzahl und die Grade der darin aufgehenden Primideale bekannt ist, kann man sagen, die „Art der Zerlegung" dieser Primzahl sei bekannt. Man könnte die Fragestellung von Kronecker[15]), von der Frobenius in seiner Untersuchung ausgegangen ist, folgendermaßen formulieren: Ist ein algebraischer Körper eindeutig bestimmt, wenn die darin stattfindende Zerlegung sämtlicher rationalen Primzahlen der Art nach gegeben ist? Da die Art der Zerlegung einer Primzahl für konjugierte Körper dieselbe ist, kann man höchstens fragen, ob der algebraische Körper bis auf konjugierte bestimmt sei.

Nach Frobenius hat sich insbesondere Herr Bauer mit dieser Fragestellung beschäftigt[16]). Er hat z. B. folgenden Satz bewiesen[17]): Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei irreduzible Polynome, die mit endlich vielen Ausnahmen für die gleichen Primzahlen p in Linearfaktoren $(\mathrm{mod}\, p)$ zerfallen, so erzeugen ihre Galoisschen Resolventen den gleichen Körper. Zum Beweise seien K_1 und K_2 zwei durch je eine Wurzel von $f_1(x) = 0$,

[15]) Vgl. a. a. O. [2]).

[16]) M. Bauer, a) Zur Theorie der irreduziblen Gleichungen, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn 20 (1902), S. 30; b) Über einen Satz von Kronecker, Archiv der Math. und Phys. 6 (1904), S. 218; c) Zur Theorie der algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. 77 (1916), S. 353; d) Zur Theorie der arithm. Progression, Archiv der Math. und Phys. 25 (1917), S. 131; e) vgl. a. a. O. [1]).

[17]) Vgl. a. a. O. [16b]).

$f_2(x) = 0$ erzeugte Körper, G_1 und G_2 die Galoisschen Körper von $f_1(x)$ und $f_2(x)$, deren Identität nachgewiesen werden soll. G sei ein Normalkörper, der G_1 und G_2 enthält, $\mathfrak{G}$ seine Gruppe. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ seien die zu G_1 und G_2 gehörenden Untergruppen von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ die zu K_1 und K_2 gehörenden. $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ ist der Durchschnitt aller zu $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ konjugierten Gruppen. p sei eine nicht in der Diskriminante von G aufgehende Primzahl, die in K_1 in lauter Primideale 1. Grades zerfällt. Nach Dedekind[18]) ist die Zerlegungsgruppe von p in G eine zyklische Gruppe $\mathfrak{Z}$, deren sämtliche Konjugierte in $\mathfrak{H}_1$ enthalten sind, oder, was dasselbe besagt, die in sämtlichen Konjugierten von $\mathfrak{H}_1$ enthalten ist. $\mathfrak{Z}$ ist also eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$. Es sei nun $\mathfrak{Z}$ *irgend eine* zyklische Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$. Nach Frobenius gibt es unendlich viele Primzahlen p, die im Körper G zur Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ gehören. Diese Primzahlen zerfallen in K_1 in lauter Primideale 1. Grades, also nach Voraussetzung auch in K_2. $\mathfrak{Z}$ ist deshalb auch Untergruppe von $\mathfrak{G}_2$. Wendet man diese Überlegung auf sämtliche zyklische Untergruppen von $\mathfrak{G}_1$ an, so folgt daraus: $\mathfrak{G}_1$ ist in $\mathfrak{G}_2$ enthalten. Vertauscht man in der Überlegung K_1 mit K_2, so folgt: $\mathfrak{G}_2$ ist in $\mathfrak{G}_1$ enthalten. $\mathfrak{G}_1$ ist identisch mit $\mathfrak{G}_2$, die Körper G_1 und G_2 sind identisch, was zu beweisen war. Ein allgemeineres Resultat der Untersuchungen von Bauer[19]) ist das folgende: Ein algebraischer Körper K enthält dann und nur dann einen Normalkörper G, wenn fast alle Primzahlen[20]), die in K mindestens ein Primideal 1. Grades enthalten, in G in Primideale 1. Grades zerfallen.

Auf Anregung von Herrn Bauer suchte ich nach einem entsprechenden Satz, ohne vorauszusetzen, daß G ein Normalkörper sei. Insbesondere behandelte ich die Frage: Was kann man von zwei algebraischen Körpern K_1 und K_2 vom gleichen Grade n sagen, wenn fast alle Primzahlen im einen Körper auf die gleiche Art in Primideale zerfallen wie im andern?

Man sagt, daß zwei Untergruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ von $\mathfrak{G}$ von derselben Ordnung auf die gleiche Art in Klassen zerfallen, wenn der Durchschnitt irgend einer Klasse von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H}_1$ gleich viele verschiedene Elemente umfaßt wie der Durchschnitt derselben Klasse mit $\mathfrak{H}_2$. Die Antwort auf meine Frage gibt folgender Satz:

In zwei algebraischen Körpern K_1 und K_2 zerfallen fast alle Primzahlen dann und nur dann auf die gleiche Art, wenn K_1 und K_2 denselben Galoisschen Körper G bestimmen und die zu K_1 und K_2 gehören-

---

[18]) Vgl. a. a. O. [5]).

[19]) Vgl. a. a. O. [16c]).

[20]) Im folgenden wird für „alle mit endlich vielen Ausnahmen" der Kürze halber „*fast alle*" gebraucht.

den Untergruppen der Galoisschen Gruppe von G auf die gleiche Art in Klassen zerfallen.

$\mathfrak{G}$ sei eine endliche Gruppe, $\mathfrak{Z}$ irgend eine Untergruppe, $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ seien zwei Untergruppen von derselben Ordnung. Man sagt, $\mathfrak{G}$ sei (modd $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{Z}$) und (modd $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{Z}$) auf die gleiche Art zerlegt, wenn die in den beiden Zerlegungen auftretenden Komplexe derart eineindeutig aufeinander bezogen werden können, daß einander zugeordnete Komplexe gleich viele verschiedene Elemente umfassen. Verwendet man erstens den in Abschnitt IV der Abhandlung von Hurwitz zitierten Satz von Dedekind, zweitens das Ergebnis von Frobenius, daß in einem Normalkörper mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ jede zyklische Untergruppe $\mathfrak{Z}$ Zerlegungsgruppe von unendlich vielen Primidealen ist, so ist der oben ausgesprochene Satz auf folgenden Satz der *Gruppentheorie* zurückgeführt:

Zwei Untergruppen derselben Ordnung $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ zerfallen dann und nur dann auf die gleiche Art in Klassen, wenn $\mathfrak{G}$ (modd $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{Z}$) *und* (modd $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{Z}$) *für alle zyklischen Untergruppen $\mathfrak{Z}$ auf die gleiche Art zerfällt.*

Der Beweis dieses Satzes wird in drei Schritten erbracht.

A. Die Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ enthalte k verschiedene zu einer zyklischen Untergruppe $\mathfrak{Z}$ konjugierte Gruppen. Ich behaupte: Die Art der Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in Klassen bestimmt eindeutig die Zahlen k für sämtliche zyklische Untergruppen $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$ und ist umgekehrt durch die Zahlen k eindeutig bestimmt.

Man bezeichne den Durchschnitt einer zyklischen Untergruppe und einer Klasse als Subklasse. Elemente einer Klasse, die verschiedenen Subklassen angehören, erzeugen verschiedene zyklische Gruppen. Eine Subklasse umfaßt die konjugierten Elemente, die dieselbe zyklische Untergruppe erzeugen; ihre Anzahl ist der Index des Normalisators eines Elementes unter dem Normalisator der durch das Element erzeugten zyklischen Gruppe. (Diese Anzahl ist nebenbei bemerkt ein Divisor von $\varphi(m)$, wenn die Elemente der Subklasse die Ordnung m haben.) Eine Klasse umfaßt lauter Subklassen von gleicher Elementenzahl. Eine Untergruppe umfaßt mit jedem Element auch die Subklasse des Elementes.

Ist die Art der Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in Klassen bekannt, so findet man die Zahl k für ein bestimmtes $\mathfrak{Z}$ folgendermaßen: Man dividiert die Anzahl der Elemente des Durchschnittes von $\mathfrak{H}$ und der Klasse von Z, einer fest gewählten erzeugenden Elementes von $\mathfrak{Z}$, durch die Anzahl der Elemente in der Subklasse, zu der Z gehört. Sind umgekehrt die Zahlen k für sämtliche zyklische Untergruppen bekannt, so ist die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{H}$ einer vorgegebenen Klasse das Produkt aus der Elementen

zahl einer zur Klasse gehörenden Subklasse und der Zahl k für die durch ein Element der Klasse erzeugte zyklische Untergruppe.

B. Es sei $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_m = \mathfrak{Z}_{\frac{m}{1}}$ eine zyklische Untergruppe m-ter Ordnung, $\mathfrak{Z}_{\frac{m}{d}}$ ihre Untergruppe $\frac{m}{d}$-ter Ordnung, und es mögen k_d zu $\mathfrak{Z}_{\frac{m}{d}}$ konjugierte Gruppen in $\mathfrak{R}$ liegen. Z. B. ist $k_m = 1$. Das Zahlsystem der k_d, wo d sämtliche Teiler von m durchläuft, ist durch die Art der Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in Klassen nach A. eindeutig bestimmt. l_d sei die Anzahl derjenigen zu $\mathfrak{Z}$ konjugierten Untergruppen, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{R}$ von der Ordnung $\frac{m}{d}$ ist. Z. B. ist $l_1 = k_1$.

Ich behaupte: Ist $\mathfrak{Z}$ gegeben, so ist jedes der Zahlsysteme k_d und l_d, wo d sämtliche Teiler von m durchläuft, eindeutig durch das andere bestimmt. Man bezeichne mit j_d den Index des Normalisators von $\mathfrak{Z}_m$ unter dem Normalisator von $\mathfrak{Z}_{\frac{m}{d}}$. Z. B. ist $j_1 = 1$, j_m die Anzahl sämtlicher Konjugierten von $\mathfrak{Z}_m$. Jede zu $\mathfrak{Z}_{\frac{m}{d}}$ konjugierte Untergruppe ist in j_d verschiedenen zu $\mathfrak{Z}_m$ konjugierten Untergruppen enthalten. Daher ist die Anzahl solcher zu $\mathfrak{Z}$ konjugierten Untergruppen, die eine in $\mathfrak{R}$ enthaltene Untergruppe von der Ordnung $\frac{m}{d}$ besitzen, $= k_d \cdot j_d$. Diese Anzahl ist auch gleich $\sum_{t \mid d} l_t$, denn die Ordnung des Durchschnittes einer der betreffenden Konjugierten von $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{R}$ ist ein Multiplum von $\frac{m}{d}$, also von der Form $\frac{m}{t}$, wo t ein Teiler von d ist. Das Gleichungssystem

$$k_d \cdot j_d = \sum_{t \mid d} l_t,$$

wo d sämtliche Teiler von m und t sämtliche Teiler von d durchläuft, erlaubt die Bestimmung des Zahlsystems der k_d aus dem der l_d. Umgekehrt sind die l_d aus den k_d bestimmbar, da man das Gleichungssystem nach den l_d auflösen kann:

$$l_d = \sum_{t \mid d} \mu\left(\frac{d}{t}\right) k_t j_t.$$

C. Ich behaupte: Das Zahlsystem der l_d bestimmt die Art der Zerlegung von $\mathfrak{G}$ (mod $\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}$) eindeutig und wird umgekehrt eindeutig dadurch bestimmt. In der Zerlegung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{R} s_1 \mathfrak{Z} + \mathfrak{R} s_2 \mathfrak{Z} + \mathfrak{R} s_3 \mathfrak{Z} + \ldots + \mathfrak{R} s_e \mathfrak{Z}$$

enthält jeder Komplex $\mathfrak{R} s_i \mathfrak{Z}$ eine Anzahl rechtsseitiger Nebengruppen von $\mathfrak{R}$. Diese Anzahl ist ein Teiler d der Ordnung m von $\mathfrak{Z}$, denn sie ist der Index des Durchschnittes von $\mathfrak{R}$ und $s_i \mathfrak{Z} s_i^{-1}$ unter $s_i \mathfrak{Z} s_i^{-1}$. Es

sei a_d die Anzahl der verschiedenen Komplexe der Zerlegung, welche je d rechtsseitige Nebengruppen von $\mathfrak{K}$ enthalten. (Es ist z. B. $\sum_{d,m} a_d$ gleich der Gesamtanzahl e der Komplexe der Zerlegung.) Das Zahlsystem der a_d, wo d sämtliche Teiler von m durchläuft, bestimmt eindeutig die Art der Zerlegung von $\mathfrak{G}$ (modd $\mathfrak{K}, \mathfrak{Z}$) und ist umgekehrt eindeutig dadurch bestimmt. $\mathfrak{A}_d$ sei der Inbegriff aller Elemente dieser a_d Komplexe. ($\mathfrak{G} = \sum_{d,m}' \mathfrak{A}_d$.)

Es sei g die Ordnung von $\mathfrak{G}$, n die Ordnung von $\mathfrak{K}$, j_m der Index des Normalisators von $\mathfrak{Z}$ unter $\mathfrak{G}$. Die Anzahl A_d der verschiedenen in $\mathfrak{A}_d$ enthaltenen Elemente kann man auf zwei Arten abzählen. Erstens ist $A_d = a_d \cdot d \cdot n$, denn jeder der a_d Komplexe von $\mathfrak{A}_d$ enthält d Nebengruppen von $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{A}_d$ ist ferner der Inbegriff aller Elemente s von $\mathfrak{G}$ von der Eigenschaft: $s\,\mathfrak{Z}\,s^{-1}$ hat mit $\mathfrak{K}$ einen Durchschnitt von der Ordnung $\frac{m}{d}$. Die Anzahl dieser Elemente ist gleich der Ordnung $\frac{g}{j_m}$ des Normalisators von $\mathfrak{Z}$, multipliziert mit der Anzahl l_d der verschiedenen zu $\mathfrak{Z}$ Konjugierten, die mit $\mathfrak{K}$ einen Durchschnitt von der Ordnung $\frac{m}{d}$ haben; also ist zweitens $A_d = \frac{g}{j_m} l_d$. Setzt man die beiden Ausdrücke für A_d einander gleich, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$a_d = \frac{g}{j_m \cdot n \cdot d} \cdot l_d ,$$

wo d alle Teiler von m durchläuft. Diese Gleichungen zeigen, daß das Zahlsystem der a_d, das die Art der Zerlegung von $\mathfrak{G}$ (modd $\mathfrak{K}, \mathfrak{Z}$) vollständig kennzeichnet, durch das Zahlsystem der l_d, das die Art der Zerlegung von $\mathfrak{K}$ in Klassen vollständig kennzeichnet, eindeutig bestimmt ist und umgekehrt, und zwar unabhängig von der speziellen Wahl der Untergruppe n-ter Ordnung $\mathfrak{K}$, wie der Faktor von l_d zeigt.

Damit ist der auf S. 11—12 ausgesprochene Satz der Gruppentheorie bewiesen.

Zum Schluß sei noch ein spezielles Beispiel angeführt. $F(x) = 0$ sei eine ganzzahlige Gleichung 6. Grades ohne Affekt mit den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Bekanntlich existieren solche Gleichungen[21]. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ dieser Gleichung ist die symmetrische Gruppe von sechs Elementen, der Galoissche Körper G von $F(x)$ also vom Grade 720. $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ seien folgende Untergruppen 4. Ordnung:

---

[21]) Vgl. z. B. Schur, Beispiele für Gleichungen ohne Affekt, Jahresber. der Deutschen Math. Ver. 29 (1920).

$$\mathfrak{K}_1 = 1 + (x_1 x_2)(x_3 x_4) + (x_1 x_3)(x_2 x_4) + (x_1 x_4)(x_2 x_3)$$
$$\mathfrak{K}_2 = 1 + (x_1 x_2)(x_3 x_4) + (x_1 x_2)(x_5 x_6) + (x_3 x_4)(x_5 x_6).$$

Für die zu diesen Untergruppen gehörenden Körper K_1 und K_2 vom Grade 180 ist G wirklich der Galoissche Körper, da die sämtlichen in $\mathfrak{G}$ Konjugierten von $\mathfrak{K}_1$, bzw. $\mathfrak{K}_2$ außer der Identität keinen gemeinsamen Normalteiler besitzen. $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ sind nicht zueinander konjugiert, zerfallen aber offenbar auf die gleiche Art in Klassen, da jede der beiden Gruppen außer der Identität von der Klasse von $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$ drei Substitutionen enthält. Nach dem hier bewiesenen Satz sind K_1 und K_2 zwei *nicht konjugierte Körper* vom Grade 180, in denen fast alle Primzahlen auf die gleiche Art in Primideale zerfallen.

(Eingegangen am 15. Juli 1925.)

Formale Beweise und die Entscheidbarkeit.

Von

Paul Finsler in Köln.

I. Die Problemstellung.

1. Um die Widerspruchsfreiheit gewisser Axiomensysteme darzutun, benutzt Hilbert[1]) eine Theorie der mathematischen Beweise, bei der diese Beweise streng formalisiert gedacht werden, als konkret aufgeschriebene, aus bestimmten Zeichen zusammengesetzte Figuren. „Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß“[2]). Weiter heißt es: „Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist“[3]). Das Ziel ist dann, zu zeigen, daß auf Grund eines vorgelegten Axiomensystems sicher nicht eine Formel beweisbar ist, die einen (ebenfalls formalisierten) Widerspruch darstellt. Solche Axiomensysteme, bei denen dieser Nachweis gelingt, heißen „widerspruchsfrei“[4]). Im folgenden werden diese Systeme, bei Zugrundelegung formaler Beweise allgemeiner Art, etwas deutlicher als *formal widerspruchsfrei* bezeichnet.

2. Die Frage, wie weit aus dieser formalen Widerspruchsfreiheit auf eine wirkliche Abwesenheit von inneren Widersprüchen in dem betreffen-

[1]) D. Hilbert, Neubegründung der Mathematik (Erste Mitteilung). Abh. a. d. Math. Seminar d. Hamburgischen Universität **1** (1922), S. 157–177.

P. Bernays, Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik. Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung **31** (1922), S. 10–19.

D. Hilbert, Die logischen Grundlagen der Mathematik. Math. Ann. **88** (1923), S. 151–165.

W. Ackermann, Begründung des „tertium non datur“ mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. Math. Ann. **93** (1924), S. 1–36.

D. Hilbert, Über das Unendliche. Math. Ann. **95** (1925), S. 161–190.

[2]) D. Hilbert, Math. Ann. **88** (1923), S. 152.

[3]) Ebenda S. 152–153.

[4]) Ebenda S. 157. Math. Ann. **95** (1925), S. 179.

den Axiomensystem geschlossen werden kann, hängt mit dem Problem der Entscheidbarkeit zusammen.

Wäre nämlich jede mathematische Behauptung, deren Richtigkeit oder Unrichtigkeit eine logische Folge der Axiome darstellt, durch rein formale Beweise entscheidbar, so könnte man aus der formalen Widerspruchsfreiheit ohne weiteres auf eine absolute schließen.

Dies gilt aber nicht mehr, sobald es einen Satz gibt, über dessen Richtigkeit zwar das Axiomensystem in logischer Hinsicht eindeutig entscheidet, der aber rein formal weder bewiesen noch widerlegt werden kann. Dann kann man nämlich diesen Satz, oder auch sein Gegenteil, als neues Axiom zu dem System hinzufügen und erhält damit zwei formal widerspruchsfreie Axiomensysteme, von denen sicher eines einen inneren Widerspruch enthält.

3. Diese Möglichkeit liegt nun bei dem Axiomensystem der reellen Zahlen tatsächlich vor, falls die für die formalen Beweise zu verwendenden Zeichen nur in endlicher oder abzählbar unendlicher Anzahl vorhanden sind, was ja bei konkret aufgeschriebenen Beweisen sicher der Fall ist.

Es kann dann im ganzen nur abzählbar viele formale Beweise geben, da jeder einzelne aus einer endlichen Zusammenstellung dieser Zeichen bestehen muß[5]). Aus dem Axiomensystem der reellen Zahlen folgen aber rein logisch mehr als abzählbar viele Sätze. Man nehme z. B. die Sätze von der Form: „α ist eine transzendente Zahl“. Für jeden bestimmten Wert von α ist dies ein bestimmter, richtiger oder falscher Satz. Von diesen nichtabzählbar vielen Sätzen kann nicht jeder einzelne formal entscheidbar sein, denn zu jedem speziellen Satz müßte auch ein spezieller Beweis gehören, der sich eventuell aus einem allgemeinen Beweis durch Einsetzen oder Spezialisieren ergeben müßte. Daraus folgt aber, daß es Sätze gibt, die formal nicht entscheidbar sind.

4. Es wäre hierbei allerdings noch denkbar, daß alle diejenigen Sätze formal entscheidbar wären, die selbst formal dargestellt werden können[6]). In diesem Fall wäre das neu hinzuzufügende Axiom nicht formal darstellbar.

Weiter liegt noch die Vermutung nahe, daß ein solcher nicht formaler Widerspruch nie bemerkt werden könnte und deshalb unschädlich wäre, daß

---

[5]) Vgl. W. Ackermann, Math. Ann. **93** (1924), S. 9.

[6]) Daß nicht ganz beliebige Dinge etwa einfach, indem man dafür ein neues Zeichen einführt, formal dargestellt werden können, ist hierbei so zu verstehen, daß man von einem festen Grundsystem ausgehen und alles Weitere, auch die Erklärung von neuen Zeichen, *formal* durchführen muß, andernfalls wäre die Darstellung nicht *rein* formal. Vgl. Anm. [9]).

man also stets so tun könnte, als ob solche Widersprüche nicht vorhanden wären.

Es soll nun aber an einem Beispiel gezeigt werden, daß man tatsächlich Sätze angeben kann, die in allgemeiner Weise formal nicht entscheidbar, also formal widerspruchsfrei sind, bei denen man aber doch auf anderem Wege einen Widerspruch erkennen kann. Es folgt also, daß der Beweis der formalen Widerspruchsfreiheit eines Systems keine Sicherheit gibt gegen erkennbare Widersprüche.

Da jedoch diese Dinge eng mit der „Paradoxie der endlichen Definierbarkeit" zusammenhängen, so soll zuerst eine Präzisierung und Erklärung dieser Paradoxie gegeben werden[7]).

II. Die Paradoxie der endlichen Definierbarkeit.

5. Es sei ein festes System $\mathfrak{S}$ von endlich vielen[8]) Zeichen gegeben. Dieses System soll insbesondere alle für mathematische Zwecke zur Verwendung kommenden Zeichen enthalten, oder etwa überhaupt alle bisher (oder auch in Zukunft) in Schrift oder Druck verwendeten Zeichen. Eine fest gegebene Anordnung dieser Zeichen soll als die „alphabetische" gelten.

Weiter denke man sich ein festes „Wörterbuch" $\mathfrak{B}$ einschließlich „Grammatik" gegeben, welches zu gewissen endlichen Kombinationen dieser Zeichen, den „Wörtern", den zugehörigen Sinn eindeutig angibt. Solche Wörter, die im gewöhnlichen Sprachgebrauch in endlich vielen verschiedenen Bedeutungen vorkommen, sollen etwa durch Indizes eindeutig unterschieden sein. Gewisse Zeichen oder Kombinationen können aber auch als „Variable" definiert sein, die ihren eindeutigen Sinn vermittels der „Grammatik" aus dem Zusammenhang entnehmen. Insbesondere sollen in $\mathfrak{B}$ alle in der vorliegenden Arbeit vorkommenden Wörter mit der hier gebrauchten Bedeutung angegeben sein, außerdem etwa überhaupt alle bisher (oder auch in Zukunft) geschriebenen oder gedruckten Wörter. Die „Erklärungen" des Wörterbuchs brauchen nicht aus Zeichen des Systems $\mathfrak{S}$ zu bestehen, sie können als rein ideell gegeben gedacht werden.

Jede Zusammenstellung von Zeichen, für die sich nicht aus $\mathfrak{B}$ ein eindeutiger Sinn ergibt, soll als sinnlos gelten.

Irgendein Ding soll *endlich definierbar* heißen, wenn es eine endliche Zusammenstellung von Zeichen des Systems $\mathfrak{S}$ gibt, von der Art, daß der vermittels $\mathfrak{B}$ festzustellende Sinn dieses Ding eindeutig festlegt.

---

[7]) Siehe auch P. Finsler, „Gibt es Widersprüche in der Mathematik?" Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung **34** (1925), S. 143.

[8]) Man könnte ohne wesentliche Änderung auch abzählbar unendlich viele annehmen.

6. Jede aus den Zahlen 0 und 1 gebildete Folge, einschließlich 0 0 0 ... und 1 1 1 ..., werde als *Dualfolge* bezeichnet.

Zwei Dualfolgen sollen dann und nur dann als gleich gelten, wenn jede Stelle der einen Folge mit der entsprechenden Stelle der andern Folge übereinstimmt.

Die Gesamtheit aller Dualfolgen ist nach einer bekannten Schlußweise Cantors nicht abzählbar.

Ist nämlich eine beliebige Folge von Dualfolgen gegeben, so ist darin diejenige eindeutig bestimmte Dualfolge, sie möge die *Antidiagonalfolge* heißen, nicht enthalten, deren n-te Stelle für jedes n von der n-ten Stelle der n-ten Dualfolge verschieden ist. Eine Folge von Dualfolgen kann also nicht alle Dualfolgen enthalten.

Die Gesamtheit aller (vermöge $\mathfrak{B}$) *endlich definierbaren* Dualfolgen ist dagegen abzählbar.

Man kann nämlich die sämtlichen endlichen Kombinationen, die sich aus Zeichen des Systems $\mathfrak{S}$ bilden lassen, dadurch in eine abzählbare Reihe bringen, daß man von irgend zwei dieser Kombinationen diejenige voranstellt, welche die geringere Anzahl von Zeichen besitzt, und bei gleicher Anzahl die „alphabetische" Reihenfolge innehält. Durch diese Anordnung werden auch alle diejenigen Kombinationen, die in eindeutiger Weise eine bestimmte Dualfolge definieren, und damit auch die endlich definierbaren Dualfolgen selbst, in eine abzählbare Reihe gebracht. Es kann dabei dieselbe Dualfolge mehrfach auftreten, doch ist dies hier unwesentlich.

7. Es folgt aus diesen Überlegungen, daß es Dualfolgen gibt, die (vermöge $\mathfrak{B}$) nicht endlich definierbar sind.

Dies ist an sich nicht wunderbar, denn nachdem die Dualfolgen in ihrer Gesamtheit vollständig definiert sind, wäre es eine Einschränkung, außerdem noch zu verlangen, daß auch jede einzelne derselben für sich eine endliche Definition besitzen müsse.

Das Paradoxe liegt aber darin, daß man von den nicht endlich definierbaren Dualfolgen eine bestimmte eindeutig angeben kann, nämlich *die zu der oben definierten Folge von endlich definierbaren Dualfolgen gehörende Antidiagonalfolge.* Diese scheint hierdurch doch endlich definiert zu sein.

Dies ist aber in Wirklichkeit nicht der Fall. Die soeben gegebene Definition besteht zwar aus Zeichen des Systems $\mathfrak{S}$ und aus Wörtern, die in $\mathfrak{B}$ angegeben sind. Aber eben deshalb ist sie logisch nicht einwandfrei.

Jedes Ding nämlich, das durch eine aus Wörtern von $\mathfrak{B}$ bestehende Definition eindeutig festgelegt wird, muß endlich definierbar sein. Eine Dualfolge kann aber nicht diese Eigenschaft haben und gleichzeitig noch

die andere in der obigen Definition verlangte Eigenschaft. Diese Definition verlangt also etwas Unmögliches, und es gibt daher keine Dualfolge, die ihr genügt.

Dieses Resultat ist insofern eigentlich selbstverständlich, als eben jeder Versuch, etwas in bestimmter Weise nicht Definierbares doch in solcher Weise zu definieren, unbedingt fehlschlagen muß.

Die angegebene Definition wird aber sofort einwandfrei, wenn man sie aus dem Formalen in das rein Gedankliche überträgt und vom Formalen abstrahiert. Dann definiert sie tatsächlich in eindeutiger Weise eine bestimmte Dualfolge, die vermöge $\mathfrak{B}$ nicht endlich definierbar ist[9]).

8. Die hier vorliegenden Verhältnisse werden an einem einfachen Beispiel[10]) noch deutlicher.

Man schreibe auf eine Tafel die Zahlen 1, 2, 3 und den Satz: „Die kleinste natürliche Zahl, die nicht auf dieser Tafel angegeben ist.“ Dieser auf der Tafel stehende Satz kann in einwandfreier Weise keine natürliche Zahl definieren. Wie man aber hieraus nicht auf die Nichtexistenz der Zahl 4 schließen kann, ebensowenig kann man aus dem obigen Paradoxon auf die Nichtexistenz endlich nicht definierbarer Dualfolgen schließen. Dasselbe gilt auch für endlich nicht definierbare reelle Zahlen.

III. Ein formal nicht entscheidbarer Satz.

9. Es soll nun ein formal nicht entscheidbarer Satz konstruiert werden. Dabei gelte unter Verwendung der schon eingeführten Begriffe die folgende Festsetzung:

Ein *formaler Beweis* ist eine endliche Kombination von Zeichen des Systems $\mathfrak{S}$ von der Art, daß der vermöge $\mathfrak{B}$ festzustellende Sinn einen logisch einwandfreien Beweis ergibt.

Irgendein Satz heißt *formal nicht entscheidbar*, wenn weder für diesen Satz noch für sein Gegenteil ein formaler Beweis möglich ist.

Man betrachte nun alle diejenigen Kombinationen von Zeichen des Systems $\mathfrak{S}$, welche den formalen Beweis dafür liefern, daß in einer bestimmten Dualfolge die Zahl 0 unendlich oft vorkommt bzw. daß sie darin nicht unendlich oft vorkommt. Zu jedem solchen Beweis gehört dann eine eindeutig bestimmte Dualfolge, nämlich eben die, für die der Beweis gilt. Umgekehrt kann es aber für dieselbe Dualfolge mehrere solche Beweise geben.

---

[9]) Diese Dualfolge läßt sich auch nicht durch Einführung eines neuen Zeichens rein formal darstellen (vgl. Anm. [6])), vor allem nicht, wenn auch die in Zukunft formal dargestellten Begriffe schon sämtlich in $\mathfrak{B}$ enthalten sind.

[10]) Siehe Anm. [7]).

Diese Beweise können vermöge der in 6. definierten Anordnung in eine abzählbare Reihe gebracht werden; dadurch erhält man für die zugehörigen Dualfolgen ebenfalls eine abzählbare Reihe. Man nehme nun die zu dieser Reihe gehörende Antidiagonalfolge und stelle den Satz auf:

In der soeben definierten Antidiagonalfolge kommt die Zahl 0 *nicht unendlich oft vor.*

Dieser Satz ist formal nicht entscheidbar, da die zugehörige Dualfolge nicht der vorher aufgestellten Reihe angehören kann. Er kann daher als *formal widerspruchsfrei* bezeichnet werden.

10. Nun kann man aber trotzdem einsehen, daß dieser Satz falsch, also widerspruchsvoll ist.

In der betreffenden Antidiagonalfolge muß nämlich die Zahl 0 doch unendlich oft vorkommen, denn man kann offenbar mit beliebig vielen Worten formal beweisen, daß in derjenigen Dualfolge, deren erste Stelle gleich 1 ist, deren zweite Stelle ebenfalls gleich 1 ist, und deren folgende Stellen ebenfalls alle gleich 1 sind, die Zahl 0 nicht unendlich oft vorkommt. Jedem solchen Beweis entspricht aber in der Antidiagonalfolge eine Null, es kommen also sicher unendlich viele Nullen darin vor.

11. Es scheint hier ein Widerspruch vorzuliegen, indem der formal nicht entscheidbare Satz anscheinend doch formal entschieden wurde.

Dies ist aber in Wirklichkeit nicht der Fall. Der soeben gegebene, aus Wörtern von $\mathfrak{B}$ bestehende formale Beweis ist als solcher logisch nicht einwandfrei, denn da er sich auf eine Dualfolge bezieht, die in der vorher definierten Reihe nicht vorkommen kann, so verlangt er damit implizit, daß er nicht zu den gültigen formalen Beweisen gehören soll. Wenn er also doch einen solchen darstellen soll, so ergibt dies einen inneren Widerspruch im Beweise selbst, und er ist deshalb ungültig. Es kann auch auf keine andere Weise gelingen, den betreffenden Satz einwandfrei formal zu entscheiden.

Der Beweis wird aber sofort einwandfrei, wenn man ihn aus dem Formalen in das rein Gedankliche überträgt und vom Formalen abstrahiert.

Die formale Definition der betreffenden Antidiagonalfolge ist an sich schon einwandfrei, da hier kein solcher Widerspruch vorliegt.

Es gibt also tatsächlich einen formal darstellbaren Satz, der formal widerspruchsfrei, aber logisch falsch ist.

12. Es läßt sich auch hier zum Vergleich ein einfacheres Beispiel angeben, das dem in 8. betrachteten entspricht.

Man schreibe auf eine Tafel die Beweise der vier Sätze:

$\sqrt{1}$ ist rational; $\sqrt{2}$ ist irrational; $\sqrt{3}$ ist irrational; $\sqrt{4}$ ist rational.

Weiter schreibe man auf dieselbe Tafel noch folgendes auf:

„Definition. m sei die kleinste natürliche Zahl, für welche durch keinen auf dieser Tafel stehenden Beweis entschieden wird, ob ihre Quadratwurzel rational oder irrational ist.

Behauptung. $\sqrt{m}$ ist irrational.

Beweis. Da auf dieser Tafel für die Zahlen 1, 2, 3, 4 entschieden wird, ob ihre Quadratwurzel rational oder irrational ist, so ist $m > 4$. Da aber nur für höchstens fünf Zahlen die Beweise auf der Tafel stehen, so ist sicher $m < 9$. Es ist daher $2 < \sqrt{m} < 3$. Nun ist die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl entweder eine ganze Zahl oder aber irrational. Da $\sqrt{m}$ keine ganze Zahl sein kann, so folgt also, daß $\sqrt{m}$ irrational ist."

Es muß in diesem Beispiel $m = 5$ sein, denn für $m > 5$ wäre doch die Zahl 5 die kleinste natürliche Zahl, für die auf der Tafel nichts bewiesen wird.

Es ist auch tatsächlich $m = 5$, denn der letzte, auf der Tafel stehende Beweis ist als solcher nicht einwandfrei. Dadurch, daß er auf der Tafel steht, wird verlangt, daß er ungültig sein soll, denn sonst wäre ja m nicht die richtige Zahl.

Der angegebene Beweis ist aber einwandfrei, wenn man ihn rein gedanklich faßt, so daß er als solcher nicht auf der Tafel steht.

Die auf der Tafel stehende Definition von m ist an sich schon einwandfrei, sie definiert eindeutig die Zahl 5.

Schreibt man noch den Satz auf die Tafel: „$\sqrt{m}$ ist rational", so ist dies ein auf der Tafel angegebener, aber nicht entschiedener, also auch nicht widerlegter Satz, der aber doch falsch ist. Es ist auch unmöglich, irgendeinen Beweis auf die Tafel zu schreiben, der diesen Satz widerlegen würde.

(Eingegangen am 28. November 1925.)

Über die Grundlegung der Mengenlehre.

Erster Teil. Die Mengen und ihre Axiome.

Von

Paul Finsler in Köln.

Einleitung.

Die reine Mathematik operiert mit Objekten, die entweder als unmittelbar gegeben betrachtet, oder axiomatisch festgelegt, oder aus solchen unmittelbar gegebenen oder axiomatisch festgelegten Objekten durch bestimmte Konstruktionen abgeleitet werden.

Beispiele von solchen Objekten sind die natürlichen Zahlen, die reellen oder die komplexen Zahlen, die reellen oder die komplexen Funktionen von bestimmten Veränderlichen, speziell die analytischen Funktionen, ferner die Punkte, Geraden und Ebenen des euklidischen oder des projektiven Raumes und andere mehr.

Bei den hier angeführten Beispielen hat man es der gewöhnlichen Auffassung zufolge[1]) in jedem Fall mit vollständig und eindeutig definierten Systemen zu tun, die in sich keinerlei Willkür mehr unterworfen sind.

Ein System von ähnlicher Bestimmtheit liegt bisher für die Mengenlehre nicht vor.

Einerseits läßt man nämlich als Elemente der Mengen meist ganz beliebige Dinge zu, ohne deren Gesamtheit scharf zu umgrenzen, andererseits scheint die Mengenbildung selbst bei festem Ausgangssystem ganz ins Uferlose zu verlaufen, ohne daß es gestattet wäre, alle diese Mengen wieder zu einem festen System zu vereinigen.

---

[1]) In dieser Arbeit wird der Standpunkt eingenommen, daß die exakte Mathematik so weit reicht, wie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Die auf andern Gebieten sich bewegenden Untersuchungen von L. E. J. Brouwer und H. Weyl bleiben daher hier außer Betracht.

Die Einschränkung der beliebigen Mengenbildung durch Axiome, wie sie E. Zermelo[2]) angegeben hat, bietet ebenfalls keine Gewähr für ein festes Gesamtsystem, und auch wenn man ein solches annimmt, so ist es doch von der ziemlich willkürlichen Auswahl der Axiome abhängig. Diese Nachteile verschwinden auch nicht, wenn man mit A. Fraenkel[3]) ein „Beschränktheitsaxiom" hinzufügt[4]).

Ein wesentliches Hindernis für die einwandfreie Begründung einer allgemeinen Mengenlehre bildeten die „Antinomien", die eben bei der Betrachtung der „Menge aller Mengen" und ähnlicher Begriffsbildungen auftraten, und ohne eine Klärung derselben kann eine vollständige Begründung der Mengenlehre kaum gedacht werden.

Ich habe deshalb versucht, eine solche Klärung vorzunehmen[5]), und möchte im folgenden einige Ergänzungen dazu geben. Sodann wird ein System von Mengen definiert werden, das den gestellten Anforderungen genügen dürfte. Dabei werden die Mengen nicht „inhaltlich", sondern rein axiomatisch eingeführt, als ideelle Dinge, zwischen denen eine gewisse Beziehung besteht. An Hand dieses Systems läßt sich weiter eine Scheidung zwischen den zu Paradoxien Anlaß gebenden „zirkelhaften" Mengen und den für die eigentliche Mengenlehre und die sonstige Mathematik wichtigen „zirkelfreien" Mengen durchführen. Dies liefert dann auch die Mittel, um die Gültigkeit der Axiome Zermelos und ähnlicher Prinzipien zu untersuchen.

Die hierauf zu gründende Widerspruchsfreiheit der Arithmetik und Analysis, sowie eine Begründung der transfiniten Ordnungszahlen soll in einem zweiten Teil dieser Untersuchungen behandelt werden.

Das hierbei verfolgte Endziel ist genau dasjenige, das Hilbert in seinen Arbeiten zur Neubegründung der Mathematik angegeben hat[6]), nur wird die Frage der Widerspruchsfreiheit nicht, wie bei Hilbert, in formalem, sondern in absolutem Sinne verstanden. Um eine exakte

---

[2]) E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Math. Ann. **65** (1908), S. 261–281.

[3]) A. Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, Math. Ann. **86** (1922), S. 230–237, insbes. S. 234.

[4]) Vgl. auch Th. Skolem, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. Wissensch. Vorträge, V. Math.-Kongreß Helsingfors (1923), S. 217–232; J. v. Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre (insbes. Teil II), Journ. für reine u. angew. Math. **154** (1925), S. 219–240.

[5]) P. Finsler, Gibt es Widersprüche in der Mathematik? Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. **34** (1925), S. 143–155.

[6]) D. Hilbert, Neubegründung der Mathematik. Abh. a. d. Math. Sem. der Hamb. Univ. **1** (1922), S. 157–177; D. Hilbert, Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Annalen **88** (1923), S. 151–165.

Wissenschaft vollständig zu begründen, muß man eine absolute Logik anerkennen, auf die man sich stützen kann und ohne die kein zwingender Beweis denkbar ist. Zu dieser Logik wird hier insbesondere die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten gerechnet in dem Sinne, daß z. B. eine reelle Zahl auch dann entweder rational oder irrational ist, wenn die Entscheidung darüber mit menschlichen Hilfsmitteln niemals erreicht werden kann. Eine Behauptung kann also auch dann wahr sein, wenn sie sich nicht mit einer „endlichen Anzahl von logischen Schlüssen" beweisen läßt, und ebenso kann ein System auch dann einen inneren Widerspruch enthalten, wenn man sicher ist, mit vorgegebenen Beweismethoden keinen solchen zu entdecken [7]). Der Begriff der „endlichen Anzahl" darf zudem bei einer Theorie, die ihn erst begründen soll, nicht schon vorausgesetzt werden.

Wenn demnach auch der hier einzuschlagende Weg ein anderer ist als bei Hilbert, so glaube ich doch, daß er ganz im Sinne der „axiomatischen Methode" liegt, und ich möchte es nicht unterlassen, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimrat Hilbert, für die reiche Anregung, die ich besonders in seinen Vorlesungen gerade auf diesen Gebieten erfahren durfte, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Für kritische Bemerkungen und wertvolle Ratschläge bei der Ausarbeitung bin ich Herrn Bernays zu besonderem Dank verpflichtet.

Kapitel 1.

Die Antinomien.

§ 1.

Eine falsche Annahme.

Der naiven Mengenlehre, die zu Antinomien führt, liegt die Annahme zugrunde, daß beliebig vorgegebene Dinge stets zu einer Menge zusammengefaßt werden können, mit andern Worten, daß es stets eine bestimmte Menge gibt, welche die gegebenen Dinge und nur diese als Elemente enthält. Dabei werden die Mengen selbst zu den Dingen gerechnet, die als Elemente auftreten können.

Wird die Beziehung einer Menge zu ihren Elementen (also die Beziehung des „Enthaltens") mit β bezeichnet [8]), so bedeutet dies folgendes:

Es soll zu beliebig gegebenen Dingen stets ein eindeutig bestimmtes

[7]) Vgl. P. Finsler, Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 676–682.

[8]) Die Beziehung β ist invers zu der Beziehung ε bei Zermelo [2]), d. h. $M \beta x$ bedeutet ebenso, wie $x \varepsilon M$, daß x ein Element der Menge M ist.

Ding existieren, welches die Beziehung β zu den gegebenen Dingen und nur zu diesen besitzt.

Dies ist aber eine Forderung, die notwendig zu Widersprüchen führt, denn es kann keinen Bereich von Dingen geben, in dem sie ohne Einschränkung erfüllt wäre.

Ist nämlich irgendein Bereich von Dingen vorgelegt, zwischen denen eine einmehrdeutige Beziehung β besteht, so nehme man diejenigen Dinge A des Bereichs, welche die Beziehung β nicht zu sich selbst besitzen, für die also nicht $A\beta A$ gilt. Dann gibt es in dem Bereich kein Ding N, welches die Beziehung β zu diesen und nur diesen Dingen besitzt, denn sowohl die Annahme $N\beta N$ als auch die gegenteilige Annahme führt sofort zum Widerspruch.

Wenn die Forderung nur für den Fall zu gelten braucht, daß die Anzahl der gegebenen Dinge von Null verschieden ist, so ist sie erfüllt für einen Bereich, der ein einziges Ding J enthält, das die Beziehung β zu sich selbst besitzt.

In einem Bereich mit mehr als einem Element kann sie aber auch in dieser Form nicht erfüllt sein. Sind nämlich a und b irgend zwei verschiedene Dinge des Bereichs, so müßten in dem Bereich drei unter sich verschiedene Dinge A, B, C existieren, derart, daß A die Beziehung β nur zu a, B zu b und C zu a und b besitzt. Dann kann aber nicht gleichzeitig $A\beta A$, $B\beta B$ und $C\beta C$ gelten, denn daraus würde $A = a$, $B = b$ und $C = a$ oder $C = b$ folgen, während doch C von A und von B verschieden sein muß. Es wären also sicher Dinge vorhanden, welche die Beziehung β nicht zu sich selbst besitzen, der Bereich kann aber wieder kein Ding N enthalten, das die Beziehung β zu allen und nur zu diesen Dingen besitzt.

§ 2.

Zirkelhafte Definitionen.

Es folgt aus diesen Betrachtungen, daß die zu Anfang gemachte Annahme nicht zutreffen kann.

Für die Annahme spricht aber der Umstand, daß man gewohnt ist, die Gesamtheit von vielen Dingen als eine Einheit aufzufassen und demnach jede solche Zusammenfassung als etwas an sich Gegebenes zu betrachten.

Diese Auffassung ist möglich, soweit es sich bei den Zusammenfassungen stets um *zirkelfreie* Operationen handelt, also z. B. immer dann, wenn die Dinge, die zusammengefaßt werden sollen, nicht selbst Zusammenfassungen sind oder von solchen wesentlich abhängen.

Bei *zirkelhaften* Bildungen liegt aber die Sache anders. Die Menge aller Mengen z. B. müßte eine Zusammenfassung sein, welche auch sich selbst mit zusammenfaßt. Solche zirkelhaften Konstruktionen können unter Umständen eindeutig ausführbar sein, es kann aber auch Fälle geben, bei denen die Konstruktion unbestimmt wird, und solche, bei denen der Zirkel nicht erfüllbar ist. Alle diese Möglichkeiten müssen berücksichtigt werden.

Die Verhältnisse liegen hier ähnlich, wie in der Algebra, wo eine Gleichung von der Form $x = f(x)$ unter Umständen eine eindeutige Lösung besitzt, während in andern Fällen die Zahl x unbestimmt bleibt, oder endlich die Gleichung durch keinen Wert von x befriedigt wird und deshalb unlösbar ist. Wenn z. B. die Gleichung

$$x = a + bx$$

vorgelegt ist, so treten diese Fälle auf, je nachdem $a = 1$, $b = -1$, oder $a = 0$, $b = 1$, oder $a = 1$, $b = 1$ gesetzt wird, während für $a = 1$, $b = 0$ die Definition von x zirkelfrei wird.

Da die übliche Definition des Mengenbegriffs zirkelhafter Natur ist, so können auch hier alle diese Fälle vorkommen. Die Auffassung, daß irgendwelche Dinge stets zusammengefaßt werden könnten, ist dann aber nicht mehr haltbar. Wenn man verlangt, alle und nur die Zusammenfassungen zusammenzufassen, die sich nicht mit zusammenfassen, so verlangt man Unmögliches, und zwar deshalb, und *nur* deshalb, weil der vorliegende Zirkel nicht erfüllbar ist.

Daraus folgt auch, daß eine Menge nicht an sich schon gegeben ist, wenn nur die Elemente gegeben sind. Die Menge muß vielmehr erst gebildet werden, und sie kann nur dann ohne weiteres gebildet werden, wenn man weiß, daß dadurch kein Zirkel entsteht.

Man hat oft hervorgehoben, daß eine Menge, die ein einziges Element enthält, oder, wie man auch sagt, die „aus einem Element besteht", nicht mit diesem Element verwechselt werden darf. Noch weniger aber darf man eine Menge, die viele Elemente enthält, mit dem Inbegriff aller dieser Elemente verwechseln. „Viele Dinge" sind nicht ein Ding und dürfen nicht mit einem Ding identifiziert werden. Man kann ihnen aber i. a. ein Ding zuordnen, und man kann dies immer tun, wenn dadurch kein Zirkel, oder zum mindesten kein unerfüllbarer Zirkel entsteht.

Da im gewöhnlichen Leben stets der zirkelfreie Fall vorliegt, so wird hier oft ein zusammengesetztes Ding nicht von dem Inbegriff aller seiner Teile unterschieden, obwohl dies nicht dasselbe ist; ein Wald, als Einheit aufgefaßt, ist nicht identisch mit den Bäumen, aus denen er „besteht": man geht zwar *in* den Wald, aber nur *zwischen* die Bäume.

Für die Mengenlehre ist die Unterscheidung von Wichtigkeit, einerseits, weil es hier auf die Zahl der Dinge ankommt, dann aber auch, weil hier der Fall eintreten kann, daß zwar die Elemente sämtlich existieren, daß aber die zugehörige Menge infolge eines unerfüllbaren Zirkels nicht gebildet werden kann.

§ 3.

Menge und Gesamtheit.

Es ist gut, die eben genannte Unterscheidung auch in der Sprache zum Ausdruck zu bringen. Es wäre aber oft unbequem, von vielen Dingen immer in der Mehrzahl reden zu müssen, man verwendet bequemer eine Einzahl, indem man von ihrer *Gesamtheit* spricht. Dies soll auch im folgenden geschehen und ist unbedenklich, wenn man nur darauf achtet, daß dann das Wort „Gesamtheit" nicht dasselbe bedeutet wie „Menge". Unter einer Gesamtheit von Dingen sind vielmehr die Dinge selbst zu verstehen, während die Menge, welche die Dinge als Elemente enthält, ein einzelnes, i. a. von ihnen verschiedenes Ding darstellt.

Wenn z. B. der Satz, daß eine Zahl eindeutig in Primfaktoren zerlegbar ist, für die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen gilt, so gilt er für die Zahlen selbst, für jede einzelne natürliche Zahl. Wenn aber die Menge aller natürlichen Zahlen Element einer Menge M ist, so kann es sein, daß die Menge M nur ein einziges Element enthält; die Zahlen selbst sind dann sicher nicht Elemente von M.

Eine Menge ist also ein wirkliches Individuum, eine Gesamtheit dagegen steht nur im sprachlichen Ausdruck in der Einzahl und bedeutet in Wirklichkeit fast stets eine Mehrzahl. Speziell kann allerdings der Ausdruck auch für den Fall verwendet werden, daß die Zahl der Dinge gleich Eins oder auch gleich Null ist. In ähnlicher Bedeutung, wie hier das Wort „Gesamtheit", wurde oben schon die Bezeichnung „Inbegriff" verwendet.

Die Ursache der mengentheoretischen Antinomien läßt sich nun damit erklären, daß nicht jeder Gesamtheit von Dingen eine Menge entspricht. So kann man zwar ohne Widerspruch von allen sich selbst nicht enthaltenden Mengen reden, oder auch von der Gesamtheit aller dieser Mengen, aber es gibt keine Menge, welche alle diese Mengen und nur sie enthält.

Man kann hier allerdings einen anderen Standpunkt einnehmen und sagen, daß es immer an sich schon eine Zusammenfassung bedeutet, wenn man von einer „Gesamtheit" von Dingen, oder auch schon, wenn man von „allen" Dingen mit einer gewissen Eigenschaft spricht, und daß jede solche Zusammenfassung als Menge bezeichnet werden soll. In diesem

Falle ist es tatsächlich widerspruchsvoll und deshalb sinnlos, von allen sich selbst nicht enthaltenden Mengen zu sprechen. Der Widerspruch rührt dann aber nur davon her, daß mit dieser Ausdrucksweise die Bildung eines unmöglichen Begriffs verknüpft sein soll.

Es ist aber nicht notwendig, diesen Standpunkt einzunehmen. Die Verhältnisse dürften im Gegenteil klarer werden, wenn man den Mengenbegriff dahin abändert, daß auch eine wirkliche Zusammenfassung von Dingen noch keine Menge bedeuten soll, daß vielmehr die Mengen nur Dinge sind, welche den Zusammenfassungen *zugeordnet* werden, soweit dies möglich ist. Es ist dabei gut, die Zusammenfassungen selbst überhaupt nicht als „Dinge" zu bezeichnen.

In diesem Falle kann man stets von einer Gesamtheit von Mengen sprechen und darunter auch ein wirkliches Zusammenfassen verstehen, ohne daß damit von selbst die Bildung einer Menge und unter Umständen ein unerfüllbarer Zirkel verknüpft wäre.

Verschiedene Begriffe, die für Mengen erklärt werden, haben dann schon einen Sinn, wenn nur eine Gesamtheit vorgelegt ist. So kann man z. B. behaupten, daß die Gesamtheit aller sich nicht selbst enthaltenden Mengen nicht abzählbar ist und kann fragen, ob sie wohlgeordnet werden kann. Zum Abzählen oder Wohlordnen gehören eben nur die „vielen Dinge", die Elemente, allerdings „in ihrer Gesamtheit", aber nicht das eine Ding, die Menge, die hier gar nicht existiert.

§ 4.

Die reinen Mengen.

Wenn man sich überzeugt hat, daß beliebig vorgegebenen Dingen nicht stets eine Menge zu entsprechen braucht (nämlich dann nicht, wenn die Bildung derselben einen unerfüllbaren Zirkel bedeutet), so verschwinden die bekannten Widersprüche.

Es entsteht nun die Frage, ob sich damit eine vollständige Begründung der Mengenlehre erreichen läßt.

Der Begriff einer Zusammenfassung von beliebigen Dingen ist für eine strenge Grundlegung jedenfalls zu unbestimmt, solange nicht genau definiert ist, was man dabei unter einem Ding zu verstehen hat. Um hier eine scharfe Umgrenzung herbeizuführen, kann man so vorgehen, daß man für die reine Mengenlehre alles ausschließt, was nicht unbedingt nötig ist, d. h. alles bis auf die Mengen selbst. Man erhält so die „reinen Mengen", deren Elemente selbst stets nur wieder reine Mengen sind[8a]).

[8a]) Anmerkung bei der Korrektur. Den Gedanken, das System dieser reinen Mengen als Grundlage der Untersuchung anzunehmen, hatte ich 1920 Herrn

Um aber auch die erwähnten, im Begriff der Zusammenfassung selbst liegenden Schwierigkeiten vollständig zu vermeiden und ein festes Fundament zu gewinnen, werden wir diese Mengen rein axiomatisch festlegen.

Ein *Punkt* ist in der Mathematik nicht, „was keinen Teil hat", sondern er ist ein ideelles Ding, das gewissen Axiomen genügt, das aber durch mannigfache Analogien mit dem verknüpft ist, was man sich anschaulich unter einem Punkt vorstellt.

Eine *natürliche Zahl* ist m. E. nicht ein aufgeschriebenes Zeichen, sondern ein ideelles Ding, das gewissen Axiomen genügt, das aber hinreichend Analogien besitzt mit den Zeichen, die wir zum Rechnen benützen.

So soll auch eine *Menge* nicht eine Zusammenfassung sein, sondern ein ideelles Ding, das gewissen Axiomen genügt, das aber in enger Analogie steht mit den anschaulichen Zusammenfassungen, und zwar insbesondere mit denen, die oben als „reine Mengen" bezeichnet wurden.

Das System dieser Dinge, deren Existenz lediglich in der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems begründet ist, kann als Grundlage für die Mengenlehre und für die sonstige Mathematik verwendet werden.

Durch die axiomatische Auffassung, nach der die Mengen nur Dinge und nicht Zusammenfassungen bedeuten, wird insbesondere erreicht, daß man nunmehr diese Dinge in beliebiger Weise anschaulich zusammenfassen kann, ohne in die Gefahr eines Zirkels zu geraten. Diese Zusammenfassungen dürfen dann aber nicht selbst als Mengen bezeichnet werden, sondern etwa als *Systeme* von Mengen. Unter einer *Gesamtheit* von Mengen sollen auch weiterhin die betreffenden Mengen selbst verstanden werden. Die Unterscheidung zwischen System und Gesamtheit ist aber nach Festlegung des Mengenbegriffs nicht von Bedeutung.

Da die Systeme von Mengen jetzt nicht mehr Grundobjekte der Mengenlehre sind, die selbst als Elemente auftreten können, so ist es auch zwecklos, nun weiter in beliebiger Steigerung Systeme von Systemen usw. zu bilden und sich dabei in neue Zirkel zu verstricken.

Bernays mitgeteilt. Die Axiomatik Fraenkels (vgl. A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 2. Aufl. (Berlin 1923); Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 250–273) benutzt ebenfalls nur solche Mengen, sucht aber mit Zermelo die Antinomien durch weitere Einschränkungen auszuschließen.

Kapitel 2.

Die Axiome der Mengen.

§ 5.

Das Axiomensystem.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir in Anlehnung an die Axiomatik Hilberts[9]) sagen:

Wir denken ein System von Dingen, die wir Mengen nennen, und eine Beziehung, die wir mit β bezeichnen. Die genaue und vollständige Beschreibung geschieht durch die folgenden Axiome:

I. Axiom der Beziehung.

Für beliebige Mengen M und N ist stets eindeutig entschieden, ob M die Beziehung β zu N besitzt oder nicht.

II. Axiom der Identität.

Isomorphe Mengen sind identisch.

III. Axiom der Vollständigkeit.

Die Mengen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung der Axiome I *und* II *keiner Erweiterung mehr fähig ist,* d. h. es ist nicht möglich, zu den Mengen noch weitere Dinge hinzuzunehmen, so daß auch in dem so entstehenden neuen System die Axiome I und II erfüllt sind.

Der Ausdruck „isomorph" wird in § 7 erklärt werden. Wird das den Axiomen genügende System mit Σ bezeichnet, so bedeutet das Wort „Menge" stets nur „Ding des Systems Σ". Die Mengen sollen aber rein ideelle Dinge sein, die lediglich durch die zwischen ihnen festgesetzten Beziehungen bestimmt sind.

Die Mengen werden im folgenden mit M, N, A, a . . bezeichnet, die Systeme von Mengen mit Σ, $\mathfrak{S}$ . . ., Gleichungen zwischen Mengen oder Systemen ($A = B$, $\Sigma_1 = \Sigma_2$, . . .) bedeuten Identität.

§ 6.

Das erste Axiom.

Es sei zunächst ein beliebiges, aber festes System Σ gegeben, in welchem das erste Axiom erfüllt ist. Das Wort „Menge" soll aber

---

[9]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (4. Aufl., Leipzig und Berlin 1913) S. 2 und Anhang VI (Über den Zahlbegriff) S. 238.

Die drei Axiome sind, wie sich zeigen wird, *willkürliche Annahmen*; zwischen „Axiomen" und „Postulaten" wird hier nicht unterschieden.

auch hier nur bedeuten: „Ding des der Betrachtung zugrunde gelegten Systems Σ“.

Wenn eine Menge M zu einer Menge A die Beziehung β besitzt, oder kurz, wenn $M\beta A$ gilt, so soll A ein *Element* von M heißen. Wir werden i. a. die in der Mengenlehre üblichen Bezeichnungen beibehalten und deshalb für die Beziehung $M\beta A$ auch sagen, die Menge M „enthält“ die Menge A. Dabei kann M noch weitere Elemente $B, C, D, \ldots$ enthalten, aus Axiom I folgt aber, daß die Gesamtheit aller dieser Elemente stets eindeutig bestimmt ist.

Wenn M gegeben ist, so kann man auch umgekehrt sagen, daß die Mengen $A, B, C, D, \ldots$ zusammen die Menge M „bilden“, doch darf man sich durch diesen Ausdruck nicht zu falschen Vorstellungen verleiten lassen. Beliebige Mengen brauchen nicht stets eine Menge zu bilden, d. h. es wird nicht verlangt, daß stets eine Menge existiert, welche zu einer gegebenen Gesamtheit von Mengen die Beziehung β hat.

Es ist überhaupt für manche Zwecke vorteilhaft, sich unter der Beziehung β nicht ein anschauliches „Enthalten“ vorzustellen, sondern lediglich eine Beziehung der Dinge zueinander, die man sich auch durch Pfeile dargestellt denken kann und die von ähnlicher Art ist, wie etwa die Beziehung der Zahl $n+1$ zur Zahl n.

So macht es auch keine Schwierigkeit, sich eine Menge vorzustellen, die „sich selbst als Element enthält“, z. B. eine Menge, die *nur* sich selbst enthält. Es ist dies einfach ein Ding des Systems Σ, welches die Beziehung β auch zu sich selbst, bzw. nur zu sich selbst besitzt. Daß ein Ding eine Beziehung zu sich selbst besitzen kann, ist nichts Ungewöhnliches; die Ähnlichkeit z. B. ist eine Beziehung, welche eine geometrische Figur auch zu sich selbst, die Identität eine solche, welche sie nur zu sich selbst besitzt.

Ein Ding von Σ, welches die Beziehung β zu keinem Ding besitzt (nicht nur zu keinem andern), soll eine *Nullmenge* heißen. Es ist dies eine Menge, welche kein Element enthält und deshalb der gewöhnlich so genannten Nullmenge entspricht. Sie besitzt aber hier (wenn sie überhaupt vorhanden ist) genau dieselbe Existenz wie irgendwelche andern Dinge von Σ, im Gegensatz zu der gewöhnlichen Mengenlehre, wo sie als „Zusammenfassung, die nichts zusammenfaßt“ eine uneigentliche Bedeutung hat.

Ein Ding von Σ, welches die Beziehung β allein zu einer Nullmenge besitzt, welches also eine Nullmenge als einziges Element enthält, werde als *Einsmenge* bezeichnet.

Wird die Beziehung β durch Pfeile dargestellt, so kann man die Mengen selbst etwa durch Ringe darstellen, von denen diese Pfeile ausgehen. Eine Nullmenge wäre dann durch einen Ring darzustellen, von

dem kein Pfeil ausgeht, eine Einsmenge durch einen solchen, von dem nur ein Pfeil ausgeht, der zu einer Nullmenge zeigt. Der obere Ring in dieser Figur: bedeutet eine Menge, welche eine Null- und eine Einsmenge als Elemente enthält. Eine sich selbst enthaltende Menge läßt sich durch einen Ring darstellen, von dem ein Pfeil ausgeht, der zu dem Ring selbst zurückführt: (*J-Menge*).

Wenn man die in der Mengenlehre üblichen Klammern verwendet, so lassen sich zwar die Null- und Einsmengen direkt durch $\{\}$ bzw. $\{\{\}\}$ darstellen, für eine sich selbst enthaltende Menge ist jedoch eine Gleichung von der Form $H = \{A, \ldots, H\}$ bzw. $J = \{J\}$ nötig.

§ 7.

Vollständige Systeme.

Das Grundsystem Σ sei wie in § 6 gegeben. Als Beispiel kann etwa ein aus Null-, Eins- und J-Menge bestehendes genommen werden.

Beliebige Dinge von Σ kann man zu einem *Teilsystem* zusammenfassen; ein solches ist stets vollständig bestimmt, wenn von jeder Menge eindeutig entschieden ist, ob sie ihm angehört oder nicht.

Ein System von Mengen, welches mit jeder Menge auch alle Elemente dieser Menge enthält, werde ein *vollständiges System* genannt. Das System Σ ist selbst ein vollständiges System.

Ist nun eine beliebige Menge M vorgelegt, so gibt es mindestens ein vollständiges System (nämlich Σ), welches die sämtlichen Elemente von M enthält. Diejenigen Mengen, welche *jedem* derartigen System angehören, sollen *in M wesentlich* heißen.

Das System der in M wesentlichen Mengen werde mit Σ_M bezeichnet. Es ist eindeutig bestimmt, denn wenn N eine beliebige Menge ist, so gibt es entweder ein vollständiges System, welches alle Elemente von M, aber nicht die Menge N enthält, oder aber es gibt kein solches System. Im zweiten Fall und nur in diesem gehört die Menge N zum System Σ_M.

Der Definition zufolge ist jedes Element von M in M wesentlich. Ist ferner die Menge A in M wesentlich, und ist a Element von A, so ist auch a in M wesentlich, denn es gibt kein vollständiges System, welches die Menge A, aber nicht die Menge a enthält. Hieraus folgt, daß auch Σ_M ein vollständiges System ist, welches die Elemente von M enthält. Es gilt also:

Satz 1. *Die in einer Menge M wesentlichen Mengen bilden ein vollständiges System, welches alle Elemente von M enthält. Dasselbe gilt auch für die Menge M und die in ihr wesentlichen Mengen zusammen.*

Die in einer Menge M wesentlichen Mengen gehören nach Definition jedem vollständigen System an, welches alle Elemente von M enthält, und also insbesondere auch jedem vollständigen System, welches die Menge M enthält. Dies ergibt:

Satz 2. *Ein vollständiges System enthält mit jeder Menge M auch alle in M wesentlichen Mengen.*

Hieraus läßt sich weiter die Folgerung ziehen:

Satz 3. *Ist A in B wesentlich und B in C, so ist auch A in C wesentlich.*

Das System Σ_C der in C wesentlichen Mengen ist nämlich nach Satz 1 ein vollständiges System. Es enthält nach Voraussetzung die Menge B und folglich nach Satz 2 auch die Menge A.

Das System der Mengen, welche entweder mit einem Element von M identisch oder in einem Element von M wesentlich sind, ist ein vollständiges System, welches alle Elemente von M enthält, und es muß deshalb auch alle in M wesentlicher Mengen enthalten. Es gilt also:

Satz 4. *Wenn A in M wesentlich ist, so ist A Element von M oder in einem Element von M wesentlich.*

Da umgekehrt jede in einem Element von M wesentliche Menge nach Satz 3 auch in M selbst wesentlich ist, so ist das System der in M wesentlichen Mengen identisch mit dem System, das aus den Elementen von M und den in diesen Elementen wesentlichen Mengen besteht.

Eine umkehrbar eindeutige Abbildung von zwei vollständigen Systemen aufeinander heiße *beziehungstreu*, wenn mit der Beziehung $A \beta a$ für Mengen des einen Systems stets auch die Beziehung $A' \beta a'$ für die zugeordneten Mengen des andern Systems erfüllt ist und umgekehrt.

Zwei Mengen M und M' heißen *isomorph*, wenn sich die aus den Mengen M bzw. M' und den darin wesentlichen Mengen bestehenden Systeme $\Sigma_{\{M\}}$ und $\Sigma_{\{M'\}}$ umkehrbar eindeutig und beziehungstreu aufeinander abbilden lassen, und zwar so, daß dabei M auf M' abgebildet wird[10]). Jede Menge ist mit sich selbst isomorph, und zwei Mengen, die einer dritten isomorph sind, sind unter sich isomorph.

§ 8.

Das zweite Axiom.

Es werde jetzt vorausgesetzt, daß das zugrunde gelegte System Σ auch dem zweiten Axiom genügt, welches besagt, daß isomorphe Mengen

[10]) Daß diese letztere Bedingung nicht überflüssig ist, zeigt das Beispiel $A = \{A, B\}$, $B = \{A\}$, wo A mit B nicht isomorph ist.

identisch sind. Es soll also m. a. W. in Σ zu keiner Menge eine andere, mit ihr isomorphe geben.

Wenn die Mengen M und M' dieselben Elemente besitzen, so sind wegen Satz 4 auch die Systeme Σ_M und $\Sigma_{M'}$ identisch und die Mengen M und M' sind isomorph. Nach Axiom II ergibt sich also der Satz:

Satz 5. *Zwei Mengen, welche dieselben Elemente besitzen, sind identisch.*

Es genügt jedoch nicht, das zweite Axiom durch diesen Satz zu ersetzen. Man erkennt dies an folgendem Beispiel (vgl. auch § 18):

Das System Σ enthalte eine Menge J, welche als einziges Element sich selbst enthält und also der Gleichung genügt:

$$J = \{J\}.$$

Ferner sei eine Menge K vorhanden, welche ebenfalls nur sich selbst enthält und folglich der Gleichung genügt:

$$K = \{K\}.$$

Nimmt man nun an, es sei $J \neq K$, so sind die Elemente der beiden Mengen verschieden, und in Einklang mit Satz 5 auch die Mengen selbst. Das System könnte nun noch weitere solche Mengen enthalten, welche ebenfalls nur sich selbst als einziges Element besitzen und doch sämtlich als verschieden zu betrachten wären, und zwar könnten diese Mengen in ganz unbeschränkter Zahl auftreten, über jede vernünftige[11]) Mächtigkeit hinaus, was jedenfalls nicht zweckmäßig wäre. Da zudem die Annahme $J = K$ den Axiomen nicht widersprechen würde, so wäre die Frage, ob J mit K identisch ist, nicht entscheidbar.

Nach Axiom II müssen nun aber alle diese Mengen identisch sein, da sie miteinander isomorph sind. Es kann also höchstens *eine* Menge geben, welche sich selbst als einziges Element enthält; sie werde im folgenden als *J-Menge* bezeichnet.

Aus Axiom II, oder Satz 5 folgt weiter, daß es auch nur *eine* Nullmenge und ebenso nur *eine* Einsmenge geben kann. Diese sind aber voneinander und von der J-Menge verschieden, da sie, wie leicht zu sehen, nicht isomorph sind.

Wenn die Mengen A, B, C den Beziehungen genügen: $A = \{B\}$, $B = \{C\}$, $C = \{A\}$, so sind sie isomorph und daher nach Axiom II untereinander und folglich mit der J-Menge identisch.

Allgemein kann man schließen: Wenn das Grundsystem Σ fest gegeben ist und dem ersten Axiom genügt, so ist eindeutig entschieden, ob

[11]) Jedoch nicht über die Mächtigkeit der „Menge aller Dinge" hinaus, sofern man diese nichtaxiomatische Menge zuläßt.

es auch dem zweiten Axiom genügt oder nicht. Wenn auch das zweite Axiom erfüllt ist, so ist für beliebig gegebene Mengen wiederum eindeutig entschieden, ob sie isomorph sind oder nicht, und folglich auch, ob sie identisch sind oder nicht.

§ 9.

Vereinigung und Durchschnitt von Systemen.

Es seien jetzt beliebig viele Grundsysteme Σ_α gegeben, von denen jedes für sich den Axiomen I und II genügt. Ein System Σ heißt eine *Vereinigung* dieser Systeme, wenn es ebenfalls diesen Axiomen genügt, und wenn jede Menge in Σ isomorph ist mit mindestens einer der gegebenen Mengen, und umgekehrt jede der gegebenen Mengen isomorph ist mit einer bestimmten Menge in Σ. Dabei ist der Ausdruck „isomorph" ebenso zu erklären wie vorher bei einem einzigen Grundsystem, und es sind auch hier alle Mengen, die einer gegebenen isomorph sind, unter sich isomorph.

Man kann nun ein solches Vereinigungssystem Σ dadurch erhalten, daß man alle in den Systemen Σ_α vorkommenden Dinge zusammennimmt, jedoch mit der Festsetzung, daß alle unter sich isomorphen Mengen (und nur solche) als identisch zu betrachten sind, und daß somit in Σ eine Menge M zu einer Menge N dann und nur dann die Beziehung β besitzt, wenn dies in einem der gegebenen Systeme Σ_α der Fall ist.

Die getroffene Festsetzung ist zulässig, denn es steht ihr keine andere Festsetzung entgegen, nach der etwa irgendwelche isomorphen Mengen nicht identisch sein sollten. Für die einzelnen Systeme Σ_α gilt dies nach Voraussetzung, und wenn zwischen Mengen von verschiedenen dieser Systeme eine andere Festsetzung getroffen wäre, so kann diese aufgehoben werden, ohne daß sich dadurch die einzelnen Systeme Σ_α verändern. Wenn also z. B. in mehreren der gegebenen Systeme eine Nullmenge vorkommt, so ist dies eben als „die" Nullmenge zu betrachten, die allen diesen Systemen angehört.

Man findet somit, daß es zu beliebigen Grundsystemen Σ_α stets eine Vereinigung Σ gibt. Es ist wesentlich, zu beachten, daß bei der Bildung von Σ nirgends die Existenz von noch nicht vorhandenen Dingen gefordert wird; das System Σ kann auch sehr wohl mit einem der gegebenen Systeme identisch sein.

Es gibt auch im wesentlichen nur *ein* Vereinigungssystem Σ, denn wenn Σ' ein ebensolches ist, so muß jede Menge in Σ mit einer bestimmten in Σ' isomorph sein und umgekehrt, d. h. die Systeme Σ und Σ' lassen sich umkehrbar eindeutig und beziehungstreu aufeinander abbilden.

Innerhalb eines Systems Σ, in dem die Axiome I und II erfüllt sind, läßt sich sowohl die Vereinigung als auch der Durchschnitt von beliebigen Systemen ohne weiteres bilden. Vereinigung und Durchschnitt von vollständigen Systemen sind wieder vollständige Systeme. Der Durchschnitt aller vollständigen Systeme, welche eine gegebene Menge M enthalten, besteht wegen Satz 1 und Satz 2 aus der Menge M und allen in M wesentlichen Mengen.

§ 10.

Das dritte Axiom.

Axiom III ist das Hilbertsche Vollständigkeitsaxiom [12]). Es besagt hier, daß das System Σ das größtmögliche sein soll, welches den Axiomen I und II genügt.

Eine Folge dieses Axioms ist der Satz:

Satz 6. *Zu einer bestimmten Gesamtheit von Mengen gibt es dann und nur dann eine Menge, welche die Beziehung β gerade zu dieser Gesamtheit besitzt, wenn die Annahme, eine solche Menge existiere, nicht mit Axiom* I *in Widerspruch steht.*

Wenn nämlich diese Annahme nicht mit Axiom I in Widerspruch steht, so muß es ein dem ersten Axiom genügendes vollständiges System geben, das eine Menge M enthält, welche die Beziehung β gerade zu den gegebenen Mengen besitzt. Die in M wesentlichen Mengen bilden dann ein Teilsystem Σ_M, das zugleich Teilsystem von Σ ist und daher auch dem zweiten Axiom genügt. Wenn nun die Menge M (oder eine dazu isomorphe) nicht in Σ vorkommen würde, so könnte sie auch mit keiner Menge von Σ_M isomorph sein und würde deshalb mit Σ_M zusammen ein den beiden ersten Axiomen genügendes vollständiges System ergeben, dessen Vereinigung mit Σ eine Erweiterung von Σ darstellen würde.

Das dritte Axiom läßt sich aber nicht durch Satz 6 ersetzen. Da sich nämlich das Wort „Menge“ nur auf die Dinge von Σ bezieht, so wäre z. B. für die J-Menge die Zugehörigkeit zu Σ zwar möglich, aber nicht notwendig. Das System Σ wäre also nicht eindeutig bestimmt.

Der folgende Satz ist jedoch mit Axiom III gleichwertig:

Satz 7. *Eine irgendwie definierte Menge existiert (d. h. es gibt in Σ eine der Definition genügende Menge), wenn die Annahme der Existenz von M den beiden ersten Axiomen nicht widerspricht.*

---

[12]) D. Hilbert [9]), S. 22 und S. 240. Bei den „vollständigen Systemen“ wird nur Vollständigkeit „nach unten“, in bezug auf die Elemente, verlangt, während das „Vollständigkeitsaxiom“ auch solche „nach oben“ fordert. Eine Verwechslung ist woh' nicht zu befürchten.

Es muß nämlich in diesem Fall ein den beiden ersten Axiomen genügendes System geben, das die Menge M enthält, und die Vereinigung dieses Systems mit Σ würde eine Erweiterung von Σ darstellen, wenn nicht Σ schon die Menge M enthalten würde. Umgekehrt ist auch Axiom III eine Folge von Satz 7, denn wenn sich das System Σ noch erweitern ließe, so müßte jede neu hinzukommende Menge nach Satz 7 doch schon zu Σ gehören.

Aus Axiom III folgt insbesondere, daß das System Σ nicht leer sein kann, denn es müssen sicher die Nullmenge, die Einsmenge und die J-Menge zu Σ gehören, und weitere Mengen sind leicht zu bilden. Da ferner die Annahme der Existenz einer „Menge aller Mengen" den beiden ersten Axiomen nicht widerspricht, da aus diesen für keine Menge folgen kann, daß sie ihr nicht als Element angehört, so muß das System Σ nach Satz 7 auch eine solche Menge enthalten (vgl. u. § 12).

Es ist aber noch zu zeigen, daß auch wirklich ein System Σ existiert, welches allen Forderungen genügt, m. a. W., daß das Axiomensystem selbst keinen Widerspruch enthält.

§ 11.

Die Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit der Axiome.

Das in § 5 aufgestellte Axiomensystem ist widerspruchsfrei, d. h. aus den dort angegebenen Axiomen I, II, III folgt logisch kein Widerspruch. Um dies einzusehen, werden wir ein System von Dingen bilden, in dem alle drei Axiome erfüllt sind.

Wir gehen dazu aus von beliebigen Systemen Σ_α, in denen die beiden ersten Axiome I und II erfüllt sind. Daß es solche Systeme gibt, zeigt das Beispiel eines aus Null- und Einsmenge bestehenden Systems, d. h. also eines Systems, welches aus zwei verschiedenen Dingen besteht, von denen das eine die Beziehung β zum andern und nur zu diesem, dieses aber die Beziehung β zu keinem Ding besitzt.

In § 9 wurde gezeigt, wie man beliebige solche Systeme Σ_α zu einem einzigen System Σ vereinigen kann, in welchem ebenfalls die Axiome I und II erfüllt sind. Wir bilden nun in dieser Weise ein System Σ als Vereinigung *aller* überhaupt möglichen Systeme Σ_α, in denen die Axiome I und II gelten. Von allen diesen Systemen zu sprechen, bedeutet keinen Zirkel, da es sich nur um Systeme von Mengen, nicht um Systeme von Systemen handelt. Die Vereinigung kann genau in der in § 9 angegebenen Weise vollzogen werden.

Das so entstehende System Σ genügt nun auch dem dritten Axiom, denn jedes System Σ', welches den Axiomen I und II genügt, muß unter

den Systemen Σ_α vorkommen und kann deshalb keine Menge enthalten, die nicht mit einer Menge in Σ isomorph wäre, d. h. Σ' kann keine Erweiterung von Σ darstellen.

Es folgt aus diesen Betrachtungen weiter, daß das System Σ durch die drei Axiome *eindeutig* bestimmt ist, d. h. jedes System Σ', welches allen drei Axiomen genügt, läßt sich umkehrbar eindeutig und beziehungstreu auf Σ abbilden. Andernfalls würde nämlich entweder Σ oder Σ' eine Menge enthalten, welche mit keiner Menge des andern Systems isomorph wäre; die nach § 9 zu vollziehende Vereinigung von Σ mit Σ' wäre dann aber eine Erweiterung von mindestens einem dieser Systeme, also Axiom III für dieses nicht erfüllt.

Die Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit des Axiomensystems ist hierdurch gewährleistet. Jede eindeutige, auf das System bezügliche Frage besitzt eine eindeutige Antwort, gleichgültig ob man sie mit menschlichen Hilfsmitteln finden kann oder nicht. Zwei wesentlich verschiedene Antworten würden nämlich zwei sich widersprechende Sätze und damit einen Widerspruch im System Σ ergeben, was unmöglich ist.

Die Unabhängigkeit der Axiome ergibt sich aus folgenden Beispielen:

In einem System, das aus zwei Dingen besteht, von denen jedes beliebig die Beziehung β entweder zum andern oder zu keinem Ding besitzt, ist das erste Axiom nicht erfüllt.

Ein System, das aus zwei nicht identischen Dingen besteht, von denen jedes die Beziehung β zu keinem Ding besitzt, genügt dem ersten, aber nicht dem zweiten Axiom.

Ein System, das aus Null- und Einsmenge besteht, genügt den beiden ersten, aber nicht dem dritten Axiom.

Die Axiome sind also in dem Sinne voneinander unabhängig, daß keines aus den vorhergehenden gefolgert werden kann; das zweite Axiom hat jedoch ohne das erste, und das dritte ohne die beiden ersten keinen eindeutigen Sinn.

§ 12.

Einwendungen.

Im Hinblick auf die Antinomien sollen noch einige Einwendungen besprochen werden, die man gegen das System Σ vorbringen könnte.

Nach G. Cantor besitzt eine Menge stets geringere Mächtigkeit als die Menge ihrer Teilmengen. Dies kann aber für die Menge aller Mengen nicht zutreffen, da diese alle ihre Teilmengen als Elemente enthalten muß. Und doch haben wir geschlossen, daß im System Σ eine Menge aller Mengen vorhanden ist.

In der Tat versagt hier auch der Beweis Cantors, denn er hat zur Voraussetzung, daß eine beliebige Gesamtheit von Mengen stets wieder eine Menge bildet, und diese Voraussetzung ist in Σ nicht erfüllt. Man kann vielmehr umgekehrt schließen, daß man durch die Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens auf eine Zuordnung der Menge aller Mengen zu der Menge ihrer Teilmengen, mit der sie identisch ist, stets eine Gesamtheit von Mengen erhält, welche nicht die Gesamtheit der Elemente einer bestimmten Menge darstellt. Im einfachsten Fall erhält man die sich nicht selbst enthaltenden Mengen; die Annahme einer Menge, welche diese und nur sie als Elemente enthält, steht tatsächlich in Widerspruch mit Axiom I, denn sie müßte nach diesem Axiom entweder die Beziehung β zu sich selbst besitzen oder nicht, was beides unmöglich ist.

Für die Menge aller Mengen ist jedoch eindeutig entschieden, daß sie die Beziehung β zu sich selbst und zu jeder andern Menge besitzt, und umgekehrt muß für jede andere Menge eindeutig bestimmt sein, zu welchen Mengen sie die Beziehung β besitzt, denn sonst dürfte sie nicht in Σ vorkommen. Da ferner das System Σ und damit die Gesamtheit aller Mengen eindeutig bestimmt ist, so kann die Existenz der Menge aller Mengen auch aus Satz 6 entnommen werden. Diese Menge besitzt im System Σ die größte Mächtigkeit.

Man kann aber den Einwand gegen das System Σ noch in folgender Form verschärfen:

Angenommen, das System Σ genüge den Axiomen I, II, III. Man betrachte nun die Gesamtheit der Dinge von Σ, welche die Beziehung β nicht zu sich selbst besitzen. Wie schon bemerkt, gibt es in Σ kein Ding, welches die Beziehung β gerade zu diesen Dingen besitzt. Man nehme nun ein neues Ding N, das nicht zu Σ gehört, und setze fest, daß es die Beziehung β zu der soeben betrachteten Gesamtheit besitzen soll. Fügt man dann dieses Ding N zu den Dingen von Σ hinzu, so erhält man ein neues System Σ', welches eine Erweiterung des Systems Σ darstellt, in Widerspruch mit Axiom III.

Hier liegt jedoch ein Fehlschluß vor[13]). Die angegebene Definition von N ist nicht einwandfrei, sie enthält einen inneren Widerspruch. Wenn nämlich N ein „neues", d. h. nicht zum Gesamtsystem Σ gehöriges Ding sein soll, so darf es auch keinem den Axiomen I und II genügenden System angehören. Da es aber andererseits mit Σ zusammen doch ein solches System bilden soll, so widersprechen sich die Forderungen, es gibt kein Ding N, das ihnen genügt, und daher ist auch die Erweiterung des Systems Σ nicht ausführbar.

---

[13]) Vgl. Anm. [5]).

Man hat gelegentlich die Frage aufgeworfen, warum in der Mengenlehre gewisse Axiome zugelassen werden, während das Axiom, daß beliebige Dinge eine Menge bilden, verworfen wird. Daß dieses Axiom zu Widersprüchen führen muß, wurde schon in § 1 besprochen. Es würde in unserem System die Form annehmen:

I*. Zu jeder bestimmten Gesamtheit von Mengen gibt es stets eine Menge, welche die Beziehung β gerade zu dieser Gesamtheit besitzt.

Der wesentliche Unterschied gegenüber den in § 5 aufgestellten Axiomen ist nun der, daß in I* die Existenz von Dingen verlangt wird, die einer gewissen Forderung genügen sollen, ohne Rücksicht darauf, ob sich die betreffende Forderung in jedem Fall erfüllen läßt. Es gibt aber Fälle, in denen sie infolge eines Zirkels nicht erfüllbar ist und dann verlangt das Axiom I* Unmögliches.

In den Axiomen I, II, III dagegen wird überhaupt nicht die Existenz von Dingen verlangt, die nicht an sich schon widerspruchsfrei existieren; nur *wenn* es Dinge gibt, die gewisse Eigenschaften haben, dann werden sie in das System Σ aufgenommen. Für das System Σ selbst ergibt sich dann die widerspruchsfreie Existenz als Folgerung.

Auch die Einwände, die Th. Skolem[4]) gegen die axiomatische Begründung der Mengenlehre erhoben hat, lassen sich auf das vorstehende System nicht anwenden. Insbesondere sind hier alle Begriffe in absolutem Sinn zu verstehen; wenn z. B. gezeigt wird, daß das System Σ mehr als abzählbar unendlich viele Dinge enthält (vgl. § 18), so ist diese Überabzählbarkeit absolut und läßt sich nicht durch besondere Festsetzungen in einem nur abzählbaren Bereich verwirklichen. Allerdings muß eine absolute Logik anerkannt und damit auch die Existenz von Dingen zugelassen werden, die wir nicht in endlicher Weise einzeln definieren können. Die mathematischen Objekte und ihre Eigenschaften müssen von der beschränkten Art, wie wir sie darstellen können, unabhängig sein.

Kapitel 3.
Die Bildung von Mengen.

§ 13.
Zirkelfreie und zirkelhafte Mengen.

Da man nicht jede Gesamtheit von Mengen als die Gesamtheit der Elemente einer neuen Menge betrachten kann, so braucht man andere Regeln oder Prinzipien, die es gestatten, einzelne Mengen zu bestimmen oder aus gegebenen Mengen andere abzuleiten. Solche Regeln liefern insbesondere die Axiome Zermelos[2]), deren Gültigkeit aber noch untersucht werden muß.

Um ein allgemeines Prinzip zu gewinnen, aus dem solche Regeln abgeleitet werden können, werden wir die Mengen und die Systeme von Mengen in *zirkelfreie* und *zirkelhafte* einteilen. Beliebige Mengen können nämlich nur dann nicht eine neue Menge bilden, wenn die Definition der neuen Menge einen unerfüllbaren Zirkel enthält, denn ein anderer Hinderungsgrund ist nicht denkbar. Einem zirkelfreien System wird jedoch stets eine zirkelfreie Menge entsprechen. Es muß aber noch genauer untersucht werden, was unter diesen Begriffen zu verstehen ist.

Dazu sollen zunächst als zirkelhaft alle Mengen ausgeschlossen werden, in denen eine in sich selbst wesentliche Menge wesentlich ist, also insbesondere auch alle sich selbst enthaltenden Mengen, wie die J-Menge oder die Menge aller Mengen. Die übrigbleibenden Mengen bilden ein *vollständiges System* Σ^*, und wir wollen im folgenden, sofern nichts anderes bemerkt wird, das Wort „Menge" auf die Dinge dieses Systems beschränken, so daß also eine Menge, die in einer andern wesentlich ist, stets von ihr verschieden sein muß.

Diese Mengen können aber noch nicht sämtlich als zirkelfrei gelten. Insbesondere wird auch hier ein System von Mengen als zirkelhaft zu betrachten sein, wenn es keine Menge bildet, wie z. B. das System aller Mengen (in Σ^*), dem hier keine Menge aller Mengen entspricht. Solche zirkelhaften Systeme können nun, wie Beispiele zeigen (vgl. die Schlußbemerkung S. 713), auch schon als Teilsysteme von Elementen gewisser Mengen vorkommen, und diese Mengen sind dann ebenso wie alle, in denen solche wesentlich sind, als zirkelhafte Mengen zu bezeichnen.

Da man aber, ohne den Begriff zirkelfrei schon zu kennen, nicht allgemein sagen kann, welche Mengen sich zu einer neuen Menge vereinigen lassen, und da insbesondere auch die „Menge aller zirkelfreien Mengen" nicht selbst eine zirkelfreie Bildung darstellen darf, so erkennt man, daß der Begriff „zirkelfrei" allgemein nicht anders als in zirkelhafter Weise gewonnen werden kann. Man wird durch solche Überlegungen zu folgender Definition geführt, die sich als zweckmäßig erweist:

Eine Menge M (d. h. ein Ding von Σ^*) heißt zirkelfrei, wenn sie selbst und jede in M wesentliche Menge vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist.

Dabei heißt eine Menge „vom Begriff zirkelfrei unabhängig", wenn sie so definiert werden kann, daß die Definition immer dieselbe Menge liefert, gleichgültig, welche Mengen als zirkelfrei bezeichnet werden.

Jede nicht zirkelfreie Menge heißt *zirkelhaft*.

§ 14.

Rechtfertigung der Definition.

Die Frage, welche Mengen als zirkelfrei gelten sollen, ist in der Definition dieses Begriffs[14]) davon abhängig gemacht, ob die Mengen in einer bestimmten Weise definiert werden können. Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß von den Definitionen der Mengen nicht verlangt wird, daß sie mit endlich vielen Worten darstellbar sein sollen. Der Begriff der endlichen Anzahl ist hier noch nicht als definiert anzusehen, und die betrachteten Dinge sollen auch nicht von der Auswahl eines Wörterbuchs abhängig sein. Es ist zudem sehr wohl möglich, daß eine Menge durch eine Operation definiert wird, welche mehr als abzählbar unendlich oft angewendet werden kann. Die Definition muß aber so beschaffen sein, daß sie in jedem einzelnen Fall die Menge eindeutig festlegt. Es muß ja jede Menge irgendwie definiert, d. h. eindeutig festgelegt werden können, sonst hätte schon das erste Axiom keinen bestimmten Sinn.

Da die Definition des Begriffs zirkelfrei auf diesen Begriff selbst Bezug nimmt, so fragt es sich noch, ob nach dieser Definition doch jede Menge eindeutig zirkelfrei oder zirkelhaft ist. Man erkennt aber, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Zunächst sieht man nämlich, daß z. B. die Nullmenge als „Menge ohne Elemente“ sicher eine zirkelfreie Menge darstellt. Dagegen ist die „Menge aller zirkelfreien Mengen“, wenn es eine solche gibt, notwendig zirkelhaft (vgl. Satz 11). Die Bezeichnung „zirkelfrei“ hat also nach der gegebenen Definition sicher eine gewisse Bedeutung, so nämlich, daß sie gewissen Mengen zukommt, während es vielleicht andere Mengen gibt, denen sie nicht zukommt, und zunächst auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, daß es wieder andere Mengen geben kann, für die sich die Entscheidung nicht eindeutig treffen läßt.

Nun sei aber M eine beliebig gegebene Menge. Dann bestehen nur die beiden Möglichkeiten: entweder es gibt für M und zugleich für jede in M wesentliche Menge eine Definition, die so beschaffen ist, daß sie immer dieselbe Menge liefert, auch wenn der oben (vielleicht nicht durchweg eindeutig) definierte Begriff „zirkelfrei“ beliebig verändert wird, indem irgendwelche Mengen als zirkelfrei, die andern als zirkelhaft bezeichnet werden; oder aber, es gibt für wenigstens eine dieser Mengen keine solche Definition. Im ersten Fall muß nun die Menge M endgültig als zirkelfrei bezeichnet werden, und dies kann auch geschehen, ohne daß dadurch nun-

[14]) Es handelt sich bei diesem „Begriff“ nicht um etwas Außermathematisches, sondern nur um eine *Zuordnung* der Bezeichnungen „zirkelfrei“ bzw. „zirkelhaft“ zu den verschiedenen Mengen, also, anders ausgedrückt, um eine „Funktion“ dieser Mengen.

mehr ein Widerspruch gegen die Definition entstünde; im zweiten Fall muß die Menge endgültig als zirkelhaft bezeichnet werden, und auch daraus kann ein Widerspruch gegen die Definition nicht entstehen. Bei der Untersuchung, ob die Menge als zirkelfrei zu bezeichnen ist oder nicht, soll ja gerade diese Bezeichnung zunächst ganz willkürlich gewählt und variiert werden, ohne Rücksicht auf das Endresultat, und dieses ist daher auch eindeutig bestimmt, gleichgültig, ob die Entscheidung schließlich im einen oder im andern Sinne ausfällt. Daraus ergibt sich aber der Satz:

Satz 8. *Jede Menge ist eindeutig entweder zirkelfrei oder zirkelhaft.*

Damit ist die Definition des Begriffs zirkelfrei logisch gerechtfertigt. Man kann sich aber auch überzeugen, daß der Ausdruck „zirkelfrei" zu Recht besteht, d. h. daß in einer nach Definition zirkelfreien Menge kein tatsächlicher Zirkel auftreten kann. Aus der Definition folgt nämlich nach Satz 3 und wegen der Beschränkung der Mengen auf das System Σ^*:

Satz 9. *Ist M eine zirkelfreie Menge, so ist jede in M wesentliche Menge und also insbesondere auch jedes Element von M ebenfalls zirkelfrei und von M verschieden.*

Bei einer zirkelfreien Menge kann man sich also die Elemente der Menge und allgemein die in M wesentlichen Mengen schon vorher in zirkelfreier Weise gebildet denken, ehe die Menge M selbst gebildet wird. Außerdem ist aber auch der im Begriff zirkelfrei selbst enthaltene Zirkel noch dadurch ausgeschaltet, daß die zirkelfreien Mengen von eben diesem Begriff unabhängig sind.

§ 15.

Die Bildung von Mengen.

Für die zirkelfreien Mengen ist nun zu erwarten, daß man eine beliebige Gesamtheit davon stets zu einer Menge vereinigen kann. Freilich kann dann diese Menge nicht in jedem Falle selbst zirkelfrei sein, es gilt aber der Satz:

Satz 10. *Jede feste Gesamtheit von zirkelfreien Mengen bildet eine Menge. Diese kann zirkelfrei oder zirkelhaft sein, sie ist aber von jeder in ihr wesentlichen Menge verschieden.*

Was hier unter einer „festen Gesamtheit" zu verstehen ist, scheint an sich klar zu sein, doch hat gerade dieser Punkt beim Zermeloschen Aussonderungsaxiom Schwierigkeiten gemacht[15]). Man wird z. B. die Ge-

[15]) Vgl. E. Zermelo[2]), S. 263; Th. Skolem[4]), S. 219; A. Fraenkel[5]), S. 231f; A. Fraenkel, Der Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. Sitzungsber. d. Pr. Akad. d. Wissenschaften (1922), S. 253–257.

samtheit aller sich nicht selbst enthaltenden Mengen als feste Gesamtheit zu bezeichnen haben, obwohl sie keine Menge bildet. Dagegen ist offenbar die Gesamtheit aller derjenigen Elemente der Einsmenge, welche mit der Menge, welche diese Gesamtheit als Elemente enthält, identisch sind, keine feste Gesamtheit, obwohl nur das eine zirkelfreie Element der Einsmenge in Frage steht. Man erkennt, daß die Erklärung folgende sein muß:

Unter einer *festen* Gesamtheit ist eine solche zu verstehen, die *vollständig und eindeutig und ohne inneren Widerspruch* definiert ist.

An die Stelle des Zermeloschen Begriffs „definit" tritt also hier der Begriff *fest* oder *widerspruchsfrei*. Eine feste Gesamtheit von Mengen ist identisch mit der Gesamtheit der Mengen eines Systems (§ 7). Dieselbe Bedeutung hat auch der Ausdruck „bestimmte" Gesamtheit in Satz 6 Überhaupt wird man unter einer Gesamtheit von Mengen meist nur eine feste Gesamtheit verstehen.

Es sei nun also eine beliebige feste Gesamtheit von zirkelfreien Mengen vorgelegt. Es ist zu zeigen, daß es eine Menge gibt, welche die gegebenen Mengen und nur diese als Elemente enthält.

Σ_M sei das aus den gegebenen und den darin wesentlichen Mengen bestehende System, also das System der Mengen, die in M selbst wesentlich sein müssen. Dieses System kann die verlangte Menge M nicht enthalten, da diese sonst in sich selbst wesentlich wäre. Man nehme also M als ein neues, d. h. von den Dingen von Σ_M verschiedenes Ding an, welches die Beziehung β gerade zu den vorgeschriebenen Mengen besitzt. Es ist zu zeigen, daß diese Annahme (nach der M ein Ding von Σ^* darstellt) keinen Widerspruch enthält.

Nun kann zwar die Annahme, M sei eine zirkelfreie Menge, einen Widerspruch enthalten, so z. B. wenn das System Σ_M schon alle zirkelfreien Mengen einer gewissen Eigenschaft enthält und die Menge M dieselbe Eigenschaft besitzen müßte. In diesem Fall ist aber die Annahme, M sei eine zirkelhafte Menge, widerspruchsfrei. Da nämlich M mit keiner Menge von Σ_M isomorph sein kann, und da die gegebenen Mengen und damit auch die Mengen des Systems Σ_M sämtlich zirkelfrei sind und man dies bei der Definition der Gesamtheit auch ausdrücklich verlangen kann, so kann aus dieser Definition nicht folgen, daß M als zirkelhafte Menge zu Σ_M gehören muß, und man darf daher M als ein neues Ding betrachten. Die Annahme, M sei eine zirkelhafte Menge, steht aber auch in Einklang mit der Definition des Begriffs zirkelhaft, denn wenn die Definition von M stets dieselbe Menge liefern würde, gleichgültig, welche Mengen als zirkelfrei bezeichnet werden, so könnte es nicht, wie angenommen, zu einem Widerspruch führen, wenn nachträglich M selbst als zirkelfrei bezeichnet wird.

Da also entweder die Annahme, M sei eine zirkelfreie Menge, oder die Annahme, M sei eine zirkelhafte Menge, mit allen getroffenen Festsetzungen in Einklang steht, so ist Satz 10 bewiesen.

Wegen Satz 8 ist die Gesamtheit aller zirkelfreien Mengen eine feste Gesamtheit und sie bildet daher nach Satz 10 eine Menge. Da diese aber nicht zirkelfrei sein kann, da sie sonst sich selbst enthalten müßte, so gilt der Satz:

Satz 11. *Die Menge aller zirkelfreien Mengen existiert und ist zirkelhaft.*

Hierdurch ist die Existenz von zirkelhaften Mengen im System Σ^* gesichert. Es mag zunächst befremdlich erscheinen, daß es Mengen gibt, die nicht anders als mit Beziehung auf den Begriff zirkelfrei definiert werden können, die man also nicht unabhängig davon durch bloßes „Aufweisen" der Elemente geben kann. Es ist jedoch zu bemerken, daß man ebenso auch die Gesamtheit „aller" Mengen nicht durch bloßes „Aufweisen" geben kann ohne den Begriff „alle" zu benutzen, denn sonst könnte die Hinzufügung von neuen Mengen keinen Widerspruch ergeben.

Ein *System* von Mengen heiße *zirkelfrei*, wenn es nur zirkelfreie Mengen enthält und selbst „vom Begriff zirkelfrei unabhängig" ist (vgl. Satz 12). Die Elemente einer zirkelfreien Menge bilden stets ein zirkelfreies System, und umgekehrt bilden die Mengen eines zirkelfreien Systems nach Satz 10 eine Menge, die aber mit allen darin wesentlichen Mengen vom Begriff zirkelfrei unabhängig und daher selbst zirkelfrei sein muß. Den zirkelfreien Systemen und nur diesen entsprechen also zirkelfreie Mengen, und insbesondere gilt:

Satz 12. *Eine feste Gesamtheit von zirkelfreien Mengen bildet dann und nur dann wieder eine zirkelfreie Menge, wenn sie vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist, d. h. wenn sie so definiert werden kann, daß die Definition stets dieselbe Gesamtheit liefert, gleichgültig, welche Mengen als zirkelfrei bezeichnet werden.*

Es sei ein beliebiges zirkelfreies System $\mathfrak{S}$ gegeben. Nimmt man zu den Mengen dieses Systems noch alle darin wesentlichen Mengen hinzu, so erhält man ein vollständiges System $\Sigma_{\mathfrak{S}}$, das ebenfalls zirkelfrei ist.

Um zu erkennen, daß auch die Teilsysteme von $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ zirkelfrei sind, beschränke man die Betrachtung auf die Mengen dieses Systems, unter Weglassung aller andern Mengen. Da, wenn $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ gegeben ist, auch alle Teilsysteme von $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ bestimmt sind, so muß sich jedes dieser Teilsysteme auch unter dieser Beschränkung definieren lassen, d. h. also ohne weitere Bezugnahme auf andere Mengen als die von $\Sigma_{\mathfrak{S}}$. Bei einer solchen Definition kann dann aber eine Bezugnahme auf den Begriff zirkelfrei stets

vermieden werden, denn da die Mengen von $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ sämtlich zirkelfrei sind und auch $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ selbst von diesem Begriff unabhängig ist, so kann ohne eine Änderung im Resultat jede in der Definition auftretende Bedingung, daß irgendeine Menge zirkelfrei sein müsse, als stets erfüllt weggelassen werden, während jede Bedingung, daß irgendeine Menge zirkelhaft sein müsse, als nie erfüllt zu betrachten ist. Dadurch wird die Definition des Teilsystems vom Begriff zirkelfrei unabhängig und dieses ist also zirkelfrei. Da ferner jedes Teilsystem von $\mathfrak{S}$ auch ein solches von $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ darstellt, so gilt allgemein:

Satz 13. *Jedes Teilsystem eines zirkelfreien Systems ist zirkelfrei.*

Aus Satz 12 ergeben sich leicht einfache Beispiele von zirkelfreien Mengen, wie etwa die Nullmenge und die Einsmenge. Daß es aber auch zirkelfreie Mengen geben kann, die nicht durch bloße Anwendung dieses Satzes gebildet werden können, zeigt folgendes Beispiel:

Man setze zur Abkürzung $\{\} = 0$, $\{0\} = 1$, $\{1\} = 2$ usw., allgemein $\{n\} = n + 1$. Dabei werde die Existenz einer solchen unendlichen Reihe von zirkelfreien Mengen, die erst im zweiten Teil vollständig bewiesen werden soll, und damit auch der Begriff der endlichen und der abzählbaren Anzahl als bekannt vorausgesetzt.

Man nehme nun zu diesen Mengen noch abzählbar viele Dinge $M_0, M_1, M_2, \ldots$ hinzu und setze fest, daß M_n die Beziehung β zu den Dingen n und M_{n+1} besitzen soll, so daß $M_n = \{n, M_{n+1}\}$ wird, und zwar für jedes n. Das aus den Dingen $0, 1, 2, \ldots, M_0, M_1, M_2, \ldots$ bestehende System genügt dann den Axiomen I und II, es ist ein vollständiges System und keine der Mengen ist in sich selbst wesentlich. Da ferner diese Mengen sämtlich vom Begriff zirkelfrei unabhängig sind, so folgt insbesondere, daß M_0 eine zirkelfreie Menge ist[16]).

In ähnlicher Weise kann man auch zirkelfreie Mengen bilden, in denen die Nullmenge nicht wesentlich ist.

§ 16.

Besondere Existenzsätze.

Mit Hilfe der Sätze 12 und 13 kann man nun einfachere Existenzsätze aufstellen, die gewissen Axiomen Zermelos entsprechen.

Wie schon bemerkt, gilt speziell:

Satz 14. *Es gibt eine Menge, die „Nullmenge", welche kein Element besitzt, und sie ist zirkelfrei.*

[16]) Es ist dies ein „ensemble extraordinaire" nach D. Mirimanoff, Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles. L'enseignement mathématique **19** (1917), S. 37–52, insbes. S. 42.

Weiter findet man:

Satz 15. *Zu einer zirkelfreien Menge A existiert stets eine zirkelfreie Menge $\{A\}$, welche A als einziges Element enthält, und zu zwei zirkelfreien Mengen A und B existiert stets eine zirkelfreie Menge $\{A, B\}$, welche die Mengen A und B und nur diese als Elemente enthält.*

Da die Mengen A und B nach Voraussetzung zirkelfrei sind, so sind sie auch vom Begriff zirkelfrei unabhängig. Daraus folgt aber nach Satz 12 direkt, daß $\{A\}$ und $\{A, B\}$ ebenfalls zirkelfreie Mengen sind.

Eine Menge T heiße, wie üblich, eine *Teilmenge* der Menge M, wenn jedes Element von T auch Element von M ist.

Wenn die Menge M zirkelfrei ist, so bilden ihre Elemente ein zirkelfreies System und nach Satz 13 gilt dasselbe auch von jeder beliebigen Gesamtheit dieser Elemente. Nach Satz 12 ergibt sich also:

Satz 16. *Jede feste Gesamtheit von Elementen einer zirkelfreien Menge M bildet eine Teilmenge von M. Jede Teilmenge einer zirkelfreien Menge ist zirkelfrei.*

Wir betrachten weiter das System aller Teilmengen von M. Da bei einer beliebigen Änderung des Begriffs zirkelfrei die Gesamtheit der Elemente von M unverändert bleibt und eine Menge T, wenn sie eine Teilmenge von M darstellen soll, keine andern Elemente enthalten kann, so läßt sich Satz 16 anwenden, der zeigt, daß T in jedem Fall eine zirkelfreie Menge sein muß und daß folglich auch die Tatsache, daß T Teilmenge von M ist, nicht vom Begriff zirkelfrei abhängen kann. Die Gesamtheit der Teilmengen bleibt also unverändert und es gilt:

Satz 17. *Jeder zirkelfreien Menge M entspricht eine ebenfalls zirkelfreie Menge $\mathfrak{U}M$, welche alle Teilmengen von M und nur diese als Elemente enthält.*

Die Menge $\mathfrak{U}M$ ist stets von M verschieden, wenn M zirkelfrei ist, denn M ist Element von $\mathfrak{U}M$, aber nicht Element von M. Bei zirkelhaften Mengen kann aber die Menge aller Teilmengen mit der ursprünglichen Menge identisch sein, wie das Beispiel der Menge aller Mengen im Gesamtsystem Σ zeigt.

Diejenigen Mengen, welche in den Elementen einer zirkelfreien Menge M als Elemente vorkommen, sind in M wesentlich und deshalb nach Satz 9 zirkelfrei. Durch eine entsprechende Überlegung wie bei Satz 17 oder auch durch Anwendung von Satz 13 auf das zirkelfreie System Σ_M findet man:

Satz 18. *Jeder zirkelfreien Menge M entspricht eine ebenfalls zirkel-*

freie Menge $\mathfrak{V}M$ (*die „Vereinigungsmenge“*[17]) *von* M), *welche alle Elemente der Elemente von* M *und nur diese als Elemente enthält.*

§ 17.

Das Auswahlprinzip.

Für zirkelfreie Mengen gilt das Zermelosche Auswahlprinzip in folgender Form:

Satz 19. *Ist* M *eine zirkelfreie Menge, deren Elemente von der Nullmenge verschieden und paarweise elementenfremd sind, so gibt es mindestens eine Menge, welche mit jedem Element von* M *genau ein Element gemein hat und sonst kein Element enthält. Jede solche Menge ist zirkelfrei und Teilmenge von* $\mathfrak{V}M$.

Da nämlich nach Voraussetzung jedes Element von M mindestens ein Element enthält, so kann man auch ohne Widerspruch annehmen, daß in jedem Element A von M irgendein bestimmtes Element a von A fest ausgezeichnet und dem Element A zugeordnet wird[18]). Daß das Element a von den übrigen Elementen von A sicher zu unterscheiden ist, folgt direkt aus Axiom II, denn nicht unterscheidbare Mengen müßten isomorph sein; diese Unterscheidung selbst kann aber als auszeichnendes und zuordnendes Merkmal betrachtet werden. Die Auszeichnungen oder Zuordnungen sind für die verschiedenen Elemente von M vollkommen unabhängig voneinander, gleichgültig, ob die Elemente elementenfremd sind oder nicht, und es kann deshalb bei diesem „Auswählen“ auch kein unerfüllbarer Zirkel entstehen.

Die fest ausgezeichneten Elemente gehören nun sämtlich der nach Satz 18 zirkelfreien Menge $\mathfrak{V}M$ an und bilden deshalb nach Satz 16 eine zirkelfreie Menge. Da ferner nach Voraussetzung keines der ausgezeichneten Elemente noch in einem andern Element von M enthalten sein kann, so besitzt die gefundene Menge die gewünschten Eigenschaften. Auch jede andere Menge, welche mit jedem Element von M genau ein Element gemein hat und sonst kein Element enthält, ist Teilmenge von $\mathfrak{V}M$ und nach Satz 16 zirkelfrei.

Das Auswahlprinzip ist also in der Formulierung von Satz 19 nicht ein unabhängiges Axiom oder eine willkürliche Festsetzung, sondern ein beweisbarer, d. h. mit Hilfe der Logik auf die Axiome zurückführbarer Satz. Das Gegenteil dieses Satzes würde mit Axiom III in Widerspruch

[17]) Die Bezeichnung „Summe“ ($\mathfrak{S}M$) könnte vielleicht für elementenfremde Mengen vorbehalten bleiben (vgl. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin 1918, S. 22 f.).

[18]) Die Zuordnung ist erst für Satz 20 nötig.

stehen. Da das System Σ^* und nach Satz 8 auch das System der zirkelfreien Mengen eindeutig festgelegt ist, so sieht man auch direkt, daß der Satz nur entweder richtig oder falsch sein kann.

Die gegebene Begründung von Satz 19 ist von der hier noch nicht definierten Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Mengen unabhängig. Es bleibt aber noch die Frage, ob sich der Satz etwa wesentlich anders beweisen läßt, oder ob man vielleicht zeigen kann, daß dies nicht möglich ist.

Da das Auswahlaxiom besonderes Interesse gefunden hat, so mögen hier noch folgende, auf seine Stellung im Axiomensystem Zermelos bezügliche Bemerkungen Platz finden:

Wenn man dem Begriff „definit" im Aussonderungsaxiom Zermelos eine bestimmte eingeschränkte Bedeutung beilegt, so ist, wie A. Fraenkel[15] gezeigt hat, das Auswahlaxiom von den übrigen Axiomen insofern unabhängig, als es Mengen geben kann, welche nur mit Hilfe dieses Axioms gefunden werden können.

Es ist jedoch zu beachten, daß dann diese Auswahlmengen, die Teilmengen der zugehörigen Menge $\mathfrak{B}M$ sein müssen, nicht zu den durch eine definite Eigenschaft eindeutig ausgesonderten Teilmengen gehören, und daß infolgedessen auch der Begriff „aller" Teilmengen einer Menge durch die Axiome *nicht eindeutig bestimmt* ist. Auch ein „Beschränktheitsaxiom" (A. Fraenkel[3])) bringt hier keine Eindeutigkeit, da dieses unter Umständen von mehreren an sich möglichen Auswahlmengen nur eine einzige, aber willkürlich zu wählende zulassen würde.

Wenn man jedoch nur diejenigen Mengen als Teilmengen bezeichnet, die sich schon aus dem Aussonderungsaxiom ergeben, und also insbesondere dann, wenn man den Begriff „definit" so weit faßt, daß das Axiom *alle* widerspruchsfreien Teilmengen einer Menge liefert, so kann das Auswahlaxiom nicht zur Bestimmung neuer Mengen dienen, sondern es kann höchstens solche Mengen, die ihm nicht genügen, aus dem betrachteten Bereich $\mathfrak{B}$ ausschließen.

Wenn man also in diesem Falle noch ein „Beschränktheitsaxiom" annimmt, oder nur solche Dinge zuläßt, die durch die Axiome gefordert werden, so ist das Auswahlaxiom entweder überflüssig oder falsch, d. h. entweder eine Folge der andern Axiome oder mit ihnen in Widerspruch.

Diese Bemerkungen dürften in gewissem Sinne das Mißtrauen gegen das Auswahl*axiom* erklären. (Vgl. auch § 18, Schluß.)

Daß es notwendig ist, die Elemente von M in Satz 18 als elementenfremd vorauszusetzen, zeigt das Beispiel der Menge $\{\{a\}\{b\}\{a,b\}\}$ wobei a und b etwa die Null- und Einsmenge bedeuten mögen. Man

kann aber, wie E. Zermelo[19]) gezeigt hat, ein allgemeineres Auswahlprinzip finden, welches auch gilt, wenn diese Forderung nicht erfüllt ist. Es gilt nämlich:

Satz 20. *Ist M eine zirkelfreie Menge, welche die Nullmenge nicht als Element enthält, so gibt es mindestens eine zirkelfreie Menge P, welche in einfacher Weise jedem Element A von M ein bestimmtes Element a von A zuordnet.*

Diesen Satz kann man hier so einsehen: Wie schon oben bemerkt, kann man ohne Widerspruch annehmen, daß jedem Element A von M ein bestimmtes Element a von A zugeordnet ist. Man fasse nun nach Satz 15 jedes Element A von M mit der zugeordneten Menge a zu einer Menge $\{A, a\}$ zusammen. Die entstehenden Mengen sind sämtlich Teilmengen der Menge $\mathfrak{B}\{M, \mathfrak{B}M\}$ und folglich Elemente der zirkelfreien Menge $\mathfrak{U}\mathfrak{B}\{M, \mathfrak{B}M\}$. Zusammengenommen bilden sie nach Satz 16 eine zirkelfreie Teilmenge dieser Menge.

Die gefundene Menge $P = \{\ldots\{A, a\}\ldots\}$ ordnet auch, wie verlangt, jeder Teilmenge A von M eindeutig ein Element a von A zu, denn im System Σ^* ist mit $A\beta a$ nie zugleich $a\beta A$ erfüllt und deshalb eine Verwechslung der Elemente ausgeschlossen.

§ 18.

Weitere Bemerkungen.

Die Sätze 5 und 14 bis 19 entsprechen den Axiomen I bis VI bei Zermelo[2]) und gelten für beliebige zirkelfreie Mengen.

Der dem Axiom der Bestimmtheit entsprechende Satz 5 gilt auch für zirkelhafte Mengen, er reicht aber, wie schon in § 8 bemerkt, nicht stets aus, um die Identität von Mengen sicherzustellen. Dies gilt auch schon im Bereich der zirkelfreien Mengen, wie das Beispiel am Schluß von § 15 zeigt. Wenn man dort die Mengen $M_0, M_1, M_2, \ldots$ durch gewisse Mengen $M_0', M_1', M_2', \ldots$ ersetzt, die den Gleichungen $M_n' = \{n, M_{n+1}'\}$ genügen, so kann man mit Satz 5 an Stelle von Axiom II (§ 5) nicht beweisen, daß $M_0 = M_0'$ ist.

Die widerspruchsfreie Existenz der natürlichen Zahlenreihe läßt sich aus dem Bisherigen ohne wesentliche Schwierigkeit entnehmen[19a]), sie ist jedoch nicht an sich selbstverständlich, da die übliche Definition der natürlichen Zahlen ebenso wie die der transfiniten Ordnungszahlen zirkelhafter Natur ist. Beides soll deshalb erst im zweiten Teil dieser Untersuchungen behandelt werden.

[19]) E. Zermelo [2]), S. 274.

[19a]) Vgl. Anmerkung [21]).

Mit der Existenz einer zirkelfreien Menge, die der natürlichen Zahlenreihe entspricht, wird dann auch das siebente Axiom Zermelos begründet sein. Da somit im Bereich der zirkelfreien Mengen alle Axiome Zermelos erfüllt sind, so folgt daraus die Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems und es gelten für die zirkelfreien Mengen alle daraus gezogenen Folgerungen. Man kann aber mit Hilfe von Satz 12 in einfacher Weise noch zirkelfreie Mengen bilden, die sich aus den Axiomen Zermelos allein nicht ergeben[20]).

Für die zirkelfreien Mengen gilt wegen Satz 16 insbesondere der Satz von Cantor, daß die Menge aller Teilmengen einer Menge größere Mächtigkeit besitzt als die Menge selbst. Hieraus folgt auch, daß die Menge aller zirkelfreien Mengen größere Mächtigkeit besitzt als jede zirkelfreie Menge, denn sie muß nach Satz 16 mit jeder Menge M auch sämtliche Teilmengen von M enthalten. Ob allgemein jede zirkelhafte Menge, deren Elemente zirkelfrei sind, größere Mächtigkeit besitzt als jede zirkelfreie Menge, müßte noch untersucht werden.

Die Menge aller zirkelfreien Mengen ist eine im Sinne von Dedekind[21]) *unendliche* Menge, da sie die Nullmenge und nach Satz 15 mit jeder Menge A auch die Menge $\{A\}$ enthält; sie ist also einer echten Teilmenge von sich selbst äquivalent.

Da nach Satz 10 jede Gesamtheit von zirkelfreien Mengen eine Menge bildet, so muß die Menge aller Mengen im Gesamtsystem Σ, die ja alle diese Mengen enthält, größere Mächtigkeit haben als die Menge aller zirkelfreien Mengen, womit die Existenz von verschiedenen unendlichen Mächtigkeiten in absolutem Sinne nachgewiesen ist.

Für die zirkelhaften Mengen, insbesondere für die Menge aller Mengen im Gesamtsystem Σ, sind die Axiome Zermelos nicht mehr sämtlich erfüllt. Vor allem ist das Aussonderungsaxiom nicht stets erfüllt, denn z. B. die sich nicht selbst enthaltenden Mengen sind Elemente der Menge aller Mengen, ohne doch eine Teilmenge dieser Menge zu bilden.

Daß auch die Axiome der Vereinigung und der Auswahl im System Σ nicht immer erfüllt sind, kann man sich, da vollständige Beweise bei zirkelhaft definierten Mengen schwierig sind, in folgender Weise wenigstens plausibel machen.

Es sei N eine Menge, welche alle sich nicht selbst enthaltenden Mengen, jedoch ohne die Menge N, und sonst keine Menge enthält. In dieser Menge ist ein Widerspruch nicht ersichtlich und es ist deshalb zu vermuten, daß sie existiert. Man bilde nun die Menge $\{N, \{N\}\}$, in der

[20]) Vgl. A. Fraenkel [3]), S. 230 f.; Th. Skolem [4]), S. 225.

[21]) R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? (4. Aufl., Braunschweig 1918).

ebenfalls kein Widerspruch zu erkennen ist. Die Vereinigungsmenge läßt sich aber für diese Menge nicht bilden, denn sie müßte alle sich nicht selbst enthaltenden Mengen und nur diese enthalten.

Man betrachte weiter die Menge, welche alle und nur diejenigen Mengen enthält, die als einziges Element eine sich nicht selbst enthaltende Menge enthalten. Für diese anscheinend widerspruchsfreie Menge ist das Auswahlaxiom nicht erfüllt. Die Auswahl selbst ist zwar in eindeutiger Weise möglich, da jedes Element der Menge genau ein Element enthält, aber die ausgewählten Elemente lassen sich nicht zu einer Menge vereinigen.

Wenn man das Produkt einer Menge von Mengen als die Menge aller Auswahlmengen definiert, so verschwindet hier das Produkt (d. h. es ist die Nullmenge), ohne daß ein Faktor verschwindet.

Dasselbe Beispiel zeigt außerdem, daß man nicht stets eine Menge zu erhalten braucht, wenn man die Elemente einer gegebenen Menge durch andere Elemente ersetzt. Wenn man nämlich in der soeben betrachteten Menge jedes Element durch die eine Menge ersetzt, die in ihm enthalten ist, so erhält man wieder eine Gesamtheit von Mengen, die keine Menge bildet.

Im zweiten Teil werden sich ähnliche Beispiele für das System Σ^* bilden lassen.

(Eingegangen am 28. November 1925.)

Zusatz. Zur Vermeidung von scheinbaren Einwänden werde noch bemerkt:

Wenn in einem System von Dingen eine Beziehung vermöge einer *andern* im selben System als gegeben vorausgesetzten Beziehung definiert wird, so heiße sie eine *abgeleitete* Beziehung, im Gegensatz zu der zuerst gegebenen *ursprünglichen* Beziehung. Die Beziehung β ist stets als eine *ursprüngliche* Beziehung anzunehmen.

(Eingegangen am 30. August 1926.)

The identities of affinely connected manifolds.

By

Tracy Yerkes Thomas[1]) in Zürich.

§ 1.

Introduction.

In the treatment of the invariant theory of affinely connected manifolds the complete set of invariants involving the curvature tensor and its covariant derivatives has had a leading role. But there exists other complete sets of tensor invariants of affinely connected manifolds which appear to offer certain analytical advantages over the set involving the curvature tensor and its covariant derivatives. For the general manifold the preferred set of invariants appears to be a set of tensors originally introduced by O. Veblen[2]); for the special case of the Riemann geometry the preference seems to fall to another complete set of invariants which I have recently used in treating the Einstein gravitational equations[3]). The former of these complete sets of invariants is directly related to the affine connection of the manifold, the latter to the metric of the Riemann space; and, as each of these sets of invariants has its definition in terms of normal coordinates it seems natural to refer to the one by the name of *affine normal tensors*, to the other by the name of *metric normal tensors*. The exceptional character of these two sets of invariants is evidently due to their significance as coefficients of power series.

I shall here consider the identities satisfied by the affine and metric normal tensors. In this connection I have introduced the idea of a *complete set of identities* of an invariant of the manifold. By this I mean

[1]) National Research Fellow in Mathematical Physics U. S. A.

[2]) Proc. Nat. Acad. Sc. 8 (1922), p. 192.

[3]) Phil. Mag. 48 (1924), p. 1056.

a set of algebraically independent identities furnishing all the algebraic conditions on the invariant so that every identity satisfied by the invariant can be deduced from the identities of the complete set by algebraic processes. While the sets of identities satisfied by the affine normal tensors have already been given it has not been shown until now that these form complete sets. However the complete set of identities of the metric normal tensors is here presented for the first time. In addition I have thought it interesting to give the completeness proof for the identities satisfied by the curvature tensor $B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}$ in the general manifold, and for the covariant form of the curvature tensor $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ in the Riemann geometry.

I am indebted to Prof. H. Weyl for the suggestion that my treatment of the metric case be based on certain results of Riemann as given by him in his commentary on Riemann's „Habilitationsvortrag". This has resulted in considerable simplification over my original method.

§ 2.

Affine Normal Tensors[4]).

In the general manifold of affine connection $\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}$ which we shall refer to a set of coordinates (x) there exists a set of normal coordinates (y) tangent to the coordinates (x) at an arbitrary point $x = q$ of the manifold, which is uniquely determined by the (x) coordinates and the point (q) in accordance with the equations:

$$x^{\iota} = q^{\iota} + y^{\iota} - \frac{1}{2!}\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}(q)y^{\alpha}y^{\beta} - \frac{1}{3!}\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}(q)y^{\alpha}y^{\beta}y^{\gamma} - \frac{1}{4!}\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta}(q)y^{\alpha}y^{\beta}y^{\gamma}y^{\delta} - \ldots, \tag{1}$$

where

$$\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3}P\left[\frac{\partial\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - 2\Gamma^{\iota}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}\right] \tag{2}$$

and, in general

$$\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\ldots\delta\tau} = \frac{1}{N}P\left[\frac{\partial\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\ldots\delta}}{\partial x^{\tau}} - (N-1)\Gamma^{\iota}_{\nu\beta\gamma\ldots\delta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\tau}\right]. \tag{3}$$

Here N denotes the number of subscripts, and the symbol P denotes the sum of the terms obtainable from the ones inside the bracket by permutating the lower indices cyclically. The functions $\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\ldots\delta\tau}$ are unchanged by any permutation of the subscripts.

---

[4]) Cf. Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 551.

Let us denote the affine connection in the normal coordinate system (y) by $C^i_{\alpha\beta}$. The functions $C^i_{\alpha\beta}$ possess the property that they vanish at the origin of normal coordinates. Hence the power series for $C^i_{\alpha\beta}$ has the form

$$C^i_{\alpha\beta} = A^i_{\alpha\beta\gamma} y^\gamma + \frac{1}{2!} A^i_{\alpha\beta\gamma\delta} y^\gamma y^\delta + \frac{1}{3!} A^i_{\alpha\beta\gamma\delta\tau} y^\gamma y^\delta y^\tau + \cdots \tag{4}$$

in which the A's are the derivatives of C evaluated at the origin of the normal coordinate system. The sets of functions A regarded as functions of the coordinates (x) constitute tensors which are contravariant in the upper index and covariant in the lower ones. These tensors are the affine normal tensors. Any one of the affine normal tensors can be expressed in terms of the functions $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ and their derivatives. Thus the affine normal tensor $A^i_{\alpha\beta\gamma}$ is given by the formula

$$A^i_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \Gamma^i_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma^i_{\nu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\gamma} - \Gamma^i_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\beta\gamma} \tag{5}$$

in terms of the Γ's and their first derivatives.

§ 3.

Affine Identities.

We see from the series (4) that the affine normal tensor $A^i_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}$ is symmetric in its first two subscripts and also in its remaining ones. Hence

$$A^i_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau} = A^i_{\beta\alpha\gamma\delta\ldots\tau}; \qquad A^i_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau} = A^i_{\alpha\beta\mu\nu\ldots\sigma} \tag{6}$$

where $(\mu\nu\ldots\sigma)$ represents any permutation of $(\gamma\delta\ldots\tau)$. It may be shown that the affine connection $C^i_{\alpha\beta}$ in the system of normal coordinates (y) satisfies the equations

$$C^i_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = 0. \tag{7}$$

Hence if we multiply both members of (4) by $y^\alpha y^\beta$ and sum we see that any affine normal tensor $A^i_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}$ must satisfy a set of identities of the form

$$S(A^i_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}) = 0 \tag{8}$$

where S denotes the sum of the terms obtainable from the one in the parenthesis which are not identical because of its symmetry identities.

We shall show that the sets of identities (6) and (8) constitute a complete set of identities for the affine normal tensor $A^i_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}$.

§ 4.

Completeness Proof for Affine Identities.

Consider a sequence of sets of numbers

$$A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma};\ A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta};\ A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta\tau};\ \ldots \tag{9}$$

which are chosen so as to satisfy the algebraic conditions (6) and (8) and also so that the series (4) converges. Otherwise the sets of numbers A may be quite arbitrary. The functions $C^{\iota}_{\alpha\beta}$ defined by (4) will then constitute an affine connection $C^{\iota}_{\alpha\beta}$ in a system of normal coordinates (y) for the functions C satisfy the equations (7) which characterize the y's as a set of normal coordinates. This is all that is essential for the completeness proof of the affine identities (6) and (8). However it may be desirable to give the argument in more detail which I shall do in the following manner.

Let us associate the sequence (9) of sets of numbers A with a point $x = q$ of a point manifold. It is then possible to introduce an affine connection $\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}(x)$ into the manifold such that the normal tensors $A(x)$ which arise take on the given values A at the point $x = q$. In fact such a set of functions $\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}$ is easily seen to be given by the series [5])

$$\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta} = A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}(x^{\gamma} - q^{\gamma}) + \frac{1}{2!} A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x^{\gamma} - q^{\gamma})(x^{\delta} - q^{\delta}) + \ldots . \tag{10}$$

For the affine connection $\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}$ given by (10) is such that all the coefficients $\Gamma(q)$ of the series (1) vanish and hence the equations of transformation to a system of normal coordinates (y) become

$$x^{\iota} = q^{\iota} + y^{\iota}. \tag{11}$$

Under the transformation (11) the affine connection $\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}$ becomes $C^{\iota}_{\alpha\beta}$ as given by the series (4) in which the coefficients are the given sets of numbers A.

Now consider a manifold $\mathfrak{M}$ of affine connection $\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}$ referred to a set of coordinates (x) and let

$$I(A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}) = 0 \tag{12}$$

represent any set of identities of the affine normal tensor $A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}$ of the manifold. Also consider a corresponding point manifold $\overline{\mathfrak{M}}$ which we may

---

[5]) The sequence (9) of affine normal tensors A determines the affine connection $\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}$ to within a transformation of coordinates such that the coordinates connected by the transformation are tangent to one another at the point $x = q$ of the manifold.

refer to a set of coordinates $(\bar{x})$. We may then introduce into the manifold $\overline{\mathfrak{M}}$ an affine connection $\bar{\Gamma}^{\iota}_{\alpha\beta}(\bar{x})$ such that the components of the affine normal tensor $\bar{A}^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}(\bar{x})$ at the point $\bar{x}=q$ are subject only to the algebraic conditions (6) and (8). But the affine normal tensor $\bar{A}^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}(\bar{x})$ of the manifold $\overline{\mathfrak{M}}$ must likewise satisfy the set of identities (12), i. e.,

$$I(\bar{A}^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau})=0 \tag{13}$$

and in particular must satisfy this set of identities at the point $\bar{x}=q$. Hence the set of identities (12) can be satisfied by a set of functions $A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}$ which are subject only to the algebraic conditions (6) and (8)[6]. This gives the following theorem.

The identities (6) *and* (8) *constitute a complete set of identities for the affine normal tensor* $A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau}$.

Hence the sets of identities (6) and (8) constitute all the algebraically independent sets of identities of the affine normal tensors A which exist in the manifold.

§ 5.

Metric Normal Tensors.

When the affine connection $\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta}$ is such that there exists a symmetric covariant tensor $g_{\alpha\beta}$, i. e.,

$$g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha} \tag{14}$$

whose covariant derivative vanishes identically, i. e.,

$$g_{\alpha\beta,\,\gamma}=0 \tag{15}$$

then the affinely connected manifold reduces to a Riemann space whose metric is given by the form[7])

$$ds^2=g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}. \tag{16}$$

It is assumed that the determinant $|g_{\alpha\beta}|$ does not vanish identically. Written in full the equations (15) are

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}=g_{\nu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma}+g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}. \tag{17}$$

---

[6]) The requirement that the selection of normal tensors A be such that the series (4) converges does not constitute a definite algebraic restriction.

[7]) For algebraic necessary and sufficient conditions for the existence of the tensor $g_{\alpha\beta}$ see pp. 590—591 of the paper cited in note 4.

Let us denote the metric tensor $g_{\alpha\beta}$ by $H_{\alpha\beta}$ when expressed in the system of normal coordinates (y) with origin at an arbitrary point $x = q$ of the manifold. Then at the origin of the normal coordinate system $H_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(q)$ as is seen from the equations of transformation (1). Also the first derivatives of $H_{\alpha\beta}$ at the origin of the normal coordinate system are identically zero by (17) since the C's vanish at the origin of normal coordinates. Hence

$$(18) \qquad H_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2!} g_{\alpha\beta,\gamma\delta} y^\gamma y^\delta + \frac{1}{3!} g_{\alpha\beta,\gamma\delta\tau} y^\gamma y^\delta y^\tau + \cdots$$

where $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(q)$ and the other g's denote the derivatives of $H_{\alpha\beta}$ evaluated at the origin of the normal coordinate system. These latter functions g considered as functions of the coordinates (x) are covariant tensors, they are in fact the extensions of the metric tensor $g_{\alpha\beta}$ of the Riemann geometry[8]). The first extension $g_{\alpha\beta,\gamma}$ which is missing in the above series is identical with the covariant derivative $g_{\alpha\beta,\gamma}$ of the metric tensor $g_{\alpha\beta}$ and hence vanishes by (15). The second extension $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ is given by the formula

$$(19) \quad g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\gamma\delta} - \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\gamma} \Gamma^\nu_{\alpha\delta} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\gamma} \Gamma^\nu_{\beta\delta} - \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\delta} \Gamma^\nu_{\alpha\gamma} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\delta} \Gamma^\nu_{\beta\gamma}$$
$$- g_{\nu\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\gamma\delta} - g_{\alpha\nu} \Gamma^\nu_{\beta\gamma\delta} + g_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} \Gamma^\nu_{\beta\delta} + g_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\delta} \Gamma^\nu_{\beta\gamma}.$$

In general there is a formula for the $E(\geqq 2)$th extension $g_{\alpha\beta,\gamma\delta\ldots\tau}$ in terms of the functions $g_{\alpha\beta}$ and their derivatives up to the Eth order. The metric tensor $g_{\alpha\beta}$ and its extensions $g_{\alpha\beta,\gamma\delta\ldots\tau}$ $(E \geqq 2)$ are the metric normal tensors referred to in the introduction.

§ 6.

Metric Identities.

The metric tensor $g_{\alpha\beta}$ satisfies the identities (14). Hence the metric normal tensors $g_{\alpha\beta,\gamma\delta\ldots\tau}$ $(E \geqq 2)$ are symmetric in their first two indices and also in the remaining ones as is immediately evident from the series (18), i. e.,

$$(20) \qquad g_{\alpha\beta,\gamma\delta\ldots\tau} = g_{\beta\alpha,\gamma\delta\ldots\tau}; \; g_{\alpha\beta,\gamma\delta\ldots\tau} = g_{\alpha\beta,\mu\nu\ldots\sigma}$$

where $(\mu\nu\ldots\sigma)$ represents any permutation of $(\gamma\delta\ldots\tau)$.

---

[8]) Phil. Mag. 48 (1924), p. 1056.

The remaining identities in the complete set of identities of the metric normal tensors may be derived most easily if we make use of the equations of Riemann[9])

$$\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\, y^\beta y^\gamma = 0. \tag{21}$$

From (21) it may easily be shown that

$$\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\, y^\alpha y^\beta = 0. \tag{22}$$

The equations (21) and (22) yield the equations (7) in which the C's are Christoffel symbols based on the functions $H_{\alpha\beta}$. Hence the equations (21) characterize the variables (y) as a set of normal coordinates for the case of the Riemann geometry. Expanding $\partial H_{\alpha\beta}/\partial y^\gamma$ about the origin of normal coordinates we have

$$\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma\delta}\, y^\delta + \frac{1}{2!}\, g_{\alpha\beta,\gamma\delta\tau}\, y^\delta y^\tau + \cdots . \tag{23}$$

Hence the metric normal tensor $g_{\alpha\beta,\gamma\delta\ldots\tau}$ $(E \geqq 2)$ satisfies a set of identities of the form

$$P^*(g_{\alpha\beta,\gamma\delta\ldots\tau}) = 0 \tag{24}$$

where P^* denotes the sum of all the terms which can be obtained from the one in parenthesis by cyclic permutation of the indices $(\beta\gamma\delta\ldots\tau)$, as follows from (21) and (23).[10])

§ 7.

Completeness Proof for Metric Identities.

To prove that the identities (14), (20), and (24) constitute a complete set of identities for the metric normal tensors we consider a sequence of sets of numbers

$$g_{\alpha\beta};\ g_{\alpha\beta,\gamma\delta};\ g_{\alpha\beta,\gamma\delta\tau};\ \cdots \tag{25}$$

chosen so as to satisfy the algebraic conditions (14), (20), and (24) and also so that the series (18) converges[11]). Then the functions $H_{\alpha\beta}$ defined

---

[9]) See Weyl's commentary to B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Berlin: Julius Springer (1923), pp. 28–31. It is to be noted, however, that we need not assume the form $g_{\alpha\beta}$ to be definite as in Weyl's commentary.

[10]) We may also note that from (22) and (23) we have the identities $S^*(g_{\alpha\beta,\gamma\delta\ldots\sigma\tau}) = 0$ where S^* has the significance of the previous symbol S except that it operates only on subscripts having the position $(\alpha\beta, \gamma\delta\ldots\sigma)$.

[11]) The metric tensor $g_{\alpha\beta}(x)$ is determined by the sequence (25) of metric normal tensors g to within a transformation of coordinates of the type stated in note 5.

by the series (18) in which the coefficients g have the values of the sequence (25) satisfy the equations (21) which characterize the varibles (y) as a set of normal coordinates. Hence

The identities (14) *constitute a complete set of identities for the metric tensor* $g_{\alpha\beta}$; *in general, the sets of identities* (20) *and* (24) *constitute a complete set of identities for the metric normal tensor* $g_{\alpha\beta,\gamma\delta\ldots\tau}$ $(E \geqq 2)$.

The sets of identities (14), (20), and (24) therefore constitute all the algebraically independent sets of identities of the metric normal tensors g which exist in the Riemann geometry.

§ 8.

Remark on the Curvature Tensor.

The curvature tensor $B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}$ of the affinely connected manifold is defined by the equations

$$B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma} = A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma} - A^{\iota}_{\alpha\gamma\beta}. \tag{26}$$

For the particular case of the Riemann geometry $B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}$ admits a covariant form $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ defined by

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\nu}B^{\nu}_{\beta\gamma\delta}. \tag{27}$$

We shall determine the complete set of identities for the curvature tensor $B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}$ in the general manifold and for the curvature tensor $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ in the Riemann geometry. Let us first observe that the equations

$$A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma} = A^{\iota}_{\beta\alpha\gamma}; \quad A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma} + A^{\iota}_{\beta\gamma\alpha} + A^{\iota}_{\gamma\alpha\beta} = 0 \tag{28}$$

constitute a complete set of identities for the affine normal tensor $A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}$. This follows from the theorem of § 4. From (26) and (28) we now have

$$3A^{\iota}_{\alpha\beta\gamma} = B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma} + B^{\iota}_{\beta\alpha\gamma}, \tag{29}$$

$$B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma} = -B^{\iota}_{\alpha\gamma\beta}; \quad B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma} + B^{\iota}_{\beta\gamma\alpha} + B^{\iota}_{\gamma\alpha\beta} = 0. \tag{30}$$

Conversely the equations (29) and (30) yield the equations (26) and (28). Hence we see that any set of identities of the curvature tensor $B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}$ can be satisfied by a set of numbers $B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}$ which are subject only to the algebraic conditions (30). This gives the following theorem.

The identities (30) *constitute a complete set of identities for the curvature tensor* $B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}$ *in the affinely connected manifold.*

The theorem of § 7 shows that the set of identities

$$g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = g_{\beta\alpha,\gamma\delta}; \quad g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = g_{\alpha\beta,\delta\gamma}; \quad g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma,\delta\beta} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} = 0 \tag{31}$$

constitutes a complete set of identities of the metric normal tensor $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$. We may easily deduce the relations

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\gamma,\alpha\delta}. \tag{32}$$

It then follows from (32) and the above identities (31) that

$$3\,g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = B_{\alpha\gamma\beta\delta} + B_{\beta\gamma\alpha\delta}, \tag{33}$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = -B_{\beta\alpha\gamma\delta};\quad B_{\alpha\beta\gamma\delta} = -B_{\alpha\beta\delta\gamma};\quad B_{\alpha\beta\gamma\delta} + B_{\alpha\gamma\delta\beta} + B_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0. \tag{34}$$

Conversely we may obtain the equations (31) and (32) from the equations (33) and (34). Hence we have the following theorem.

The identities (34) *constitute a complete set of identities for the curvature tensor* $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *in the Riemann geometry.*

Thus any set of identities of the curvature tensor $B^{\iota}_{\alpha\beta\gamma}$ in the general manifold, or of the curvature tensor $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ in the Riemann geometry can be deduced by algebraic processes from the complete set of identities (30), or from the complete set of identities (34) respectively.

(Eingegangen am 3. Mai 1925.)

A projective theory of affinely connected manifolds.

Von

Tracy Yerkes Thomas[1]) in Zürich.

§ 1.

Introduction.

The discovery of a projective geometry of affinely connected manifolds was made in 1921 by Prof. H. Weyl[2]). Since then, Cartan[3]) has presented a new viewpoint of a connected manifold in which he associates *with each point* of the given manifold, quite another manifold with a definite group of tranformations- in the case which we are considering, the projective group. Later, Schouten[4]) has attempted to give the theory of Cartan in the symbolism of the Ricci calculus. But the developments based on Cartan's idea of a connected manifold do not appear to me to be very satisfactory from an analytical standpoint.

In this paper I shall show how it is possible to reduce the projective theory of the given n-dimensional manifold $\mathfrak{M}$ to the affine theory of a *single* associated manifold ${}^*\mathfrak{M}$ involving one additional dimension. Thus the ordinary methods of the Ricci calculus may be applied immediately to the treatment of the projective geometry. The manifold ${}^*\mathfrak{M}$ is subject to a particular group of transformations ${}^*\mathfrak{G}$ but this causes no difficulty. Connected with the transformation group ${}^*\mathfrak{G}$ is the idea of the projective tensor and its extensions. I desire to call particular attention to the set of normal tensors ${}^*A$ which form a complete set of projective invariants, and which characterize the manifold $\mathfrak{M}$ as a projective

[1]) National Research Fellow in Mathematical Physics, U. S. A.

[2]) Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven etc. Auffassung, Göttinger Nachrichten (1921), pp. 99—112.

[3]) Sur les variétés à connexion projective, Bull. Soc. Math. de France 52 (1924) pp. 205—241.

[4]) Proc. Kon. Akad. v. Wetenschappen Amsterdam 27 (1924), pp. 407—424.

manifold. This shows that my theory contains all that is necessary for the complete development of the projective geometry.

On account of the analytical analogy between the projective and conformal geometries of the affinely connected manifold, we must expect a theory of the conformal geometry corresponding to the present theory of the projective geometry. I intend to consider this problem in a later publication.

§ 2.

The associated transformation group.

The group of transformations at the basis of the general theory of affinely connected manifolds is the group $\mathfrak{G}$ of all analytic transformations whose functional determinants do not vanish identically. Let us denote any transformation of the group $\mathfrak{G}$ by

$$x^i = f^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n). \tag{1}$$

Then the jacobian of (1), namely

$$\Delta = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| \tag{2}$$

does not vanish identically, and the transformation inverse to (1) is possible.

From the transformations of the group $\mathfrak{G}$ we may form a group of transformations ${}^*\mathfrak{G}$ in a set of variables $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ which form the coordinates of the associated manifold ${}^*\mathfrak{M}$. These transformations are of the form

$$\begin{cases} x^0 = \bar{x}^0 + \log \Delta, \\ x^i = f^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n). \end{cases} \tag{3}$$

In the following paragraph we shall see how the projective theory may be reduced to an affine theory under the transformations of the group ${}^*\mathfrak{G}$. We observe that the conditions

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^0} = \delta^i_0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{4}$$

and

$$\frac{\partial x^0}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^\alpha} \qquad (\alpha = 0) \tag{5}$$

are satisfied.

With the idea of the associated transformation group ${}^*\mathfrak{G}$ comes the idea of the projective tensor which forms the basis of my theory of the projective geometry. A projective tensor ${}^*T$ is a tensor subject to the group of transformations ${}^*\mathfrak{G}$, but whose components depend on the coor-

dinates $(x^1, \ldots, x^n)$ alone. Thus the projective tensor ${}^*T_{\alpha\beta}$ has the transformation

$$(6) \qquad {}^*\bar{T}_{\alpha\beta} = {}^*T_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta}$$

where all indices have values $(0, 1, 2, \ldots, n)$. An ordinary covariant tensor T is easily seen to be a projective covariant tensor ${}^*T$ whose components involving the index (0) vanish. However this is not true for tensors T which involve contravariant indices.

§ 3.

The associated manifold.

In a recent article[5]), I have defined a projective conection $\Pi^i_{\alpha\beta}$ for the affinely connected manifold $\mathfrak{M}$. This connection is given by

$$(7) \qquad \Pi^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\alpha\beta} - \frac{\delta^i_\alpha}{n+1} \Gamma^\sigma_{\sigma\beta} - \frac{\delta^i_\beta}{n+1} \Gamma^\sigma_{\sigma\alpha}$$

in terms of the affine connection $\Gamma^i_{\alpha\beta}$. The connection $\Pi^i_{\alpha\beta}$ transforms according to the equations

$$(8) \qquad \bar{\Pi}^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} + \Pi^\sigma_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \right) - \frac{\delta^i_\alpha}{n+1} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \bar{x}^\beta} - \frac{\delta^i_\beta}{n+1} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \bar{x}^\alpha}$$

under the arbitrary transformation (1). Now from a purely analytical standpoint the projective theory of the manifold $\mathfrak{M}$ is merely the invariant theory of the equations (8). It turns out, however, that it is possible to reduce these equations to the ordinary form of the equations of transformation of the affine connection $\Gamma^i_{\alpha\beta}$, which permits the general methods already available for the development of the affine geometry, to be applied immediately to the projective case. This reduction is made in the following manner.

Let us define a set of functions ${}^*\Gamma^i_{\alpha\beta}$ by means of the equations[6])

---

[5]) On the projective and equi-projective geometries of paths, Proc. Nat. Acad. Sc. **11** (1925), pp. 199–203. A projective connection has also been given by Cartan which turns out to be the same as the projective connection $\Pi^i_{\alpha\beta}$, but this has not been expressed by him as an explicit function of an arbitrary affine connection $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ as given by (7). However the projective connection is without particular significance in the development of Cartan's theory, whereas in my theory it plays a fundamental role. See, Schouten, loc. cit. (note 4), p. 423.

[6]) The projective theory of Cartan leads to a set of functions which correspond closely to the functions ${}^*\Gamma^i_{\alpha\beta}$ defined by (9), but which differ from the latter by the fact that all indices do not take on the full set of values $(0, 1, 2, \ldots, n)$. Such relations, however, between two theories treating the same general problem are to be expected. See, Schouten, loc. cit. (note 4), p. 423.

$$(9)\qquad \begin{cases} {}^*\Gamma^i_{\alpha\beta} = {}^*\Gamma^i_{\beta\alpha} = \Pi^i_{\alpha\beta} & (i, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n), \\ {}^*\Gamma^i_{\alpha 0} = {}^*\Gamma^i_{0\alpha} = -\dfrac{\delta^i_\alpha}{n+1} & (i, \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ {}^*\Gamma^0_{\alpha\beta} = {}^*\Gamma^0_{\beta\alpha} = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) \mathfrak{B}^\sigma_{\alpha\beta\sigma} & (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Here $\mathfrak{B}^i_{\alpha\beta\gamma}$ denotes the equi-projective curvature tensor[5]). It is formed from the projective connection $\Pi^i_{\alpha\beta}$ in the same way that the ordinary curvature tensor $B^i_{\alpha\beta\gamma}$ is formed from the affine connection $\Gamma^i_{\alpha\beta}$. Owing to cancellations we have

$$(10)\qquad \mathfrak{B}^\sigma_{\alpha\beta\sigma} = \frac{\partial \Pi^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} - \Pi^\mu_{\nu\alpha}\,\Pi^\nu_{\mu\beta}.$$

The functions ${}^*\Gamma$ constitute the affine connection of the manifold ${}^*\mathfrak{M}$. In other words the ${}^*\Gamma$'s transform according to the equations

$$(11)\qquad {}^*\bar{\Gamma}^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} + {}^*\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta}\right)$$

under the group ${}^*\mathfrak{G}$. The functions ${}^*\bar{\Gamma}$ are defined in terms of $\bar{\Pi}$ by equations of the form (9). In case the indices i, α, β in the equations (11) have values $(1, 2, \ldots, n)$, these equations are identical with the equations of transformation of the projective connection $\Pi^i_{\alpha\beta}$, given by (8). In case α or β has the value (0) the equations (11) immediately reduce to an identity. The remaining case ($i = 0$; $\alpha, \beta \neq 0$) gives the equations of transformation of the contracted equi-projective curvature tensor $\mathfrak{B}^\sigma_{\alpha\beta\sigma}$.

Thus we have reduced the general projective theory of the manifold $\mathfrak{M}$ to the affine theory of the associated manifold ${}^*\mathfrak{M}$, subject to the group of transformations ${}^*\mathfrak{G}$. But we shall see that the particular form of the group ${}^*\mathfrak{G}$ causes no difficulty in case this form must be taken into account (see § 8).

§ 4.

Projective normal coordinates.

Affine normal coordinates $(y^0, y^1, \ldots, y^n)$ for the associated manifold ${}^*\mathfrak{M}$ are uniquely determined by the coordinates $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ and a point $(q^0, q^1, \ldots, q^n)$ so as to satisfy a set of initial conditions[7])

$$(12)\qquad y^i = 0; \quad \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} = \delta^i_\alpha \quad \text{when } x^i = q^i.$$

---

[7]) O. Veblen, Normal coordinates for the geometry of paths, Proc. Nat. Acad. Sc. 8 (1922), pp. 192–197.

These affine normal coordinates (y) of the associated manifold ${}^*\mathfrak{M}$ are the projective normal coordinates of the original manifold $\mathfrak{M}$.[8]) They are related to the $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ by means of the equations

$$(13) \qquad x^i = q^i + y^i - \frac{1}{2!}\,{}^*\Gamma^i_{\alpha\beta}(q)\,y^\alpha y^\beta - \frac{1}{3!}\,{}^*\Gamma^i_{\alpha\beta\gamma}(q)\,y^\alpha y^\beta y^\gamma - \ldots$$

where[9])

$$(14) \qquad {}^*\Gamma^i_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3}P\left[\frac{\partial^*\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - 2\,{}^*\Gamma^i_{\alpha\beta}\,{}^*\Gamma^\sigma_{\gamma\sigma}\right]$$

and in general

$$(15) \qquad {}^*\Gamma^i_{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\nu} = \frac{1}{N}P\left[\frac{\partial^*\Gamma^i_{\alpha\beta\gamma\ldots\mu}}{\partial x^\nu} - (N-1)\,{}^*\Gamma^i_{\sigma\beta\gamma\ldots\mu}\,{}^*\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}\right].$$

Under the group ${}^*\mathfrak{G}$ the normal coordinates (y) suffer a linear homogeneous transformation of the form

$$(16) \qquad y^i = a^i_\alpha \bar{y}^\alpha$$

such that

$$(17) \qquad \begin{cases} a^i_\alpha = \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}\right)_q & (i, \alpha = 1, 2, \ldots, n), \\ a^i_0 = \delta^i_0 & (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ a^0_\alpha = \left(\dfrac{\partial \log \Delta}{\partial \bar{x}^\alpha}\right)_q & (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

It is easily seen that the equations of transformation to normal coordinates (y) do not belong to the group ${}^*\mathfrak{G}$. This, however, causes no difficulty since the usual processes of transformation of quantities may always be carried out in passing into the (y) coordinate system. Thus the tensor ${}^*T_{\alpha\beta}$ becomes ${}^*t_{\alpha\beta}$ in normal (y) coordinates according to the equations

$$(18) \qquad {}^*t_{\alpha\beta} = {}^*T_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}$$

in which indices have values $(0, 1, 2, \ldots, n)$. Similarly the equations

$$(19) \qquad {}^*C^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + {}^*\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\right)$$

define the connection ${}^*C^i_{\alpha\beta}$ in the (y) coordinate system.

---

[8]) My projective normal coordinates (y) are not the same as those of O. Veblen and J. M. Thomas although they undergo the same tranformation as the homogeneous form of their coordinates. See, Proc. Nat. Acad. Sc. **11** (1925), pp. 204–207.

[9]) As usual, I use the symbol $P(\ )$ to denote the sum of the terms obtainable from the ones inside the paranthesis by cyclic permutation of the subscripts.

§ 5.

The theory of projective extension.

It is evident that the process of extension involving the use of normal coordinates as given in my thesis[10]) may likewise be applied here. Thus if ${}^*T$ denotes any projective tensor which becomes ${}^*t$ when transformed into the (y) coordinate system, then

$$\left(\frac{\partial^r {}^*t}{\partial y^\mu \dots \partial y^\nu}\right)_0 \tag{20}$$

evaluated at the origin of the (y) coordinates, defines a set of functions of coordinates $(x', \dots, x^n)$ which have the transformation of a projective tensor. These are the projective extensions of the tensor ${}^*T$. The first extension of a projective tensor ${}^*T$ is identical in form with the ordinary covariant derivative. Thus the projective covariant derivative ${}^*T_{\alpha\beta,\gamma}$ is given by

$${}^*T_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial {}^*T_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - {}^*T_{\sigma\beta}\,{}^*\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - {}^*T_{\alpha\sigma}\,{}^*\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}. \tag{21}$$

The formula for any extension of a projective tensor ${}^*T$ may naturely be calculated.

§ 6.

Projective normal tensors.

The series expansion of the connection ${}^*C^i_{\alpha\beta}$ about the origin of the (y) coordinate system in of the form

$${}^*C^i_{\alpha\beta} = A^i_{\alpha\beta\gamma}\,y^\gamma + \frac{1}{2!}A^i_{\alpha\beta\gamma\delta}\,y^\gamma y^\delta + \dots \tag{22}$$

where the ${}^*A$'s are the derivatives of the functions ${}^*C^i_{\alpha\beta}$ evaluated at the origin of the (y) coordinates, i. e.

$${}^*A^i_{\alpha\beta\gamma\dots\tau} = \left(\frac{\partial^r {}^*C^i_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma \dots \partial y^\tau}\right)_0. \tag{23}$$

Owing to the linear relation (16) we easily see that the functions ${}^*A$ considered as functions of the (x) coordinates, are projective tensors. These are the projective normal tensors.

The projective normal tensor ${}^*A^i_{\alpha\beta\gamma}$ is given by the formula

$${}^*A^i_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial {}^*\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - {}^*\Gamma^i_{\alpha\beta\gamma} - {}^*\Gamma^i_{\sigma\beta}\,{}^*\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - {}^*\Gamma^i_{\alpha\sigma}\,{}^*\Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \tag{24}$$

[10]) O. Veblen and T. Y. Thomas, The geometry of paths, Trans. Am. Math. Soc. 25 (1923), pp. 551–608.

which is obtained by differentiation of the equations (19) and evaluation at the origin of the (y) coordinates. By repeated differentiation of the equations (19) the formula for any projective normal tensor ${}^*A$ may be calculated.

§ 7.

The replacement theorem.

Consider any projective invariant

$$(25) \qquad {}^*P\left({}^*\Gamma^i_{\alpha\beta};\ \frac{\partial {}^*\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma};\ \ldots;\ \frac{\partial^r {}^*\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \ldots \partial x^\tau}\right)$$

which must necessarily be given as a condition of integrability of the equations (11). If we imagine ${}^*P$ expressed in a sort of general form as though obtained as an integrability condition of the equations (11) in which ${}^*\Gamma^i_{\alpha\beta}$ is an arbitrary affine connection, then ${}^*P$ remains invariant in form when transformed into the (y) coordinates. Hence the process of transforming ${}^*P$ into the (y) coordinate system and evaluating at the origin of the (y) coordinates shows that ${}^*P$ may be given the form

$$(26) \qquad {}^*P(0;\ {}^*A^i_{\alpha\beta\gamma};\ldots;\ {}^*A^i_{\alpha\beta\gamma\ldots\tau}).$$

This gives the following replacement theorem (reduction theorem).

Any projective invariant expressed in its general form as represented by (25) *can be put into the form* (26) *by replacing the* ${}^*\Gamma$*'s by zero and their derivatives by the components of the corresponding projective normal tensor* ${}^*A$.

In the sense of this theorem we may say that the projective normal tensors ${}^*A$ constitute a complete set of projective invariants of the manifold $\mathfrak{M}$.

§ 8.

Characterization of the manifold by its invariants.

A necessary and sufficient condition for the projective equivalence of two affinely connected manifolds $\mathfrak{M}$ and $\overline{\mathfrak{M}}$ is the affine equivalence of their associated manifolds ${}^*\mathfrak{M}$ and ${}^*\overline{\mathfrak{M}}$ under the group ${}^*\mathfrak{G}$. Let us assume that the sequence of sets of equations

$$(27) \qquad {}^*A^\sigma_{\alpha\beta\gamma\ldots\tau}\, u^i_\sigma = A^i_{pqr\ldots w}\, u^p_\alpha\, u^q_\beta\, u^r_\gamma \ldots u^w_\tau$$

possesses a numerical algebraic solution

$$(28) \qquad q^i = h^i(\bar{q}^0, \bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^n);\ u^i_\alpha = h^i_\alpha(\bar{q}^0, \bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^n);\ |u^i_\alpha| \neq 0.$$

which satisfies the particular requirement

$$u_0^i = \delta_0^i. \tag{29}$$

This is obviously a necessary condition for the projective equavalence of the manifolds $\mathfrak{M}$ and ${}^*\mathfrak{M}$. Now erect projective normal coordinates (y) and $(\bar{y})$ with origins at the points (q) and $(\bar{q})$ respectively, and relate these by the equations

$$y^i = u_\alpha^i \bar{y}^\alpha. \tag{30}$$

Then the relation (30) between the projective normal coordinates defines a relation

$$x^i = \psi^i(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) \tag{31}$$

between the coordinates of the manifolds ${}^*\mathfrak{M}$ and ${}^*\overline{\mathfrak{M}}$ which atisfies the equations (11)[11]. We see that the relation (31) is such that

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^0}\right)_q = \delta_0^i. \tag{32}$$

Also the jacobian of (31) does not vanish identically so that the transformation inverse to (31) is possible.

It remains to show that the transformation (31) belongs to the group ${}^*\mathfrak{G}$. For this purpose let us write the equations (11) in the form

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} = {}^*\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\sigma} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\sigma} - {}^*\Gamma_{\mu\nu}^i \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \tag{33}$$

Then putting $\beta = 0$, we have

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^0} = -\frac{1}{n+1} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} - {}^*\Gamma_{\mu\nu}^i \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^0}. \tag{34}$$

Hence from (32), we have

$$\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^0}\right)_q = 0. \tag{35}$$

In general it is easily seen that if we differentiate the left member of (34) any number of times and then evaluate at the point $x = q$, the resulting derivative vanisches, i. e.

$$\left(\frac{\partial^r x^i}{\partial \bar{x}^\alpha \ldots \partial \bar{x}^\tau \partial \bar{x}^0}\right)_q = 0. \tag{36}$$

---

[11]) This is very similar to a method used by Vermeil, involving the curvature tensor and its covariant derivatives. See, H. Vermeil, Math. Ann. 79 (1918), pp. 289—312. That affine normal tensors A could be used very advantageously in place of the curvature tensor and its covariant derivatives was pointed out to me at Princeton by Prof. O. Veblen.

It follows that the condition (4) is satisfied by the transformation (31). Now put $i = \beta$ in (11) and sum with $\alpha + 0$. This gives (5). Finally when we integrate (4) and (5) we obtain the equations (3), the constant of integration being absorbable into the variable x^0.

Hence algebraic necessary and sufficient conditions for the projective equivalence of two affinely connected manifolds $\mathfrak{M}$ and $\overline{\mathfrak{M}}$ can be expressed in terms of the projective normal tensors ${}^*A$. I shall state this result in the following way[12]).

The projective normal tensors ${}^*A$ characterize the manifold $\mathfrak{M}$ as a projective manifold.

From this theorem as well as from the theorem of § 7 the projective normal tensors ${}^*A$ merit the name of a complete set of invariants.

§ 9.

Plane projective manifolds.

If the manifold $\mathfrak{M}$ is projective plane, the projective normal tensor ${}^*A^i_{\alpha\beta\gamma}$ vanishes identically. Now it may be shown that if ${}^*A^i_{\alpha\beta\gamma}$ vanishes identically the same is true of the entire set of projective normal tensors ${}^*A$.[13]) Hence from the theorem of § 8, we have the following theorem.

A necessary and sufficient condition for the manifold $\mathfrak{M}$ to be projective plane is that the projective normal tensor ${}^*A^i_{\alpha\beta\gamma}$ vanishes identically.

Thus if the projective normal tensor ${}^*A^i_{\alpha\beta\gamma}$ vanishes identically the manifold $\mathfrak{M}$ can be mapped upon a euclidean space in such a way that the paths of the manifold $\mathfrak{M}$ (generated by parallel displacement of a vector in its own direction) go into the straigh lines of the euclidean space.

§ 10.

The projective curvature tensor.

The projective curvature tensor ${}^*B^i_{\alpha\beta\gamma}$ is defined by the equations

$$(37) \qquad {}^*B^i_{\alpha\beta\gamma} = {}^*A^i_{\alpha\beta\gamma} - {}^*A^i_{\alpha\gamma\beta}.$$

---

[12]) The fact that an infinite number of algebraic conditions is here involved is immaterial for the above result. However, it is evident that the well known Christoffel theorem for the equivalence of quadratic differential forms in terms of a finite number of algebraic conditions can be carried, with but slight modification, into the projective theory.

[13]) I think it best not to belabor the details of these calculations at present. The theorem in question is analogous to a theorem given by Vermeil for the Riemann geometry. See loc. cit. (note 10), p. 308.

As it is evident that the relation inverse to (37) expressing ${}^*A^i_{\alpha\beta\gamma}$ in terms of ${}^*B^i_{\alpha\beta\gamma}$ is the same as in the ordinary affine case, we may immediately write

$$3\,{}^*A^i_{\alpha\beta\gamma} = {}^*B^i_{\alpha\beta\gamma} + {}^*B^i_{\beta\alpha\gamma}. \tag{38}$$

The formula for ${}^*B^i_{\alpha\beta\gamma}$ is

$$ {}^*B^i_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^* l^i_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial^* \Gamma^i_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + {}^*\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,{}^*\Gamma^i_{\sigma\gamma} - {}^*\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\,{}^*\Gamma^i_{\sigma\beta}. \tag{39}$$

We see that the vanishing of the projective curvature tensor ${}^*B^i_{\alpha\beta\gamma}$ also constitutes a necessary and sufficient condition for the manifold $\mathfrak{M}$ to be projective plane. It will be interesting, I think, to compare this condition for a projective plane manifold with that originally given by Weyl[14]). Weyl has constructed a curvature tensor for the projective geometry belonging to the group $\mathfrak{G}$ (see § 2) which has since been denoted by $W^i_{\alpha\beta\gamma}$. It has been shown by him that

$$W^i_{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{40}$$

is a condition for the manifold to be projective plane if $n > 2$. In case $n = 2$ the condition (40) is satisfied identically and hence must be replaced by another which can be written

$$2\,B_{\alpha\beta,\gamma} - 2\,B_{\alpha\gamma,\beta} + B_{\beta\alpha,\gamma} - B_{\gamma\alpha,\beta} = 0; \qquad B_{\alpha\beta,\gamma} = B^\sigma_{\alpha\beta\sigma,\gamma} \tag{41}$$

where $B^i_{\alpha\beta\gamma,\delta}$ is the covariant derivative of the ordinary curvature tensor $B^i_{\alpha\beta\gamma}$ based on the affine connection $\Gamma^i_{\alpha\beta}$.

Now if the indices i, α, β, γ in (39) have values $(1, 2, \ldots, n)$ we may immediately deduce

$$ {}^*B^i_{\alpha\beta\gamma} = \mathfrak{B}^i_{\alpha\beta\gamma} + \frac{\delta^i_\beta}{n-1}\mathfrak{B}^\sigma_{\alpha\gamma\sigma} - \frac{\delta^i_\gamma}{n-1}\mathfrak{B}^\sigma_{\alpha\beta\sigma} \qquad (i, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

and this expression for ${}^*B^i_{\alpha\beta\gamma}$ has already been shown by J. M. Thomas[15]) to be identical with $W^i_{\alpha\beta\gamma}$, i. e.

$$ {}^*B^i_{\alpha\beta\gamma} = W^i_{\alpha\beta\gamma} \qquad (i, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n). \tag{43}$$

If either $\alpha, \beta,$ or γ has the value (0) the projective curvature tensor ${}^*B^i_{\alpha\beta\gamma}$ vanishes identically. There remain the components ${}^*B^0_{\alpha\beta\gamma}(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$ which it will be sufficient to consider for the case $n = 2$. When $n = 2$,

---

[14]) See loc. cit. (note 2), p. 105.

[15]) Note on the projective geometry of paths, Proc. Nat. Acad. Sci. 11 (1925), pp. 207–209.

${}^*B^0_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$ constitutes a tensor belonging to the group $\mathfrak{G}$ owing to the identical vanishing of the other components ${}^*B^t_{\alpha\beta\gamma}$. We have

$$(44) \qquad {}^*B^0_{\alpha\beta\gamma} = 3\frac{\partial^2 \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma} - 3\frac{\partial^2 \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 \Gamma^\sigma_{\sigma\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 \Gamma^\sigma_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \ldots \quad (n=2)$$

where the dotes indicate terms involving the affine connection $\Gamma^t_{\alpha\beta}$. Transforming to affine normal coordinates and evaluating at the origin of the normal coordinate system, the equations (44) become

$$(45) \qquad {}^*B^0_{\alpha\beta\gamma} = 3A^\sigma_{\alpha\beta\gamma\sigma} - 3A^\sigma_{\alpha\gamma\beta\sigma} + A^\sigma_{\sigma\gamma\alpha\beta} - A^\sigma_{\sigma\beta\alpha\gamma} \qquad (n=2)$$

in which the A's are affine normal tensors. Using the relating

$$(46) \qquad B^t_{\alpha\beta\gamma,\delta} = A^t_{\alpha\beta\gamma\delta} - A^t_{\alpha\gamma\beta\delta}$$

and the well known identities in $B^t_{\alpha\beta\gamma,\delta}$ involving the cyclic permutation of the subscripts $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ we may deduce

$$(47) \qquad {}^*B^0_{\alpha\beta\gamma} = 2B_{\alpha\beta,\gamma} - 2B_{\alpha\gamma,\beta} + B_{\beta\alpha,\gamma} - B_{\gamma\alpha,\beta} \qquad (n=2).$$

Thus the vanishing of my projective curvature tensor ${}^*B^t_{\alpha\beta\gamma}$ for $n=2$ gives exactly the equations (41) which Weyl has shown to be the condition for the two dimensional manifold to be projective plane.

(Eingegangen am 15. Juni 1925.)

Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari.

Di

Gabriele Mammana in Catania.

---

§ 1.

In questa memoria verrà fatta una breve trattazione delle equazioni differenziali lineari del 2° ordine ed omogenee, con un nuovo metodo, a mio avviso notevole, grazie al quale oltre a dedurre in modo semplice e breve le note principali proprietà degli integrali delle medesime equazioni, si viene a raggiungere un importante risultato nuovo. Il mio scopo, però, non é tanto di arrivare a tali proprietà, del resto già note in gran parte, sia pure con mezzi più semplici di quelli comuni, quanto di dare un saggio del metodo che sto seguendo nello studio delle equazioni differenziali lineari di ordine superiore al 2°, per quel che riguarda soprattutto i relativi teoremi di oscillazione ed i valori eccezionali del parametro da cui le stesse equazioni si suppone dipendano.

Detto metodo, come si può già intuire dalla lettura di questa memoria, convenientemente generalizzato, si presenta come il più naturale per la ricerca dei teoremi di oscillazione, mentre coi metodi classici (ricondurre, ad esempio, lo studio di un' equazione differenziale con assegnate condizioni a quello di un' equazione lineare integrale) lunghi e penosi se si riesce, in certe ipotesi, a dimostrare l' esistenza dei valori eccezionali relativi ad equazioni lineari omogenee dipendenti da un parametro e a date condizioni ai limiti non altrettanto può affermarsi circa i teoremi che riguardano il carattere generalmente oscillatorio degli integrali delle equazioni stesse.

Il risultato di cui é fatto cenno sopra, e che é immediata conseguenza delle considerazioni che quì verranno svolte, porta, per es, a questa notevole conclusione: „esistono infiniti autovalori del parametro λ relativi all' equazione differenziale,

$$\frac{d}{dx}\Theta(x)\frac{dy}{dx}+(\lambda A(x)+B(x))y=0$$

e alle condizioni

$$y(a)=y(b)=0$$

(con $\Theta(x)>0$ in tutto l'intervallo (a,b) di definizione di Θ, A, e B) *comunque si prendano le funzioni continue* $A(x)$ e $B(x)$".

Al simbolo

$$O^{(n)}\equiv\left(\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+p_n(x)\right)$$

dove si suppone che le $p_i(x)$ siano funzioni continue e, quando occorra derivabili definite in un certo intervallo (a,b), attribuiremo come è ben noto*) il significato di un operatore che applicato ad una funzione derivabile $f(x)$ dia come risultato la funzione seguente:

$$L(f)\equiv\frac{d^nf}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}\frac{df}{dx}+p_nf.$$

Si porrà, cioé, per definizione:

$$O^{(n)}f=L(f).$$

Tale operatore lo dirò *operatore differenziale lineare di ordine n.* Gli operatori del 1° ordine, che poi son quelli che più ci interessano, saranno della forma: $O^{(1)}\equiv\left(\frac{d}{dx}+p_1\right)$. Questi, come del resto gli operatori in genere di ordine n, sono suscettibili di composizione:

prodotto di due operatori del 1° ordine $O_1^{(1)}\equiv\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)$ e $O_2^{(1)}\equiv\left(\frac{d}{dx}+\beta\right)$ nell'ordine $O_1^{(1)}\cdot O_2^{(1)}$ é (per definizione) l'operatore del 2° ordine seguente:

$$(1)\quad O_1^{(1)}\cdot O_2^{(1)}\equiv\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}+\beta\right)=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\{\alpha+\beta\}\frac{d}{dx}+\{\beta'+\alpha\beta\}\right).$$

In modo analogo si potrà definire il prodotto di più operatori del 1° ordine, o di due o più operatori di ordine qualunque; qui però tralasceremo di dare tali definizioni perché, nell'argomento che ci occupa la sola nozione di prodotto di due operatori del 1° ordine ci é sufficiente.

Il prodotto di due operatori, come è evidente, non é, in generale, commutativo, a meno che i coefficienti $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ che figurono nei simboli $O_1^{(1)}$ e $O_2^{(1)}$ non abbiano uguali derivate. Con le fatte convenzioni

*) Cfr. Pincherle-Amaldi, «Operazioni distributive etc.»

la più generale equazione differenziale del 2° ordine lineare ed omogenea $L(z) \equiv z'' + pz' + qz = 0$, potrà essere rappresentata come segue:

$$L(z) = O^{(2)} z \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q\right) z = 0. \tag{2}$$

Decomporre il 1° *membro di una equazione come la* (2) *nel prodotto di due fattori simbolici del* 1° *ordine s'intenderà costruire due operatori del* 1° *ordine* $O_1^{(1)} \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)$; $O_2^{(1)} \equiv \left(\frac{d}{dx} + \beta\right)$ *tali da aversi identicamente*:

$$(O_1^{(1)} \cdot O_2^{(1)}) \cdot z \equiv O_1^{(1)} \cdot (O_2^{(1)} z) = O^{(2)} \cdot z; \text{ oppure } O_1^{(1)} \cdot O_2^{(1)} = O^{(2)}$$

in altri termini, per la (1), *determinare due funzioni soddisfacenti al sistema*:

$$\alpha + \beta = p; \quad \beta' + \alpha \cdot \beta = q. \tag{3}$$

La definizione quì posta conduce naturalmente alla domanda: Assegnata una equazione come la (2) sarà sempre possibile decomporne il primo membro nel prodotto di due fattori simbolici del 1° ordine? e nel caso affermativo la decomposizione sarà unica? In altre parole, in tutto l'intervallo (a, b) di definizione delle funzioni p, e q esistono soluzioni del sistema (3), e quante ne esistono? La domanda va meglio precisata: supposto p e q funzioni reali di x in tutto (a, b), esistono funzioni α e β di x *sempre finite e continue in* (a, b), (*estremi inclusi*) che soddisfano al sistema (3)?

Alla domanda posta in questi precisi termini si può rispondere affermando che, ove per le funzioni α e β si richieda inoltre *la realità* in tutto l'intervallo (a, b), la decomposizione in parola del 1° membro della (2) non é sempre possibile.

Per semplicità del linguaggio diremo *reale* un fattore simbolico del tipo $\left(\frac{d}{dx} + g(x)\right)$, se la funzione $g(x)$ che vi figura é *finita continua e reale* in tutto il suo intervallo di definizione (estremi inclusi), e lo diremo, invece, *complesso* se la medesima funzione $g(x)$ *é finita e continua ma complessa.*

Ciò posto occupiamoci della dimostrazione di quanto sopra abbiamo affermato.

Dalle (3) eliminando α segue immediatamente: condizione necessaria e sufficiente affinché il 1° membro di (2) sia suscettibile di una decomposizione in fattori simbolici del 1° ordine e *reali*, é che esista una funzione $\beta(x)$ definita in tutto (a, b) ivi finita continua e reale, (quindi anche limitata) e sodisfacente alla seguente equazione di Riccati in β:

$$\beta' = \beta^2 - p\beta + q. \tag{4}$$

La possibilità o meno della decomposizione in discorso è dunque ricondotta alla possibilità o meno di soddisfare alla (4) con una funzione finita e continua in tutto l'intervallo[1]).

Si può intanto subito notare che la decomposizione del 1° membro di (2), ove sia possibile, non é unica, ché le funzioni α, e β che entrano nei fattori simbolici vengono a dipendere da un costante arbitraria.

Ora la equazione (4), in generale, non ammette soluzioni reali che in tutto (a, b) si conservino finite continue e (quindi limitate); per convincersene si supponga l'esistenza di una soluzione $\beta(x)$ di (4) reale finita e continua in tutto l'intervallo, (a, b), e quindi possibile la decomposizione del 1° membro di (2) in fattori reali, e costruiamo l'integrale generale della (2) stessa che, in questo supposto, potremo scriverla come segue:

$$(2)' \qquad L(z) \equiv \left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}+\beta\right)\cdot z \equiv \left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left(\frac{dz}{dx}+\beta z\right)$$
$$\equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}+\beta z\right)+\alpha\left(\frac{dz}{dx}+\beta z\right) = 0$$

(dove β é la supposta soluzione di (4), e $\alpha = p - \beta$).

Dal penultimo membro della (2)' si ricava:

$$\frac{dz}{dx}+\beta z = k e^{-\int_a^x \alpha\, dx} \qquad \text{(con } k \text{ costante arbitraria)}$$

da cui

$$(5) \qquad z = k e^{-\int_a^x \beta\, dx}\left[\int_a^x e^{\int_a^x (\beta-\alpha)\, dx}\, dx + h\right] \qquad \text{(dove } h \text{ è pure costante arbitraria).}$$

La funzione z definita dalla (5) (α e β essendo, per ipotesi, reali e limitate) potrà annullarsi, come é chiaro, una volta al più nell'intervallo (a, b), consegue che: „condizione necessaria affinché sia possibile la nostra decomposizione con fattori simbolici reali, é che ogni integrale di (2) nullo in un punto di (a, b) non si annulli ulteriormente nel medesimo intervallo".

Questa condizione é pure sufficiente, difatti se é soddisfatta, esiste di certo, come é noto, un integrale dell'equazione (2) reale che si conserva diverso da zero in tutto (a, b):[2])

Sia questo, ad es: z_1. La funzione $\varrho = \frac{-z_1'}{z_1}$ sarà, allora finita e

[1]) Scrivendo „tutto l'intervallo (a, b)" intenderemo sempre gli estremi a, b, inclusi.

[2]) Se u_1 e u_2 sono due integrali di (2) nulli rispettivamente in a, e b, aventi segni (costanti) uguali, sicuramente esistenti, l'integrale $u_1 + u_2$ é, in tutto (a, b) diverso da zero.

continua in tutto (a, b) oltre che reale, di più essa sodisfa alla equazione di Riccati (4); si ha invero:

$$\varrho' = \frac{-z_1''}{z_1} + \frac{z_1'^2}{z_1^2}$$

ma z_1 é soluzione della (2) segue quindi:

$$\varrho' = \frac{pz_1' + qz_1}{z_1} + \frac{z_1'^2}{z_1^2} = \left(\frac{-z_1'}{z_1}\right)^2 - p\left(\frac{-z_1'}{z_1}\right) + q = \varrho^2 - p\varrho + q.$$

A conclusioni di quanto sopra si ha il seguente:

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il* 1° *membro di una equazione differenziale lineare del* 2° *ordine omogenea e di tipo normale, sia decomponibile nel prodotto di due fattori simbolici del* 1° *ordine reali é che ogni integrale dell' assegnata equazione nullo in un punto del proprio intervallo di definizione, non si annulli ulteriormente nello stesso intervallo, o ciò che fa lo stesso, esista un integrale dell' equazione detta sempre diverso da zero in tutto l' intervallo in cui é definita la medesima equazione.*

Questo teorema dimostra completamente l'affermazione fatta sopra.

Ove però si tolga la restrizione relativa alla realità delle funzioni α e β che figurano nei fattori simbolici di decomposizione, la possibilità di decomporre il 1° membro della (2) nel prodotto di due fattori simbolici del 1° ordine in generale complessi, é in ogni caso dimostrabile. Infatti, si considerino due integrali di (2), z_1 e z_2 linearmente indipendenti, e si ponga:

$$\bar{\varrho} = \frac{z_1' + iz_2'}{z_1 + iz_2}.$$

La funzione $\bar{\varrho}$ quì definita, é finita e continua in tutto l' intervallo (a, b), ché per essere z_1 e z_2 linearmente indipendenti non é mai ad un tempo $z_1 = z_2 = 0$ quindi l' integrale complesso di (2), $z_1 + iz_2$ é sempre diverso da zero in (a, b). D' altra parte, come é evidente, la medesima funzione, $\bar{\varrho}$ é integrale dell' equazione di Riccati (4); da tutto ciò segue che ove si considerino i due operatori (complessi) $\left(\frac{d}{dx} + (p - \bar{\varrho})\right)$ e $\left(\frac{d}{dx} + \bar{\varrho}\right)$ e se ne eseguisca il prodotto[3]), l'operatore del 2° ordine che ne risulta, applicato a z riproduce il 1° membro di (2), viene cioé fissata una decomposizione in fattori simbolici del 1° ordine del 1° membro della (2) stessa, in ogni caso. La decomposizione dunque é sempre possibile a patto però d' introdurre anche fattori complessi.

---

[3]) Nell' ordine in cui sono scritti.

Concludendo si può enunciare il

Teorema. *È sempre possibile decomporre il* 1° *membro della più generale equazione differenziale del* 2° *ordine lineare omogenea e di tipo normale nel prodotto di due fattori simbolici del* 1° *ordine. Tali fattori, in generale, sono complessi e la decomposizione può farsi in infiniti modi.*

Osservazione. A complemento della teoria della decomposizione svolta resta da fare la seguente osservazione. Fin quì noi ci siamo sempre preoccupati che le funzioni α e β, che entrano nei fattori simbolici del 1° ordine, fossero limitati in (a, b) ed in tale supposto siamo pervenuti al sopra enunciato teorema. Ora, é degno di nota rilevare come sia sempre possibile operare una decomposizione del 1° membro di (2) in fattori simbolici del 1° ordine e reali quando non si escluda che le funzioni α e β che figurano nei fattori simbolici di decomposizione abbiano dei punti (in numero finito) di singolarità, in cui cioé diventano infinite. La cosa é immediata, invero: se z_1 é un integrale qualsiasi della (2), la funzione $\varrho = \frac{z_1'}{z_1}$ é definita in tutto (a, b), salvo nei punti (in numero finito) in cui z_1 si annulla, nei quali assume valore infinito, essa funzione, d'altra parte, sodisfa formalmente all'equazione (4) di Riccati, e ciò porta, come conseguenza, la sopra affermata possibilità di decomposizione.

§ 2.

L'introduzione degli operatori differenziali, e la dimostrata possibilità di decomporre il 1° membro di una qualsiasi equazione differenziale del 2° ordine omogenea a coefficienti reali nel prodotto di due fattori simbolici del 1° ordine, consentono di rappresentare la più generale di tali equazioni sotto la seguente forma:

$$L(z) \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) z = 0 \tag{7}$$

(dove α e β sono funzioni finite e continue della x definite in un comune intervallo (a, b), in generale complesse, la seconda β essendo ivi pure derivabile, e soddisfacenti ad alcune restrizioni che ora verranno precisate e dovute al fatto che i coefficienti di z'', z', z, nella espressione sviluppata di $L(z)$ sono reali.

Dalla (7) sviluppando si ha:

$$L(z) = \frac{d^2 z}{dx} + (\alpha + \beta)\frac{dz}{dx} + (\beta' + \alpha\beta) z = 0 \tag{7}'$$

da cui consegue:

$$\begin{aligned} p &\equiv \alpha + \beta = \text{funzione reale di } x, \\ q &\equiv \beta' + \alpha\beta = \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad x. \end{aligned} \tag{8}$$

La prima delle (8) ci dice che i coefficienti dell'immaginario i, in α e β, sono eguali e contrari, posto dunque $\beta = u + ih$ dovrà aversi necessariamente, $\alpha = v - ih$, con u, v, ed h avendo indicato funzioni reali della sola x definite in (a, b).

Dalla seconda delle (8), poi, sostituendo si ottiene:

$$\beta' + \alpha\beta = u' + ih' + uv + h^2 + ih(v - u) = \text{funzione reale di } x$$

e però

$$h' + h(v - u) = 0$$

cioé

$$h = ce^{\int_a^x (u-v)\,dx} \equiv c\varrho(x) \qquad (c \text{ essendo costante reale}). \tag{9}$$

Notiamo fin d'ora che la funzione $\varrho(x)$ in tutto (a, b) si conserva positiva.

La forma generale delle funzioni α e β é quindi la seguente:

$$\alpha = v - ic\varrho; \quad \beta = u + ic\varrho$$

dove le funzioni reali u e v si possono scegliere comunque purché continue e la prima anche derivabile, e la costante c può pure assumersi arbitrariamente. In particolare per $u \equiv v$ si avrà $\varrho(x) \equiv 1$ ed $h = c$, ed α e β risultano coniugate.

Supposte dunque assegnate u, v, e c e quindi α e β, proponiamoci la ricerca di una formula che esprima l'integrale generale della (2). Scrivendo la (7) sotto la forma:

$$L(z) \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx} + \beta z\right) + \alpha\left(\frac{dz}{dx} + \beta z\right) = 0. \tag{7''}$$

Se ne deduce che ogni funzione $z(x)$ che soddisfi alla equazione del 1 ordine

$$\frac{dz}{dx} + \beta z = 0 \tag{10}$$

é evidentemente, integrale della proposta (7), ora si ha dalla (10):

$$z = \bar{c}e^{-\int_a^x \beta\,dx} = \bar{c}\,e^{-\int_a^x u\,dx} \cdot e^{-ic\int_a^x \varrho\,dx} \qquad (\text{con } \bar{c} \text{ costante reale arbitraria}). \tag{10'}$$

Si ponga:

$$\eta(x) = -\int_a^x u\,dx; \qquad \xi(x) = \int_a^x \varrho\,dx$$

e si noti, poiché $\varrho(x) > 0$ in tutto (a, b), che la funzione $\xi(x)$, qui definita, è funzione crescente di x, e nulla nell'estremo inferiore a del l'intervallo (a, b).

Sostituendo nella (10)' avremo:

$$z = \bar{c}\, e^{\eta}\, e^{-i c\xi} = \bar{c}\, e^{\eta}(\cos c\xi - i \operatorname{sen} c\xi). \tag{11}$$

La funzione z definita dalla (11) verifica identicamente la (7), d'altra parte per la distributività dell'operatore $L(z)$ si ha:

$$L(\bar{c}\, e^{\eta} \cos c\xi - i\, \bar{c}\, e^{\eta} \operatorname{sen} c\xi) = \bar{c}\, L(e^{\eta} \cos c\xi) - i\, \bar{c}\, L(e^{\eta} \operatorname{sen} c\xi) \equiv 0$$

ma le quantità $L(e^{\eta} \cos c\xi)$, ed $L(e^{\eta} \operatorname{sen} c\xi)$ sono reali segue quindi che dovrà aversi separatamente

$$L(e^{\eta} \cos c\xi) \equiv 0; \qquad L(e^{\eta} \operatorname{sen} c\xi) \equiv 0$$

cioé le funzioni reali $e^{\eta} \cos c\xi$, ed $e^{\eta} \operatorname{sen} c\xi$ sono integrali particolari della (7), integrali che, come si verifica subito, sono anche indipendenti [4]).

Per l'integrale generale della (7) avremo dunque la formula:

$$z = e^{\eta}(c_1 \cos c\xi + c_2 \operatorname{sen} c\xi) \tag{12}$$

(dove c_1 e c_2 rappresentano costanti arbitrari reali se, come si vuole, z deve essere reale.

La notevole forma data all'integrale generale della (7) per mezzo della (12), é perfettamente analoga a quella che si suol dare per le equazioni differenziali a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è a radici complesse. Tale analogia sussiste in ogni caso. Supponiamo invero α e β reali e però $c = 0$. La (12) per $c = 0$ ci dà un integrale della corrispondente equazione che non si annulla mai in (a, b) come vuole il teorema 1°. L'integrale generale in questo caso é dato dalla (5) la quale nel caso particolare in cui sia $\alpha = \beta$ assume la forma

$$z = k e^{-\int_a^x \beta\, dx} (x + h)$$

che ricorda quella dell'integrale dell'equazione a coefficienti costanti con equazione caratteristica a radici multiple.

La (12), dà l'integrale generale della (7), nel caso, diciamo così, generico ed in ogni caso rappresenta sempre un particolare integrale di essa. Alla medesima forma possiamo dare una espressione assai più significativa. Per questo moltiplichiamo e dividiamo il suo 1° membro per il numero $K = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ che potremo supporre sempre diverso da zero, e si chiami $-c\gamma$ l'arco, determinato a meno di multipli di 2π soddisfacente alle due relazioni:

$$\cos(-c\gamma) = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}; \qquad \operatorname{sen}(-c\gamma) = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

[4]) La parte reale e il coefficiente dell'immaginario i, nella (11), non sono isolatamente soluzioni della (10), ma lo sono della (7).

avremo:

$$(12)' \quad z = Ke^{\eta}(\operatorname{sen} c\xi \cos c\gamma - \cos c\xi \operatorname{sen} c\gamma) = Ke^{\eta} \operatorname{sen} c(\xi - \gamma).$$

Riguardo alle due costanti arbitrarie K e γ che figurano nell'integrale generale espresso dalla $(12)'$ possiamo limitarci a supporre senz'altro K variabile comunque, e γ variabile nell'intervallo aperto a destra $\left(0, \frac{\pi}{c}\right)$ (s'intende nell'ipotesi che $c \neq 0$) [5]).

Insieme alla $(12)'$ si ha pure per rappresentare l'integrale generale di (7) l'altra formula:

$$(12)'' \qquad z = K_1 e^{\eta} \cos c(\xi - \gamma_1)$$

(dove K_1 può assumere qualsiasi valore e per γ_1 ci si può limitare ai valori compresi nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c}\right)$).

È bene porre in evidenza che l'argomento $c(\xi - \gamma)$ é in (a, b) funzione monotona della x.

Due integrali corrispondenti a valori uguali di γ o γ_1 sono evidentemente dipendenti; a due valori diversi di γ o γ_1, invece, corrispondono sempre integrali linearmente indipendenti. (Supposto, s'intende, che i valori di γ o γ_1 siano contenuti rispettivamente negl'intervalli $\left(0, \frac{\pi}{c}\right)$, o $\left(-\frac{\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c}\right)$).

Si verifica subito, infatti, considerando ad es: la $(12)'$, che se γ' e γ'' sono due valori diversi di γ contenuti in $\left(0, \frac{\pi}{c}\right)$, pel Wronskiano W relativo a due integrali corrispondenti a questi valori, e a due qualsiasi valori K' e K'' (non nulli) di K si ha:

$$W = K'K''e^{2\eta}\xi' \operatorname{sen} c(\gamma'' - \gamma')$$

---

[5]) Si può in uno ed in un solo modo disporre delle costanti K e γ e far si che l'integrale z di (7) e la sua prima derivata z', in un punto x_0 di (a, b) assumano valori H ed M comunque assegnati. In vero. posto per semplicità $\xi(x_0) = \xi_0$, $\eta(x_0) = \eta_0$, $\eta'(x_0) = \eta_0'$, $\xi'(x_0) = \xi_0' > 0$, segue:

$$Ke^{\eta_0} \operatorname{sen} c(\xi_0 - \gamma) = H; \quad K\eta_0' e^{\eta_0} \operatorname{sen} c(\xi_0 - \gamma) + K\xi_0' e^{\eta_0} \cos c(\xi_0 - \gamma) = M:$$

da cui poichè $\xi_0' > 0$

$$K \operatorname{sen} c(\xi_0 - \gamma) = \frac{H}{e^{\eta_0}}; \quad K \cos c(\xi_0 - \gamma) = \frac{M - H\eta_0'}{\xi_0' e^{\eta_0}}.$$

I secondi membri di queste due ultime equazioni in K e γ non sono nulli entrambi se tali non sono H ed M; queste, dunque, determinano la $\operatorname{tg} c(\xi_0 - \gamma)$ oppure la $\operatorname{cot} c(\xi_0 - \gamma)$, e quindi nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{c}\right)$ resta perfettamente determinanto $c\gamma$, e però γ e K.

il quale non é mai nullo perché $\xi'(x) > 0$; e $0 < |c(\gamma'' - \gamma')| < \pi$. È immediata, grazie alla $(12)'$ la dimostrazione della nota proprietà che riguarda la separazione degli zeri di due integrali linearmente indipendenti di un' equazione di 2° ordine lineare ed omogenea. Per avere, invero, due integrali indipendenti di (7) basta, nella $(12)'$, fissare per γ due valori γ' e γ'' diversi. Sia, per fissare le idee, $0 \leqq \gamma' < \gamma'' < \frac{\pi}{c}$ e poniamo:

$$z_1 = K' e^{\eta} \operatorname{sen} c(\xi - \gamma'); \qquad z_2 = K'' \operatorname{sen} c(\xi - \gamma'').$$

Per il primo integrale z_1, i due punti x_1 e x_2 di (a, b), $(x_1 < x_2)$ siano due zeri consecutivi, nei quali punti $\xi(x)$ assuma ad esempio rispettivamente i valori $\gamma' + \frac{n\pi}{c}$ e $\gamma' + \frac{(n+1)\pi}{c}$, n essendo intero.

Al variare di x da x_1 ad x_2, $\xi(x)$ varia con *continuità e sempre crescendo* da $\gamma' + \frac{n\pi}{c}$ a $\gamma' + \frac{(n+1)\pi}{c}$, e assumerà quindi in un certo punto $\bar{x}$ compreso fra x_1 ed x_2, e da questi diverso, e soltanto in un punto, il valore $\gamma'' + \frac{n\pi}{c}$ interno all' intervallo $\left(\gamma' + \frac{n\pi}{c},\ \gamma' + \frac{(n+1)\pi}{c}\right)$.

Il punto $\bar{x}$ sarà allora uno zero di z_2 interno all' intervallo (x_1, x_2), e non é possibile che in questo medesimo intervallo z_2 si annulli ulteriormente, poiché nell' eventuale zero di z_2 che immediatamente precede $\bar{x}$ e in quello che immediatamente segue, la $\xi(x)$ dovrebbe assumere rispettivamente i valori $\gamma'' + \frac{(n-1)\pi}{c}$ e $\gamma'' + \frac{(n+1)\pi}{c}$ i quali valori essendo esterni all' intervallo $\left(\gamma' + \frac{n\pi}{c},\ \gamma' + \frac{(n+1)\pi}{c}\right)$ possono venire raggiunti da $\xi(x)$ ($\xi(x)$ é funzione crescente di x) solo per valori di x esterni ad (x_1, x_2).

La forma notevolissima data per la $(12)'$ o $(12)''$ all' integrale generale dell' equazione (7), la forma cioé di prodotto di un esponenziale per il seno o il coseno di una funzione di x sempre crescente in (a, b), mentre dà modo di ricavare in modo semplice e naturale classiche proprietà dell' integrale stesso (ad es: i teoremi di Sturm), dà ragione del perché le soluzioni di una equazione lineare del 2° ordine hanno, in generale, carattere oscillatorio, e nel caso che i coefficienti della stessa dipendano da parametri, dell' esistenza di autosoluzioni. Dalla $(12)'$, ad es: supposto che i coefficienti della (7) e però le funzioni u, v, e la costante c, dipendano in modo continuo da parametri segue che ove mai col tendere di tali parametri verso assegnati valori, la funzione $c\xi(x)$ per qualche valore $\bar{x}$ di x, diverga, il numero di zeri, della soluzione z cresce di conseguenza indefinitamente; inoltre, se si considera un' integrale nullo in a, cioé un integrale della forma

$$\bar{z} = K e^{\eta} \operatorname{sen} c\,\xi(x)$$

e si ricorda che $\xi = \int_a^x \varrho\, dx$ dove $\varrho = e^{\int_a^x (u-v)\, dx}$ (poiché il valore $c\xi(b)$ che la funzione $c\xi(x)$ assume nell'estremo b si può esprimere come somma del valore che la stessa funzione assume nel punto qualsiasi $\bar{x}$ più una quantità positiva, cioé: $\xi(b) = \xi(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^b \varrho\, dx$), segue che $c\xi(b)$ cresce in valore assoluto insieme con $c\xi(\bar{x})$, e perciò col tendere dei parametri da cui dipende la (7) verso gli assegnati loro valori limiti $c\xi(b)$ diverge; ma esso d'altra parte dipende in modo continuo[6]) dagli stessi parametri avremo dunque infiniti valori di questi parametri in cui $c\xi(b)$ stesso assume valori uguali a multipli interi di π, infiniti valori (autovalori) cioé, in cui l'integrale $\bar{z}$ nullo in a, é nullo pure in b.

Così, se si osserva la forma particolare di $\varrho(x)$ si potrà affermare che ove in un qualunque tratto di (a, b) il minimo della differenza $(u - v)$, diverga col tendere dei parametri da cui essa dipende verso loro punti limiti, il numero degli zeri dell'integrale che cadono in tale tratto cresce indefinitamente mentre i parametri stessi convergono ai detti valori limiti, ecc, ecc.

La ricerca dei teoremi di oscillazione e quella sugli autovalori è così ricondotta alla considerazione seguente: „constatare, cioé, se per qualche valore di x la funzione $c\xi(x)$ diverge col tendere dei parametri da cui dipende verso assegnati loro punti limiti."

Vogliamo ora dire di un notevole risultato che la formula $(12)'$ permette di raggiungere e del quale si é fatto cenno nell'introduzione della presente.

Dalla $(12)'$ si ricava che ogni integrale di (7) nullo in a, ha la seguente espressione

$$\bar{z} = K e^{v} \operatorname{sen} c\xi$$

(K essendo costante arbitraria non nulla) I coefficienti di (7) dipendano, supponiamo, da parametri, per fissare le idee, da un parametro λ, più precisamente tali coefficienti siano funzioni continue del parametro λ; dallo stesso parametro verrà a dipendere in modo continuo la funzione $c\xi(x)$.[6]) Supponiamo inoltre che col variare di λ in un certo insieme Λ secondo un fissato ordinamento, il numero degli zeri di $\bar{z}$ che cadono nell'intervallo (a, b) cresca indefinitamente, crescer di conseguenza, insieme a questo numero, il valore assoluto $|c\xi(b)|$ dell'argomento $c\xi(x)$ calcolato nell'estremo b.

[6]) Cfr. in proposito come $\xi(x)$ dipende da α e β, e anche, nel § 1, come α e β dipendano dalle soluzioni e quindi dai coefficienti di (2).

Ma $c\xi(b)$ varia con continuità con λ; nel suo indefinito crescere, quindi, passerà pei multipli interi di π, si avranno perciò infiniti valori di λ (autovalori) contenuti in Λ, pei quali l'integrale $\bar{z}$ nullo in a è pure nullo in b.

Esprimeremo questo risultato semplicemente col seguente

Teorema. *Ad ogni teorema di oscillazione relativo a un' equazione del 2° ordine lineare ed omogenea dipendente da un parametro, é associato un teorema che ne stabilisce l' esistenza di infiniti autovalori rispetto alle condizioni ai limiti* $\bar{z}(a) = \bar{z}(b) = 0$.

Applichiamo ad es: questo teorema alle equazioni del tipo:

$$\frac{d}{dx}\Theta\frac{dy}{dx} + (\lambda A + B)y = 0, \tag{13}$$

dove si suppone $\Theta(x) > 0$ in tutto (a, b), e $A(x)$ e $B(x)$ semplicemente continue in (a, b); (λ rappresenta il parametro da cui dipende l' equazione). Per le equazioni di questo tipo é noto quanto segue: „se la funzione $A(x)$ ha in (a, b) dei tratti positivi (negativi) col divergere positivamente (negativamente) di λ, il numero di zeri di una soluzione di (13) che cadono in (a, b) cresce indefinitamente.

Per quel che riguarda poi l' esistenza di autovalori di λ relativi alla stessa equazione e alle condizioni ai limiti $y(a) = y(b) = 0$ si é potuto stabilire l' esistenza di infiniti di essi nelle sole ipotesi seguenti:

1° $A(x)$ è funzione di segno costante in (a, b); e $B(x)$ é qualunque continua.

2° $A(x)$ è funzione continua qualunque, e $B(x) < 0$ in tutto (a, b).

Il teorema ora stabilito consente, dato che per la (13) sussiste un teorema di oscillazione nel caso che A e B siano soltanto continue, di togliere la forte restrizione che riguarda la funzione $B(x)$ nell' ipotesi seconda ed enunciare in tutta la sua generalità il

Teorema. *Esiste un' infinità di autovalori* λ *aventi il punto all' infinito come unico punto limite relativi alla* (13) *e alle condizioni ai limiti* $y(a) = y(b) = 0$ *comunque si scelgano le funzioni continue* $A(x)$ *e* $B(x)$.

Ma c' é di più: Si consideri l' equazione,

$$\frac{d}{dx}\Theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx} + q(x, \lambda)y = 0$$

i cui coefficienti Θ, e q, continui per rispetto ad x in tutto l' intervallo (a, b) dipendano in modo continuo anche da un parametro λ variabile in un dato insieme Λ, e si abbia inoltre che per ogni valore di λ apparte-

nente al dato insieme, la funzione $\Theta(x\lambda)$ sia in tutto (a, b) sempre positiva ed esista poi e sia continua la $\frac{\partial\Theta}{\partial x}$. Per tale equazione, é noto il seguente teorema: „Se rispetto ad un certo ordinamento dell'insieme numerico Λ, per ogni valore di x comunque fissato in un intervallo (x_1, x_2) di (a, b) le funzioni di λ $\Theta(x\lambda)$, $q(x, \lambda)$ variano monotonamente con λ, e cioé, $\Theta(x, \lambda)$ è non crescente, e $q(x, \lambda)$ non descrescente, se, detti $M(\lambda)$, ed $m(\lambda)$ rispettivamente il massimo e il minimo di $\Theta(x, \lambda)$ e $q(x, \lambda)$ in (x_1, x_2), si ha:

$$(14)' \qquad \begin{array}{l} \lim M(\lambda) = \text{quantità finita non nulla}, \\ \lim m(\lambda) = \infty \end{array}$$

allora, assegnato arbitrariamente un numero positivo intero ν, è possibile determinare un valore λ_ν di λ tale che per esso e per *tutti i suoi valori seguenti* l'integrale generale $y(x, \lambda)$ della considerata equazione ha in (x_1, x_2) un numero di zeri non inferiori a ν; inoltre preso un qualsiasi intervallo (ξ_1, ξ_2) in $(x_1 x_2)$, esiste sempre un valore λ_{ξ_1, ξ_2} di λ tale, che per esso e per *tutti i suoi valori seguenti* l'integrale $y(x, \lambda)$ si annulla nell'interno di (ξ_1, ξ_2)."

L'ipotesi della monotonia delle funzioni $\Theta(x, \lambda)$ e $q(x, \lambda)$ per ogni x fissato in (a, b) viene sfruttata in questo teorema per dimostrare che la proprietà per la quale l'integrale $y(x, \lambda)$ ha in (x_1, x_2), ν zeri almeno, o uno zero almeno contenuto in (ξ_1, ξ_2) oltre a valere rispettivamente per i valori λ_ν e λ_{ξ_1, ξ_2} di λ *vale anche per tutti i valori di* λ *che seguono questi*. Ove si voglia togliere la restrizione relativa alla suddetta monotonia di Θ e q ferme lasciando le altre ipotesi, il teorema non subisce che leggerissime modificazioni, in questo senso: ad ogni intero positivo ν fissato, si può sempre associare un numero λ_ν pel quale l'integrale corrispondente $y(x, \lambda)$ si annulla almeno ν volte in $(x_1 x_2)$. Pei valori di λ seguenti a λ_ν può accadere che ν non sia *sempre* limite inferiore del numero di zeri che i corrispondenti integrali $y(x, \lambda)$ hanno in (x_1, x_2). In quest'ultimo caso però esiste lo stesso certamente un numero $\bar{\lambda}_\nu \geqq \lambda_\nu$ tale che per esso e per i suoi seguenti il numero di zeri dei corrispondenti integrali non sia inferiore a ν. Un'analoga leggera modificazione vale anche per quel che rigarda i valori λ_{ξ_1, ξ_2}. Non ammettere la menzionata mono-

---

[7]) Non si ritiene qui utile dimostrare quanto si afferma circa le leggere modificazioni da portare al ricordato noto teorema nell'ipotesi più larga ammessa, perché, della cosa ci si convincerà immediatamente quando si legga la dimostrazione del ricordato teorema nelle ipotesi più ristrette menzionale sopra: v. ad es M. Picone: corso di analisi superiore equazione differenziali, fasc. 1° edito dal Circolo Matematico di Catania, p. 92 e segg.

tonia delle funzioni Θ e q può portare, dunque, come conseguenza soltanto l'eventuale non monotonia del numero ν al variare di λ nel fissato ordinamento, però si ha sempre $\lim \nu = \infty$.

Questo teorema e quello da noi stabilito sopra che lega i teoremi d'oscillazione a quelli sugli autovalori permette di stabilire il seguente:

Teorema. *Nelle ipotesi che in un dato intervallo* (x_1, x_2) *di* (a, b) *pei coefficienti* $\Theta(x, \lambda)$ e $q(x, \lambda)$ *della considerata equazione si verifichino le* (14)′, *cioé* ($M(\lambda)$ ed $m(\lambda)$ *essendo rispettivamente il massimo e il minimo di* Θ *e* q *in* (x_1, x_2)) $\lim M(\lambda) =$ *quantità finita non nulla* $\lim m(\lambda) = \infty$ (*quando* λ *varia secondo un prefissato ordinamento*); *esiste un'infinità di autovalori di* λ *relativi alla medesima equazione e alle condizioni ai limiti* $y(a) = y(b) = 0$, *tale che, nel mentre* λ *li percorre seguendo il fissato ordinamento, il numero* N *di zeri del corrispondente integrale* $y(x, \lambda)$ *corrispondente a* λ_ν *e che cadono in* (x_1, x_2) *cresce indefinitamente.*

A ognuno di tali autovalori λ_ν si può associare un numero intero positivo ν il quale limiti inferiormente il numero N di zeri dell'integrale $y(x, \lambda_\nu)$ corrispondente a λ_ν e che cadono in (x_1, x_2). Questo numero ν che dipende evidentemente da λ può, col variare di λ stesso secondo il fissato ordinamento, non riuscire funzione monotona (non decrescente) di λ però si ha sempre:

$$\lim \nu = \infty$$

in particolare questo teorema è applicabile al caso notevole che $\Theta(x, \lambda)$ sia indipendente da λ, e $q(x, \lambda)$ razionale intera in λ cioé:

$$q(x, \lambda) = A_0(x)\lambda^n + A_1(x)\lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x)\lambda + A_n(x)$$

dove le $A_i(x)$ sono definite in (a, b), ivi essendo continue.

Sia (x_1, x_2) un intervallo di (a, b) in cui $A_0(x)$ si mantiene positiva e si prenda come insieme Λ nel quale varii λ l'insieme dei numeri non negativi e come ordinamento quello secondo cui λ cresce. In questo caso per ogni x di (x_1, x_2), Θ e q, da un certo momento in poi, variano monotonamente col crescere di λ e propriamente, Θ resta costante, mentre q cresce.

Considerazioni analoghe si potranno fare pei tratti (x_1', x_2') in cui $A_0(x)$ si conserva negativa e per insieme Λ si prenda quello dei numeri non positivi. Potremo quindi affermare: *„esistono infiniti autovalori relativi ad equazioni del tipo*

$$\frac{d}{dx}\Theta(x)\frac{dy}{dx} + \left(\sum_{i=0}^{n} A_i(x)\lambda^{n-i}\right)y = 0$$

e alle condizioni

$$y(a) = y(b) = 0$$

aventi il punto all' infinito come unico punto limite, e tali che, mentre λ li percorre, ad es: crescendo, da un certo momento in poi, il numero N degli zeri del corrispondente integrale $y(x, \lambda)$ che cadono in un intervallo $(x_1 x_2)$ di (a, b) (in cui la $A_0(x)$ sia sempre positiva), cresce indefinitamente e monotonamente con λ.

Catania, 23. August 1925.

(Eingegangen am 23. August 1925.)

Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten.

Von

Stefan Mazurkiewicz in Warschau.

Es sei T eine Gleichgewichtsfigur, die zu dem Werte ω der Winkelgeschwindigkeit gehört. Es sei v das Volumen von T. Nach einem Satz von Herrn Lichtenstein *existiert alsdann eine nur von v und ω abhängige obere Schranke für die Entfernung der Punkte des Körpers T von der Rotationsachse*[1]). Zweck dieser Arbeit ist, zu zeigen, *daß eine analoge obere Schranke auch für die Breite des Körpers T in der Richtung der Rotationsachse existiert.* Genauer gesagt, gilt folgendes:

Bedeutet a die Maximalentfernung der Punkte von T von der Rotationsachse, $2b$ die Breite des Körpers T in der Richtung der Rotationsachse und ist $b > a$, so besteht die Ungleichung:

$$b < C\sqrt[3]{v} \qquad C - \textit{numerische Konstante.} \tag{1}$$

Es genügt offenbar, den Satz für $v = 1$ zu beweisen. Wir betrachten ein Koordinatensystem mit dem Schwerpunkt von T als Koordinatenursprung und der Rotationsachse als z-Achse. Die Ebene $z = 0$ ist Symmetrieebene von T[2]). Der Maximalwert von z für die Punkte von T ist $= b$, und wird auf der Begrenzung von T in mindestens einem Punkte $P_0 = (x_0, y_0, b)$, erreicht. Es sei $P_1 = \left(x_0, y_0, \frac{b}{2}\right)$. Es bedeute:

T_1 denjenigen Teil von T, der im Halbraum $z \geqq \frac{b}{2}$ liegt,

T_2 denjenigen Teil von T, der sich im Halbraum $z \leqq \frac{b}{2}$ befindet,

T_3 den Teil von T im Halbraum $z \geqq \frac{3b}{4}$,

[1]) L. Lichtenstein, Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Sitzungsber. Akad. Berlin 48 (1918), S. 1132–1133, § 4.

[2]) loc. cit. S. 1122, § 2.

T_4 das Spiegelbild von T_1 in bezug auf die Ebene $z = \frac{b}{2}$,

T_5 das Spiegelbild von T_2 in bezug auf die Ebene $z = \frac{3b}{4}$,

T_6 denjenigen Teil von T_1, der nach Wegnahme von T_3 und T_5 übrigbleibt.

Wir bezeichnen mit $V(P), V_k(P)$ die Potentiale von T, T_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ im Punkte P und bemerken, daß T_4 und T_5 in T enthalten sind[3]). Daher ist T_4 in T_2 enthalten und man hat:

$$V(P_1) = V_1(P_1) + V_2(P_1), \quad V_2(P_1) > V_4(P_1) = V_1(P_1).$$

Setzt man also:

$$V_1(P_1) = dV(P_1); \; V_2(P_1) = (1-d)V(P_1),$$

so ist $d < \frac{1}{2}$. Des weiteren ist

$$V_3(P_0) + V_5(P_0) = V_5(P_1) + V_3(P_1), \quad V_6(P_0) \leqq V_6(P_1)$$

(letzteres folgt daraus, daß die Entfernung eines beliebigen Punktes des Körpers T_6 von P_1, seine Entfernung von P_0 nicht übersteigen kann). Durch Addition der beiden letzten Ungleichheiten folgt:

$$\begin{aligned} V_1(P_0) &= V_3(P_0) + V_5(P_0) + V_6(P_0) \\ &\leqq V_3(P_1) + V_5(P_1) + V_6(P_1) = V_1(P_1) = dV(P_1). \end{aligned}$$

Für die Entfernungen eines Punktes $P = (x, y, z)$ des Körpers T_2 von den Punkten P_0 und P_1 hat man:

$$r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-b)^2};$$

$$r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \left(z - \frac{b}{2}\right)^2}.$$

Nun ist zunächst wegen der Bedeutung von a, b und der Bedingung $a < b$:

$$r_1 < \sqrt{4b^2 + \frac{9}{4}b^2} = \frac{5}{2}b,$$

und da $z - \frac{b}{2} \leqq 0$ ist,

$$r_0 = \sqrt{r_1^2 - b\left(z - \frac{b}{2}\right) + \frac{b^2}{4}} \geqq \sqrt{r_1^2 + \frac{b^2}{4}}, \qquad \frac{r_1}{r_0} \leqq \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + \frac{b^2}{4}}} < \frac{5}{\sqrt{26}},$$

da die Funktion $\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + \frac{b^2}{4}}}$ mit r_1 wächst. Daraus folgt weiter

---

[3]) Dies folgt unmittelbar aus dem auf S. 1125 (§ 2) angegebenen Satz der in der Fußnote [1]) genannten Arbeit.

$$V_2(P_0) < \frac{5}{\sqrt{26}} V_2(P_1) = \frac{5}{\sqrt{26}}(1-d)V(P_1),$$

$$V(P_0) = V_1(P_0) + V_2(P_0) < \left[d + \frac{5}{\sqrt{26}}(1-d)\right] V(P_1)$$

und schließlich wegen $d < \frac{1}{2}$

$$V(P_0) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{\sqrt{26}}\right) V(P_1) < V(P_1). \tag{2}$$

Daraus folgt, daß P_1 ein innerer Punkt von T ist. Wäre nämlich P_1 in der Begrenzung von T enthalten, so hätte man, da ja T eine Gleichgewichtsfigur ist,

$$V(P_0) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(x_0^2 + y_0^2) = V(P_1) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(x_0^2 + y_0^2),$$

also $V(P_0) = V(P_1)$, was der Ungleichheit (2) widerspricht.

Es bedeute jetzt H die Halbebene $x x_0 + y y_0 \geqq x_0^2 + y_0^2$, $z = \frac{b}{2}$, falls $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$; falls aber $x_0^2 + y_0^2 = 0$, so sei H die Halbebene $x \geqq 0$, $z = \frac{b}{2}$; H enthält sicher Punkte, die außerhalb T liegen, sowie den Punkt P_1, welcher innerhalb T liegt, daher auch Punkte der Begrenzung von T. Zwischen diesen Punkten gibt es mindestens einen $P_2 = \left(x_2, y_2, \frac{b}{2}\right)$, welcher die kleinstmögliche Entfernung von P_1 besitzt. Wir bezeichnen diese Entfernung mit ϱ. Bedeutet K den in H gelegenen Halbkreis mit P_1 als Mittelpunkt und ϱ als Radius, L den Halbzylinder, der durch K als Basis und durch die Ungleichung $-\frac{b}{2} \leqq z \leqq \frac{b}{2}$ gegeben ist, so ist L in T enthalten [4]), sein Volumen also nicht größer als dasjenige von T. Daher ist

$$\frac{1}{2}\pi\varrho^2 b \leqq 1, \qquad \varrho \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}}. \tag{3}$$

Da T eine Gleichgewichtsfigur ist und P_0, P_2 auf der Begrenzung von T liegen, so hat man

$$V(P_0) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(x_0^2 + y_0^2) = V(P_2) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(x_2^2 + y_2^2);$$

P_2 ist aber in H enthalten und von P_1 verschieden, daher $x_0^2 + y_0^2 < x_2^2 + y_2^2$ und

$$V(P_2) < V(P_0) < V(P_1). \tag{4}$$

Es sei P_3 der letzte Punkt der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ von P_1 aus gerechnet, in dem noch $V(P_3) \geqq V(P_1)$ ist; wegen der Stetigkeit von $V(P)$ existiert P_3 und es ist $V(P_3) = V(P_1)$. Ist ϱ_1 die Entfernung zwischen P_2 und P_3,

[4]) Vgl. loc. cit. [1]), S. 1125, § 2.

und bedeuten $X(P)$, $Y(P)$ bzw. die partiellen Ableitungen von $V(P)$ nach x und y, so hat man nach dem Mittelwertsatz für einen gewissen Punkt $P_4 = \left(x_4, y_4, \frac{b}{2}\right)$ der Strecke $\overline{P_3 P_2}$ die Ungleichung:

$$(5)\quad |V(P_2) - V(P_3)| = |V(P_2) - V(P_1)| \leqq \varrho_1 \sqrt{X^2(P_4) + Y^2(P_4)} < \varrho \sqrt{X^2(P_4) + Y^2(P_4)}.$$

Es möge α die numerische Konstante $4\sqrt{52}(\sqrt{26}+5)$ bedeuten.

Derjenige Teil von T, der außerhalb der Kugel

$$(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + \left(z - \frac{b}{2}\right)^2 = \alpha^2 \varrho^2$$

liegt, soll mit U_1, der innerhalb und auf der Begrenzung dieser Kugel liegende Teil von T mit U_2 bezeichnet werden. Dann ist

$$X(P_4) = -\int_T \frac{x_4 - x}{r^3}\,dx\,dy\,dz = -\int_{U_1} \frac{x_4 - x}{r^3}\,dx\,dy\,dz - \int_{U_2} \frac{x_4 - x}{r^3}\,dx\,dy\,dz$$

$$(6)\quad = X_1(P_4) + X_2(P_4),$$

$$|X_1(P_4)| \leqq \frac{1}{\alpha\varrho}\int_{U_1} \frac{dx\,dy\,dz}{r} < \frac{1}{\alpha\varrho}\int_T \frac{dx\,dy\,dz}{r} = \frac{1}{\alpha\varrho} V(P_4) < \frac{1}{\alpha\varrho} V(P_1).$$

Dagegen ist $|X_2(P_4)|$ offenbar nicht größer als der Wert der Anziehung, die im Punkte P_4 durch die Halbkugel $x - x_4 \geqq 0$,

$$(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + \left(z - \frac{b}{2}\right)^2 \leqq \alpha^2 \varrho^2$$

ausgeübt wird. Daher ist

$$(7)\quad |X_2(P_4)| \leqq \pi\alpha\varrho.$$

Wir setzen voraus, daß

$$(8)\quad b > 1 > \frac{\pi}{2},$$

also wegen (3) $\varrho \leqq 1$ ist; $V(P_1)$ ist nicht kleiner als das Potential des vorhin eingeführten Halbzylinders L im Punkte P_1, da ja T diesen Halbzylinder enthält. Also ist

$$(9)\quad V(P_1) \geqq \pi \int_0^b (\sqrt{z^2 + \varrho^2} - z)\,dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\left|z\sqrt{z^2 + \varrho^2} + \varrho^2 \log(z + \sqrt{z^2 + \varrho^2}) - z^2\right|_0^b$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\varrho^2 \log b + \varrho^2 \log\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{b^2}}\right) + (b\sqrt{b^2 + \varrho^2} - b^2) + (-\varrho^2 \log \varrho)\right].$$

Alle vier Summanden sind nicht negativ — auch der erste und letzte (vermöge (8)), daher folgt aus (9) und (7)

$$V(P_1) \geqq \frac{\pi}{2} \varrho^2 \log b, \tag{10}$$

$$|X_2(P_4)| \leqq \frac{2\alpha}{\varrho \log b} V(P_1), \tag{11}$$

$$|X(P_4)| \leqq \left(\frac{1}{\alpha\varrho} + \frac{2\alpha}{\varrho \log b}\right) V(P_1). \tag{12}$$

Dieselbe Abschätzung gilt auch für $|Y(P_4)|$. Daher hat man vermöge (2), (4), (5)

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\log b}\right) V(P_1) \geqq V(P_1) - V(P_2) > V(P_1) - V(P_0) > \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2\sqrt{26}}\right) V(P_1). \tag{13}$$

$$\frac{2\sqrt{2}\,\alpha}{\log b} > \frac{1}{4\sqrt{26}\,(\sqrt{26}+5)}, \qquad \log b < 1664\,(\sqrt{26}+5)^2 < 168050, \tag{14}$$

$$b < e^{168050}. \tag{15}$$

Dies ist bewiesen unter der Voraussetzung (8). Ist aber $b \leqq 1$, so gilt erst recht (15). Unser Satz ist also bewiesen und man kann der numerischen Konstante C in (1) den Wert e^{168050} beilegen. Offenbar ist diese Abschätzung sehr roh. Als Korollar folgt hieraus, daß die Crudelische Geschwindigkeitsschranke $\sqrt{\pi \varkappa f}$ für konvexe Gleichgewichtsfiguren zu hoch ist[5]).

[5]) Vgl. loc. cit. [1]) S. 1133–1135.

(Eingegangen am 7. Juli 1925.)

Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von Herrn Mazurkiewicz.

Von

E. Hölder in Leipzig.

Nimmt man als P_1 den Punkt (x_0, y_0, h), $h = qb$, $0 < q < 1$, trennt aber T_1 und T_2 nach wie vor mittels der Ebene durch P_1 senkrecht zur Achse und schneidet T_3 durch die Mittelebene zu P_0, P_1 ab, so findet man statt (13), falls $b > a$, $\frac{1}{2q}$ für beliebige $\alpha > 0$, $0 < q < 1$:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\log 2h}\alpha\right) \geqq \frac{1-\varphi(q)}{2}$$

mit

$$\varphi(q) = \sqrt{\frac{5+2q+q^2}{2(3+q^2)}}; \quad \text{für } 0 < q < 1: \ \sqrt{\frac{5}{6}} < \varphi < 1 \text{ monoton wachsend.}$$

Der Ausdruck links als Funktion von α besitzt den Minimalwert $\frac{4}{\sqrt{\log 2h}}$, also ist

$$\log b \leqq \frac{8^2}{[1-\varphi(q)]^2} - \log 2q = 2^{10}\cdot 3^2 \frac{\left(1+\frac{q^2}{3}\right)^2}{(1-q)^4}\left[\frac{1+\varphi(q)}{2}\right]^2 + \log\frac{1}{2q}$$

$$= M(q) + \log\frac{1}{2q}.$$

Herr Mazurkiewicz setzt einfach $q = \frac{1}{2}$ und findet $\log b \leqq M(\frac{1}{2}) < 168050$. Das Minimum der Schranke rechts (sicher $> M(0) - \log 2 > 8000$) liegt aber sehr nahe bei $q = 0$; für $q = 2^{-20}$ ist ihr Wert < 9000.

(Eingegangen am 10. Mai 1926.)

Autorenregister zu Band 1—25.

Alexandroff, P., Über die Äquivalenz des Perronschen und des Denjoyschen Integralbegriffes. **20,** S. 213—222.

Amirà, B., Sur un théorème de M. Wiman dans la théorie des fonctions entières. **22,** S. 206—221.

Ananda-Rau, K., The infinite product for $(s-1)\zeta(s)$. **20,** S. 156—164.

Apt, F., Die Tangentenlosigkeit der von Kochschen Kurve. **13,** S. 217—222.

Artin, E., Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. I. (Arithmetischer Teil.) **19,** S. 153—206.

— Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. II. (Analytischer Teil.) **19,** S. 207—246.

Bach, R., Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs. **9,** S. 110—135.

— Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. A. Das Feld in der Umgebung eines langsam rotierenden kugelähnlichen Körpers von beliebiger Masse in 1. und 2. Annäherung. **13,** S. 119—133.

— Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. B. Explizite Aufstellung statischer axialsymmetrischer Felder. Mit einem Zusatz über das statische Zweikörperproblem. Von **H. Weyl. 13,** S. 134—145.

Baldus, R., Über die Flächen, welche ein Strahlenbündel isogonal schneiden. **15,** S. 147—158.

Bauer, M., Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper. **14,** S. 244—249.

— Verschiedene Bemerkungen über die Differente und die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers. **16,** S. 1—12.

Bauer, M., Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt. **16,** S. 318—319.

— Über die Erweiterung des Körpers der p-adischen Zahlen zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper. **19,** S. 308 bis 312.

— Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper. II. **20,** S. 95 bis 97.

Beck, H., Der Fundamentalsatz der Lieschen Kugelgeometrie im Euklidischen Raum. **15,** S. 159—167.

Bell, E. T., Arithmetical equivalents for a remarkable identity between theta functions. **13,** S. 146—152.

— Umbral symmetric functions and algebraic analogues of the Bernoullian and Eulerian numbers and functions. **19,** S. 35—49.

Bergmann, St., Über die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators. **19,** S. 8 bis 25.

— Zur Theorie der ein- und mehrwertigen harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes. **24,** S. 641 bis 669.

Bernays, P., Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalkuls der „Principia Mathematica". **25,** S. 305—320.

Bernstein, F. und Doetsch, G., Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. I. Mitteilung. Eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. **22,** S. 285—292.

Bernstein, S., Sur les courbes de distribution des probabilités. **24,** S. 199—211.

Bernstein, S., Sur la nature analytique des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique. **25**, S. 505—513.

Berwald, L., Über affine Geometrie. XXVII. Liesche F_2, Affinnormale und mittlere Affinkrümmung. **8**, S. 63—78.

— Über affine Geometrie. XXX. Die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in der affinen Flächentheorie. **10**, S. 160—172.

— Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. **25**, S. 40—73.

— und **Frank, Ph.,** Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme. **21**, S. 154—159.

Besikowitsch, A., Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen. **21**, S. 111—118.

— und **Tamarkin, J.,** Über die asymptotischen Ausdrücke für die Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen, die von einem Parameter abhängen. **21**, S. 119—125.

Bieberbach, L., Über einen Osgoodschen Satz aus der Integralrechnung. **2**, S. 155—157.

— Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen. **2**, S. 158 bis 170.

— Zur Theorie der komplexen Zahlen. **2**, S. 171—179.

— Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung. **3**, S. 175—190.

— Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen. **4**, S. 295—305.

— Bemerkung zu meinem Beweis des Drehungssatzes für schlichte und konforme Abbildungen. (Erwiderung auf die Note des Herrn Koebe in der Math. Zeitschrift **6**, 1920, S. 311—313.) **9**, S. 161—162.

— Über die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. **22**, S. 34—40.

Bilz, E., Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs. **18**, S. 1—41.

Blaschke, W., Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises. **1**, S. 52—57.

Blaschke, W., Über affine Geometrie. XXVI: Wackelige Achtflache. **6**, S. 85 bis 93.

— Frenets Formeln für den Raum von Riemann. **6**, S. 94—99.

— Geometrische Untersuchungen zur Variationsrechnung. I. Über Symmetralen. **6**, S. 281—285.

— Über affine Geometrie. XXVIII: Bestimmung aller Flächen, die von den umschriebenen Zylindern längs ebener Kurven berührt werden. **8**, S. 115 bis 122.

— Über affine Geometrie. XXIX: Die Starrheit der Eiflächen. **9**, S. 142—146.

— Über affine Geometrie. XXXIII: Affinminimalflächen. **12**, S. 262—273.

— Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum. **15**, S. 309—320.

— Eine Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel. **21**, S. 209—210.

— Eine Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel. **24**, S. 191.

— Über die Geometrie von Laguerre. IV. Von den Nabelpunkten einer Eifläche. **24**, S. 617—621.

— Über die Geometrie von Laguerre. V. Kugelsysteme Ribaucours. **24**, S. 622 bis 639.

— Über die Geometrie von Laguerre. VII. Kugelsysteme Ribaucours und vierfache Orthogonalsysteme. **25**, S. 658 bis 660.

Blumenthal, O., Über trigonometrische Polynome mit einer Minimumseigenschaft. **1**, S. 285—302.

— Über eine neue Randwertaufgabe bei elastischen Membranen. **3**, S. 213—264.

Bôbr, St., Eine Verallgemeinerung des v. Kochschen Satzes über die absolute Konvergenz der unendlichen Determinanten. **10**, S. 1—11.

Bochner, S., Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen. **14**, S. 180 bis 207.

Bögel, K., Über partiell differenzierbare Funktionen. **25**, S. 490—498.

Bohr, H., Über streckentreue und konforme Abbildung. **1**, S. 403—420.

— Einige Sätze über Fourierreihen fastperiodischer Funktionen. **23**, S. 38—44.

Bompiani, E., Corrispondenza fra una superficie e le sue parallele. **24**, S. 311 bis 320.

Brandt, H., Bilineare Transformation quadratischer Formen. **17**, S. 153—160.
— Bilineare Transformation quadratischer Formen. **20**, S. 223—230.
Brauer, A., Über einige spezielle diophantische Gleichungen. **25**, S. 499 bis 504.
Brouwer, L. E. J., Zum natürlichen Dimensionsbegriff. **21**, S. 312—314.
Carathéodory, C., Über die Fourierschen Koeffizienten der nach Riemann integrierbaren Funktionen. **1**, S. 309—320.
Carleman, T., Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik. **1**, S. 208 bis 212.
— Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen. **3**, S. 1—7.
— Über eine nichtlineare Randwertaufgabe bei der Gleichung $\Delta u = 0$. **9**, S. 35—43.
— Zur Theorie der Minimalflächen. **9**, S. 154—160.
— Zur Theorie der linearen Integralgleichungen. **9**, S. 196—217.
— Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. **15**, S. 111—120.
Carlson, F., Ein Satz über Kegelschnitte mit einigen Anwendungen auf die perspektive Affinität. **8**, S. 138—154.
— Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. **9**, S. 1—13.
— Über ganzwertige Funktionen. **11**, S. 1—23.
Chwistek, L., Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik. **14**, S. 236 bis 243.
— Über die Hypothesen der Mengenlehre. **25**, S. 439—473.
Cohn, A., Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. **14**, S. 110—148.
van der Corput, J. G., Zahlentheoretische Abschätzungen nach der Piltzschen Methode. **10**, S. 105—120.
— Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme. **17**, S. 250—259.
Courant, R., Beweis des Satzes, daß von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt. **1**, S. 321—328.
Courant, R., Über konforme Abbildung von Bereichen, welche nicht durch alle Rückkehrschnitte zerstückelt werden, auf schlichte Normalbereiche. **3**, S. 114 bis 122.
— Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. **7**, S. 1—57.
— Über die Schwingungen eingespannter Platten. **15**, S. 195—200.
Cramér, H., Über die Nullstellen der Zetafunktion. **2**, S. 237—241.
— Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. **4**, S. 104—130.
— Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn E. Landau. **6**, S. 155—157.
— Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie. **12**, S. 147—153.
— Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy. **15**, S. 201—210.
Doetsch, G., Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden. **8**, S. 237—240.
— Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen. **11**, S. 161—179.
— und **Bernstein, F.,** Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. I. Mitteilung. Eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. **22**, S. 285 bis 292.
— Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. II. Mitteilung. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. Die allgemeinste Lösung und die Frage der Eindeutigkeit. **22**, S. 293—306.
— Bemerkung zu der Arbeit von V. Fock: Über eine Klasse von Integralgleichungen. (Math. Zeitschr. **21**, S. 161 bis 173. 1924.) **24**, S. 785—788.
— Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. III. Mitteilung. Der lineare Wärmeleiter mit beliebiger Anfangstemperatur. Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes. **25**, S. 608—626.
Dörge, K., Ein Beitrag zur Theorie der diophantischen Gleichungen mit zwei Unbekannten. **24**, S. 193—198.
Enskog, D., Eine allgemeine Methode zur Auflösung von linearen Integralgleichungen. **24**, S. 670—683.

Enskog, D., Zur Begründung der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen. **25**, S. 299—304.

Epstein, P., Über Möbiuskettenbrüche und Elementarkettenbrüche. **2**, S. 412—432.

Falckenberg, H., Ableitung der „Ergänzungsrelationen" aus den Formeln von Simon L'Huilier. **10**, S. 17—38.

— Verallgemeinerung der Gauß-Studyschen Untersuchungen über Dreiflache (Kreisbogendreiecke) auf Vierflache. **23**, S. 210—223.

Feigl, G., Über das archimedische Axiom. **25**, S. 590—601.

Fejér, L., Über die Eindeutigkeit der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. **1**, S. 70 bis 79.

— Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel. **24**, S. 267—284.

— Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome. **24**, S. 285 bis 298.

— und **Riesz, F.**, Über einige funktionentheoretische Ungleichungen. **11**, S. 305 bis 314.

Fekete, M., Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. **17**, S. 228—249.

— Über Gebiete, in denen komplexe Polynome jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen. **22**, S. 1—7.

Finsler, P., Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. **25**, S. 676—682.

— Über die Grundlegung der Mengenlehre. Erster Teil. Die Mengen und ihre Axiome. **25**, S. 683—713.

Fischer, E., Modulsysteme und Differentialgleichungen. **18**, S. 230—277.

Fock, V., Über eine Klasse von Integralgleichungen. **21**, S. 161—173.

Fraenkel, A., Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen. I. **18**, S. 153—188.

— Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. **22**, S. 250—273.

Franck, P., Über affine Geometrie. XXXII. Die Asymptotenebenen eines Flächenpunktes und seine Liesche V_3. **11**, S. 289—304.

Frank, Ph., Ein Satz über ebene Potentialströmungen. **11**, S. 105—107.

Frank, Ph., und **Berwald, L.**, Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme. **21**, S. 154—159.

— und **Löwner, K.**, Eine Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik. **3**, S. 78 bis 86.

Friedmann, A., und **Schouten, J. A.**, Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen. **21**, S. 211—223.

Fujiwara, M., Über die algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln in einem Kreise oder in einer Halbebene liegen. **24**, S. 161—169.

Funk, P., Über den Begriff „extremale Krümmung" und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse. **3**, S. 37—92.

— Über Flächen mit einem festen Abstand der konjugierten Punkte. **16**, S. 159—162.

Furtwängler, Ph., Über die linearen Mannigfaltigkeiten auf Hyperflächen zweiter Ordnung. **24**, S. 396—400.

Gaßmann, Fr., Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers. **25**, S. 661—675.

Geiringer, H., Über eine Randwertaufgabe der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. **12**, S. 1—17.
Vgl. auch Pollaczek-Geiringer, H.

Geppert, H., Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach funktionentheoretischen Methoden. **20**, S. 29—94.

Grammel, R., Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen. **6**, S. 124 bis 142.

Grandjot, K., Über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung. **19**, S. 128 bis 129.

Groß, W., Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen. **2**, S. 242—294.

— Zum Verhalten der konformen Abbildung am Rande. **3**, S. 43—64.

Günther, N. M., Über ein Hauptproblem der Hydrodynamik. **24**, S. 448—499.

Haalmeijer, B. P., Über lineare homogene Punktmengen. **16**, S. 92—102.

Hahn, H., Über das Interpolationsproblem. **1**, S. 115—142.

— Über Funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind. **4**, S. 306—313

Hahn, H., Über die stetigen Kurven der Ebene. **9**, S. 66—73.

Hamburger, H., Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche. **4**, S. 186—222.

— Über eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen. **6**, S. 1—10.

— Bemerkungen zu einer Fragestellung des Herrn Pólya. **7**, S. 302—322.

— Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. (I. Mitteilung.) **10**, S. 240—254.

— Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. (II. Mitteilung.) **11**, S. 224—245.

— Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. (III. Mitteilung.) Die Funktionalgleichung der L-Reihen. **13**, S. 283—311.

— Über Kurvennetze mit isolierten Singularitäten auf geschlossenen Flächen. **19**, S. 50—66.

Hamel, G., Über das infinitäre Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn die charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat. **1**, S. 220—228.

Happel, H., Über das Gleichgewicht von elastischen Platten unter einer Einzellast. **6**, S. 203—218.

— Über das Gleichgewicht von elliptischen Platten. **11**, S. 194—223.

Hardy, G. H., Note on a Theorem of Hilbert. **6**, S. 314—317.

— and **Littlewood, J. E.,** Some problems of „Partitio numerorum": II. Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates. **9**, S. 14 bis 27.

— The zeros of Riemann's Zeta-Function on the critical line. **10**, S. 283—317.

— Some problems of 'Partitio Numerorum': IV. The singular series in Waring's Problem and the value of the number $G(k)$. **12**, S. 161—188.

— Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series. **19**, S. 67—96.

— Some problems of 'Partitio Numerorum' (VI): Further researches in Waring's Problem. **23**, S. 1—37.

Hartogs, F., Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. **22**, S. 62—74.

Hasse, H., Ein weiteres Existenztheorem in der Theorie der algebraischen Zahlkörper. **24**, S. 149—160.

Haupt, O., Ein Satz über die Abelschen Integrale 1. Gattung. **6**, S. 219—237.

— Über Kurven endlicher Ordnung. **19**, S. 284—299.

— Über zerlegbare Kurven. **22**, S. 8—15.

— und **Hilb, E.,** Über Liouvillesche Mannigfaltigkeiten. **24**, S. 105—124.

Hausdorff, F., Der Wertvorrat einer Bilinearform. **3**, S. 314—316.

— Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen. **4**, S. 98—103.

— Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung. **5**, S. 292—309.

— Summationsmethoden und Momentfolgen. I. **9**, S. 74—109.

— Summationsmethoden und Momentfolgen. II. **9**, S. 280—299.

— Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen. **16**, S. 163 bis 169.

— Momentprobleme für ein endliches Intervall. **16**, S. 220—248.

Hecke, E., Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. **1**, S. 357—376.

— Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. (2. Mitteilung). **6**, S. 11 bis 51.

— Über die Integralgleichung der kinetischen Gastheorie. **12**, S. 274—286.

— Über die Lösungen der Riemannschen Funktionalgleichung. **16**, S. 301—307.

Hensel, K., Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen. **2**, S. 433—452.

— Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen. **5**, S. 118—131.

Herglotz, P., Über einen Dirichletschen Satz. **12**, S. 255—261.

— Über die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen innerhalb und auf dem Einheitskreis. **19**, S. 26—34.

Heuman, C., Ein Satz über Culmannsche Trägheitsellipsen. **8**, S. 155—158.

Hilb, E., Zur Theorie der Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen. **1**, S. 58—69.

— Über die Laplacesche Reihe. **5**, S. 17 bis 25.

— Über die Laplacesche Reihe. (II. Teil.) **8**, S. 79—90.

Hilb, E., Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. (1. Mitteilung.) **14**, S. 211—229.
— Die komplexen Nullstellen der Besselschen Funktionen. **15**. S. 274—279.
— Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. (2. Mitteilung.) **15**, S. 280 bis 285.
— Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. (3. Mitteilung.) **19**, S. 136 bis 144.
— und **Haupt, O.,** Über Liouvillesche Mannigfaltigkeit. **24**, S. 105—124.
Hoheisel, G., Lineare funktionale Differentialgleichungen. (1. Mitteilung.) **14**, S. 35—98.
Hölder, E., Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Oberflächenspannung. **25**, S. 188—208.
— Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von Herrn Mazurkiewicz. **25**, S. 754.
Hölder, O., Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und seine Invarianteneigenschaft. **20**, S. 7—20.
— Berichtigung zu der Abhandlung: Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Bd. **20**, S. 7—20; **21**, S. 160.
Horn, J., Zur Theorie der nichtlinearen Differenzengleichungen. **1**, S. 80—114.
— Singuläre Systeme linearer Volterrascher Integralgleichungen. **8**, S. 265 bis 313.
— Laplacesche Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterraschen Integralgleichungen. **8**, S. 100—114.
— Zur Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen. **18**, S. 263—282.
— Laplacesche Integrale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. **21**, S. 85—95.
Hurewicz, W., Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems. **24**, S. 401—421.
Hurwitz, A., Der Euklidische Divisionssatz in einem endlichen algebraischen Zahlkörper. **3**, S. 123—126.
Ikeda, Y., Eine Integrationsmethode der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. **22**, S. 16—25.
Jacobsthal, E., Mittelwertbildung und Reihentransformation. **6**, S. 100—117.
Jänichen, W., Über einen zahlentheoretischen Satz von Hurwitz. **17**, S. 277—292.
Jarnik, V., Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven. **24**, S. 500—518.
— Über bedingt konvergente Reihen. **24**, S. 715—732.
Jolles, St., Die Ermittlung hyperbolischer und elliptischer linearer Strahlenkongruenzen aus zwei Paar reziproker Polaren für eine Fläche II. Ordnung. **1**, S. 25—26.
— Eine besondere metrische Konstruktion des linearen Strahlenkomplexes. **1**, S. 303—308.
— Der rotatorische elliptische Komplexbüschel und die neue Konstruktion des linearen Strahlenkomplexes. **2**, S. 316 bis 317.
— Der Büschel kubischer Raumkurven und seine autokonjugierte Kurve. **2**, S. 318—325.
— Die für die Korrelation eines polaren Raumes invarianten linearen Komplexe und die aus ihnen gebildeten zwei Γ-Bündel. **3**, S. 209—212.
— Eine neue Polarentheorie der Raumkurven dritten Grades. **5**, S. 169—185.
— Einfache Kennzeichen polarer Korrelationen. **8**, S. 91—95.
— Allgemeine Kollineationen und ihre Umkehrungen. **9**, S. 271—279.
— Partiell inverse und partiell involutorische Kollineationen und die Inzidenzen in zwei kollokalen korrelativen Feldern. **11**, S. 180—193.
— Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen. **18**, S. 223—262.
— Die Bestimmung der Inzidenzen in zwei korrelativen Räumen vermöge der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz. **16**, S. 13—42.
Jung, E. W. H., Über die Differentialinvarianten algebraischer Flächen. **8** S. 182—221.
— Kurven auf algebraischen Flächen. **18**, S. 189—201.
— Ebene Schnitte und Berührungskegel einer algebraischen Fläche. **13**, S. 202 bis 216.
— Über die Rückkehr-, Wende- und Flachkurve einer algebraischen Fläche. **14**, S. 1—34.

Kaczmarz, St., Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen. **23**, S. 263—270.

Kähler, E., Transformation der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems. **24**, S. 743—758.

Kamke, E., Über die Zerfällung rationaler Zahlen in rationale Polynomwerte. **12**, S. 323—328.

— Bemerkung zum allgemeinen Waringschen Problem. **15**, S. 188—194.

— Zur Arithmetik der Polynome. **19**, S. 247—264.

von Kerékjártó, B., Zur Theorie der mehrdeutigen stetigen Abbildungen. **8**, S. 310—319.

Khintchine, A., Über dyadische Brüche. **18**, S. 109—116.

— Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen. **18**, S. 289 bis 306.

— Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron. **22**, S. 274—284.

— Bemerkung zu meiner Abhandlung „Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen". **22**, S. 316.

— Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. **24**, S. 706 bis 714.

Kirmse, S., Zur Darstellung total positiver Zahlen als Summen von vier Quadraten. **21**, S. 195—202.

Kloostermann, H. D., Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden. **24**, S. 519—529.

Kneser, A., Kleinste Wirkung und Galileische Relativität. **2**, S. 326—349.

Kneser, H., Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen. **25**, S. 362—372.

Knopp, K., Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen. **2**, S. 1—26.

— Mittelwertbildung und Reihentransformation. **6**, S. 118—123.

— Über das Eulersche Summierungsverfahren. **15**, S. 226—253.

— Über das Eulersche Summierungsverfahren. (II. Mitteilung). **18**, S. 125 bis 156.

— Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit. **19**, S. 97—113.

— Mehrfach monotone Zahlenfolgen. **22**, S. 75—85.

Knopp, K., Über eine paradoxe Eigenschaft gewisser bedingt konvergenter unendlicher Reihen. **23**, S. 254—262.

— und **Schmidt, R.,** Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen. **25**, S. 373—381.

— und **Schur, J.,** Elementarer Beweis einiger asymptotischer Formeln der additiven Zahlentheorie. **24**, S. 559—574.

Koebe, P., Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. V. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche (Fortsetzung). **2**, S. 198—236.

— Über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie. **6**, S. 52—84.

— Zum Verzerrungssatze der konformen Abbildung. **6**, S. 311—313.

— Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. VI. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven (Iterationsmethoden). **7**, S. 235—301.

— Fundamentalabbildung und Potentialbestimmung gegebener Riemannscher Flächen. **12**, S. 248—254.

Kogbetliantz, E., Über die $(C\delta)$-Summierbarkeit der Laplaceschen Reihe für $\frac{1}{2} < \delta < 1$. **14**, S. 99—109.

Kommerell, K., Klassifikation der Raumkorrelationen. **10**, S. 217—230.

König, D., Über konvexe Körper. **14**, S. 208—210.

König, R., Die Elementartheoreme bei den Riemannschen Transzendenten. **15**, S. 26—65.

Kornblum, H., Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progression. **5**, S. 100—111.

Koschmieder, L., Über besondere Jacobische Polynome. **8**, S. 123—137.

— Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale. **24**, S. 181—190.

— Invarianten bei der Variation der Integrale, deren Integranden höhere Ableitungen enthalten. **25**, S. 74—86.

Kowalewski, G., Integrationslose Berechnung invarianter Bogen- und Flächenelemente ebener Transformationsgruppen. **18**, S. 307—311.

Kowalewski, G., Über die neuen Methoden zur Berechnung von Differentialinvarianten. **21**, S. 39—44.
— Die Identitätsbedingungen der natürlichen Geometrie. **23**, S. 246—253.
Krull, W., Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen. **23**, S. 161—196.
Krzenziessa, R., Thermoelastische Randwertaufgaben. **25**, S. 209—260.
Kubota, T., Eine Ungleichheit für die Eilinien. **20**, S. 264—266.
Kürschák, J., Ein Irreduzibilitätssatz in der Theorie der symmetrischen Matrizen. **9**, S. 191—195.
Lachmann, K., Über den Konvergenzbeweis des Verfahrens der schrittweisen Verbesserung bei einem Randwertproblem. **25**, S. 405—438.
Lagally, M., Über die Zerlegbarkeit von flächentreu aufeinander abgebildeten Gebieten in unendlich kleine, paarweise kongruente Teile. **6**, S. 143—150.
— Über ein Verfahren zur Transformation ebener Wirbelprobleme. **10**, S. 231 bis 239.
— Die isometrische Verbiegung einer Fläche durch schrittweise Näherung. **18**, S. 312—323.
Landau, E., Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie. **1**, S. 1—24.
— Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie. (2. Abhandlung.) **1**, S. 213—219.
— Über Ideale und Primideale in Idealklassen. **2**, S. 52—154.
— Ein Satz über Riemannsche Integrale. **2**, S. 350—351.
— Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen. **4**, S. 152—162.
— Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carleman: Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion. **5**, S. 147 bis 153.
— Über die Gitterpunkte in einem Kreise. **5**, S. 319—320.
— Über die Nullstellen der Zetafunktion. **6**, S. 151—154.
— Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen. **10**, S. 128—129.
— Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen. **11**, S. 317—318.
— Zum Waringschen Problem. **12**, S. 219 bis 247.
Landau, E., Über die Wurzeln der Zetafunktion. **20**, S. 98—104.
— Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen. **20**, S. 105—125.
— Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. **21**, S. 126—132.
— Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Walfisz: Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern. **22**, S. 189—205.
— Nachtrag zu meinen Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Walfisz: „Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern." [Bd. **22**, S. 189 bis 205. 1925.] **24**, S. 192.
— Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. (2. Abhandlung.) **24**, S. 299—310.
Lavrentieff, M., Sur une équation différentielle du premier ordre. **23**, S. 197 bis 209.
Lecat, M., Sur les déterminants cayléens et bicayléens anormaux. **15**, S. 291 bis 308.
— Quelques propriétés des déterminants supérieurs, orthosymétriques, circulants et cycliques. **25**, S. 121—131.
Lense, J., Über eine Integralgleichung in der Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren. **16**, S. 296—300.
Levi, Fr., Streckenkomplexe auf Flächen. **16**, S. 148—158.
— Streckenkomplexe auf Flächen. (Zweite Mitteilung.) **22**, S. 45—61.
Lichtenstein, L., Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze. **1**, S. 229—284.
— Über eine isoperimetrische Aufgabe der mathematischen Physik. **3**, S. 8—10.
— Zur Analysis der unendlich vielen Variablen. Zweite Abhandlung. **3**, S. 127 bis 160.
— Bemerkung zu der Abhandlung: „Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen." **3**, S. 172—174.
— Untersuchungen über zweidimensionale Variationsprobleme. Zweite Abhandlung. Das einfachste Problem bei fester und bei freier Begrenzung. **5**, S. 26—51.

Lichtenstein, L., Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen. **7**, S. 126—231.
— Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes. **10**, S. 130—159.
— Über eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion. **11**, S. 319—320.
— Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Zweite Abhandlung. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. **12**, S. 201—218.
— Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Dritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper. **13**, S. 82—118.
— Untersuchungen über die Figur der Himmelskörper. Vierte Abhandlung. Zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. **17**, S. 62—110.
— Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie. **20**, S. 21—28.
— Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. **20**, S. 194—212.
— Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. I. **23**, S. 72—88.
— Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze. **23**, S. 89—154.
— Ergänzungen zu der Abhandlung: „Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze." **23**, S. 310—316.
— Berichtigung. **24**, S. 640.
Liebmann, H., Das Frobeniussche Kappendreieck und die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises. **4**, S. 288—294.
— Die Verbiegung analytischer Eiflächen. **5**, S. 132—136.
— Zwei charakteristische Eigenschaften der Flächen konstanten Krümmungsmaßes. **13**, S. 10—17.
— Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze. (Orthogonalprojektionen von Haupttangentenkurven.) **14**, S. 159 bis 168.
Liebmann, H., Bemerkung zu der Arbeit: Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze, diese Zeitschrift **14**, S. 160 bis 168. **16**, S. 320.
— Hilberts Beweise der Sätze über Flächen festen Gaußschen Krümmungsmaßes. **22**, S. 26—33.
Lindeberg, J. W., Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. **15**, S. 211 bis 225.
Littlewood, J. E. and **Hardy, G. H.,** Some problems of „Partitio numerorum": II. Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates. **9**, S. 14—27.
— The zeros of Riemann's Zeta-Function on the critical line. **10**, S. 283—317.
— Some problems of 'Partitio Numerorum': IV. The singular series in Waring's Problem and the value of the number $G(k)$. **12**, S. 161—188.
— Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series. **19**, S. 67—96.
— Some problems of 'Partitio Numerorum' VI: Further researches in Waring's Problem. **23**, S. 1—37.
Loewy, A., Begleitmatrizen und lineare homogene Differentialausdrücke. **7**, S. 58—125.
— Über algebraische Gleichungen mit reellen Wurzeln und den sog. casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen. **11**, S. 108—114.
— Über die Reduktion algebraischer Gleichungen durch Adjunktion insbesondere reeller Radikale. **15**, S. 261—273.
Löwner, K., Über Extremumsätze bei der komformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises. **3**, S. 65—77.
— und **Frank, Ph.,** Eine Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik. **3**, S. 78 bis 86
Lukács, F., Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome. **2**, S. 295—305.
— Über die Laplacesche Reihe. **14**, S. 250 bis 262.
Mammana, G., Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari. **25**, S. 734—748.

Mathematisch-physische Preisaufgaben der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. **6**, S. 319—320.

Mathematische Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. **18**, S. 312.

Mathias, M., Über positive Fourier-Integrale. **16**, S. 103—125.

Mazurkiewicz, St., Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten. **25**, S. 749—753.

Meyer, W. Fr., Über die Möbiussche Figur zweier einander ein- und umbeschriebener Tetraeder, und die Figur einer einem Tetraeder umbeschriebenen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung. **2**, S. 453—474.

— Zu der Abhandlung von Herrn Roland Weitzenböck: „Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie". **8**, S. 96—99.

— Über die Darstellung und Zusammensetzung nichteuklidischer Raumbewegungen. **16**, S. 126—147.

v. Mises, R., Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. **4**, S. 1—97.

— Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. **5**, S. 52—99.

— Berichtigung zu meiner Arbeit „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung". **7**, S. 323.

Mittelsten Scheid, Fr., Die Zerlegung irreduzibler integrabler Gruppen hyperkomplexer Größen in unzerlegbare Faktoren. **14**, S. 263—328.

Mohrmann, H., Über eine besondere Klasse von Linienkomplexen. **2**, S. 27 bis 51.

— Über die Wendepunktstangenten der Raumkurve vierter Ordnung erster Art. **5**, S. 268—283.

Moore, R. L., Concerning Continuous Curves in the Plane. **15**, S. 254—260.

— Concerning the prime parts of a continuum. **22**, S. 307—315.

Müller, W., Zur Geometrie des binaren Formennetzes fünfter Ordnung. **24**, S. 131—148.

Müntz, Ch. H., Die Ähnlichkeitsbewegungen beim allgemeinen n-Körperproblem. **15**, S. 169—187.

— Umkehrung bestimmter Integrale und absolute Approximation. **21**, S. 96 bis 110.

— Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide. **25**, S. 150—165.

Myrberg, P. J., Über die automorphen Funktionen bei einer Klasse Jonquièresscher Gruppen zweier Veränderlichen. **21**, S. 224—253.

Nagell, Tr., Über einige kubische Gleichungen mit zwei Unbestimmten. **24**, S. 422—447.

Neder, L., Konvergenzdefekte der Potenzreihen stetiger Funktionen auf dem Rande des Konvergenzkreises. **6**, S. 262 bis 269.

— Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung. **6**, S. 270—273.

— Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe. **11**, S. 115 bis 123.

— Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen beschränkter Funktionen. **14**, S. 149—158.

— Über Gebiete gleichmäßiger Konvergenz Dirichletscher Reihen. **15**, S. 286 bis 290.

— Über das Wachstum analytischer Funktionen in Halbstreifen und ähnlichen Gebieten. **17**, S. 130—143.

— Über Funktionen von reellen Argumenten. (Erste Mitteilung). **24**, S. 759 bis 784.

Neumann, E. R., Der Poincarésche Satz über Differenzengleichungen in seiner Anwendung auf eine Integralgleichung. **6**, S. 238—261.

Nevanlinna, F. und **R.,** Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. **20**, S. 253—263.

— Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. **23**, S. 159—160.

Nevanlinna, R., Kriterien für die Randwerte beschränkter Funktionen. **13**, S. 1—9.

Noether, E. und **Schmeidler, W.,** Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken. **8**, S. 1—35.

Okada, Y., Über die Annäherung analytischer Funktionen. **23**, S. 62—71.

Ore, Ö., Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien. **18**, S. 278—288.

— Algebraische Gleichungen mit primitiven Gruppen. **19**, S. 276—283.

— Zur Theorie der Eisensteinschen Gleichungen. **20**, S. 267—279.

— Bemerkungen zur Theorie der Differente. **25**, S. 1—8.

Ore, Ö., Existenzbeweise für algebraische Körper mit vorgeschriebenen Eigenschaften. **25**, S. 474—489.

Ostrowski, A., Über ein Analogon der Wronskischen Determinante bei Funktionen mehrerer Veränderlicher. **4**, S. 223—230.

— Beweis der Irreduzibilität der Diskriminante einer algebraischen Form von mehreren Variablen. **4**, S. 314—319.

— Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen. **8**, S. 241—298.

— Bemerkung zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems. **9**, S. 28—34.

— Notiz über einen Satz der Galoisschen Theorie. **12**, S. 317—322.

— Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes. **24**, S. 215—258.

— und **Schur, I.**, Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form. **15**, S. 81—105.

Pasch, M., Der Ursprung des Zahlbegriffs. **11**, S. 124—156.

— Betrachtungen zur Begründung der Mathematik. **20**, S. 231—240.

— Die natürliche Geometrie. **21**, S. 151 bis 153.

— Betrachtungen zur Begründung der Mathematik. (Zweite Abhandlung.) **25**, S. 166—171.

Paulus, Fr., Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung als Ausgangspunkt für die Umkehrung des Variationsproblems und ihre damit zusammenhängende Bedeutung für die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. **25**, S. 348—361.

Perron, O., Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei großen Werten der unabhängig Variablen. **1**, S. 27—43.

— Über einen Satz des Herrn Helge von Koch über die Integrale linearer Differentialgleichungen. **3**, S. 161—171.

— Über eine spezielle Klasse von Regelflächen. **4**, S. 231—270.

— Ein neuer Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. **5**, S. 154—160.

Perron, O., Zur Theorie der divergenten Reihen, **6**, S. 158—160.

— Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen. **6**, S. 161—166.

— Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. **6**, S. 286—310.

— Bemerkung zu der Arbeit „Über eine spezielle Klasse von Regelflächen." **6**, S. 318.

— Zur Theorie der Summengleichungen. **8**, S. 159—170.

— Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. **15**, S. 121—146.

— Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Zweiter Teil. **16**, S. 273—295.

— Über einen Grenzwertsatz. **17**, S. 149 bis 152.

— Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. **18**, S. 42—54.

— Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation. **18**, S. 157 bis 172.

— Beweis eines Satzes von Bézout. **21**, S. 315—316.

— Über geodätische rhombische Netze auf krummen Flächen. **24**, S. 170—180.

— Nachtrag zu meiner Arbeit: Über geodätische rhombische Netze auf krummen Flächen. **24**, S. 792.

Zwei **philosophische** Preisaufgaben. **9**, S. 326.

Pick, G., Über positive harmonische Funktionen. **1**, S. 44—51.

von Pidoll, M., Bemerkungen über Vertauschung von Limes und Integral. **8**, S. 299—302.

Pollaczek, F., Über die irregulären Kreiskörper der l-ten und l^2-ten Einheitswurzeln. **21**, S. 1—38.

Pollaczek-Geiringer, H., Beitrag zu den Fundamentalsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. **24**, S. 684—705.
Vgl. auch Geiringer, H.

Pólya, G., Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome. **1**, S. 143—148.

— Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen. **2**, S. 352—383.

— Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem. **8**, S. 171—181.

Pólya, G., Über die Nullstellen sukzessiver Derivierten. **12**, S. 36—60.
— Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung. **18**, S. 96—108.
Popoff, K., Über einige Entwicklungen nach einem System gegebener Funktionen. **19**, S. 1—7.
Pöschl, Th., Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Außenraum der Ellipse. **11**, S. 89—96.
Preisausschreibung. 19, S. 151.
Prüfer, H., Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen. **17**, S. 35—61.
— Theorie der Abelschen Gruppen. I. Grundeigenschaften. **20**, S. 165—187.
— Theorie der Abelschen Gruppen. II. Ideale Gruppen. **22**, S. 222—249.
Rademacher, H., Zu dem Borelschen Satz über die asymptotische Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen. **2**, S. 306 bis 311.
— Nachträgliche Bemerkung. **3**, S. 317.
— Über streckentreue und winkeltreue Abbildung. **4**, S. 131—138.
— Bemerkungen zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und zum Moreraschen Satz. **4**, S. 177—185.
— Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenzerzeugender Faktoren. **11**, S. 276—288.
— Über eine funktionale Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper. **13**, S. 18—27.
— Über eine Erweiterung des Goldbachschen Problems. **25**, S. 627—657.
Radó, T., Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. **20**, S. 1 bis 6.
— Über den analytischen Charakter der Minimalflächen. **24**, S. 321—327.
— und **Riesz, F.,** Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. **22**, S. 41—44.
— Das Hilbertsche Theorem über den analytischen Charakter der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. **25**, S. 514—589.
Rajchman, A. et Zygmund, A., Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson. **25**, S. 261—273.
Ramanujan, S., Congruence properties of partitions. **9**, S. 147—153.
Reidemeister, K., Über Körper konstanten Durchmessers. **10**, S. 214—216.
— Über affine Geometrie. XXXI: Beständig elliptisch oder hyperbolisch gekrümmte Eilinien. **10**, S. 318—320.
Rella, T., Die Zerlegungsgesetze für die Primideale eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers im Körper der l-ten Einheitswurzeln. **5**, S. 11—16.
Remak, R., Über die Zerlegung der kommutativen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. **10**, S. 12—16.
— Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes. (Erster Teil.) **17**, S. 1—34.
— Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes. (Zweiter Teil.) **18**, S. 173 bis 200.
— Über potentialkonvexe Funktionen. **20**, S. 126—130.
Reye, Th., Axial symmetrische kubische Raumkurven. **5**, S. 161—168.
Riesz, F., Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung. **2**, S. 312—315.
— und **Fejer, L.,** Über einige funktionentheoretische Ungleichungen. **11**, S. 305 bis 314.
— Über die Randwerte einer analytischen Funktion. **18**, S. 87—95.
— Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel. **18**, S. 117—124.
— Berichtigung. **19**, S. 152.
— und **Radó, T.,** über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. **22**, S. 41 bis 44.
Rogosinski, W., Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten. **17**, S. 260—276.
— Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. **20**, S. 280—320.
— Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen. (1. Mitteilung.) **25**, S. 132—149.
Rosenthal, A., Über Peanoflächen und ihren Rand. **10**, S. 102—104.
Rothe, R., Zum Mittelwertssatze der Differentialrechnung. **9**, S. 300—325.
Salkowski, E., Orthogonale Kurvensysteme in der Ebene und auf der Kugel. **9**, S. 136—141.
— Über den gemischten Flächeninhalt zweier ebenen Figuren. **14**, S. 230 bis 235.
— Über affine Geometrie: Zur Theorie der Affingesimsflächen. **17**, S. 144—148.

Salkowski, E., Zur Theorie der Voßschen und der Guichardschen Flächen. **20,** S. 241—252.

Saxer, W., Über die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten. **17,** S. 206—227.

Scheffers, G., Flächentreue Abbildungen in der Ebene. **2,** S. 180—186.

— Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{konst.}$ **5,** S. 112—117.

— Ebene Berührungskurven zweier Rotationsflächen. **11,** S. 315—316.

— Flächen mit geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen. **16,** S. 43 bis 77.

Scherrer, W., Über ungeschlossene stetige Kurven. **24,** S. 125—130.

Schlechter, E., Untersuchungen über die Konvergenz der limitär-periodischen Jacobi-Ketten beliebiger Ordnung. **16,** S. 173—206.

Schmeidler, W., Über Moduln und Gruppen hyperkomplexer Größen. **3,** S. 29 bis 42.

— Über die Zerlegung der Gruppe der Restklassen eines endlichen Moduls. **5,** S. 222—267.

— Bemerkungen zur Theorie der abzählbaren Abelschen Gruppen. **6,** S. 274 bis 280.

— und **Noether, E.,** Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrükken. **8,** S. 1—35.

Schmidt, E., Über die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung. **12,** S. 298—316.

Schmidt, R., Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. **22,** S. 89—152.

— und **Knopp, K.,** Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen. **25,** S. 373—381.

Schouten, J. A., Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung. **11,** S. 58 bis 88.

— Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können. **13,** S. 56—81.

Schouten, J. A., Nachtrag zur Arbeit über die verschiedenen Arten der Übertragung. (Math. Zeitschr. **13,** S. 56—81. 1922.) **15,** S. 168.

— Über die Bianchische Identität für symmetrische Übertragungen. **17,** S. 111—115.

— Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen. I. **17,** S. 161—182.

— Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen. II. **17,** S. 183—188.

— und **Friedmann, A.,** Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen. **21,** S. 211—223.

Schur, A., Über diejenigen Strahlensysteme, deren Brennflächen durch die Systemstrahlen isometrisch aufeinander bezogen werden. **19,** S. 114—127.

— Über Lichtgrenztangentensysteme und mit ihnen zusammenhängende Flächentransformationen. **24,** S. 530—558.

Schur, F., Über die Erzeugung der Flächen 2. Grades durch korrelative Bündel. **22,** S. 86—88.

Schur, I., Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen. **1,** S. 184—207.

— Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. **1,** S. 377 bis 402.

— Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervall. **4,** S. 271—287.

— Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn A. Speiser. **5,** S. 7—10.

— Über einen von Herrn L. Lichtenstein benutzten Integralsatz. **7,** S. 232—234.

— Zur Arithmetik der Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. **12,** S. 95 bis 113.

— Ein Beitrag zur Hilbertschen Theorie der vollstetigen quadratischen Formen. **12,** S. 287—297.

— und **Ostrowski, A.,** Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form. **15,** S. 81—105.

— und **Knopp, K.,** Elementarer Beweis einiger asymptotischer Formeln der additiven Zahlentheorie. **24,** S. 559—574.

Schwan, W., Streckenrechnung und Gruppentheorie. **3,** S. 11—28.

Schwartz, E., Über binäre trilineare Formen. **12**, S. 18—35.
Sengenhorst, P., Über Körper der Charakteristik p. **24**, S. 1—39.
Siegel, C., Approximation algebraischer Zahlen. **10**, S. 173—213.
— Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate. **11**, S. 246—275.
Speiser, A., Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie. **5**, S. 1—6.
Steinhaus, H., Additive und stetige Funktionaloperationen. **5**, S. 186—221.
— Bemerkung zu der Arbeit des Herrn L. Neder: Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung. **8**, S. 320—322.
Steinitz, E., Über die Maximalzahl der Doppelpunkte bei ebenen Polygonen von gerader Seitenzahl. **17**, S. 116 bis 129.
Stenzel, H., Über die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen, als Produkt von zwei alternierenden Matrizen und als Produkt von einer symmetrischen und einer alternierenden Matrix. **15**, S. 1 bis 25.
Sternberg, W., Die Entwicklung unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen eines eindimensionalen Randwertproblems. **3**, S. 191—208.
— Über die lineare Abhängigkeit von Funktionen mehrerer Variablen. **14**, S. 169—179.
— Die charakteristischen Eigenschaften des logarithmischen Potentials. **19**, S. 145—150.
— Über die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen. **21**, S. 286—311.
Stiemke, E., Über unendliche algebraische Zahlkörper. **25**, S. 9—39.
Study, E., Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. Teil I. **18**, S. 55—86.
— Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. Teil II. **18**, S. 201—229.
— Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. Teil III. **21**, S. 45—71.
Study, E., Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. Teil IV. **21**, S. 174—194.
Sturm, R., Die doppelte Bedingung für eine Rotationsfläche zweiter Ordnung. **1**, S. 421—424.
— Einfacherer Beweis für die acht Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung. **1**, S. 425—427.
Szász, O., Über harmonische Funktionen und L-Formen. **1**, S. 149—162.
— Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe. **1**, S. 163—183.
— Berichtigung. **1**, S. 428.
— Über Potenzreihen und Bilinearformen. **4**, S. 163—176.
— Über Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen. **8**, S. 222—236.
— Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitungen einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt. **8**, S. 303—309.
— Über Hermitesche Formen mit rekurrierender Determinante und über rationale Polynome. **11**, S. 24—57.
v. Szász, P., Über einen Mittelwertsatz. **25**, S. 116—120.
Szegö, G., Ein Betrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi. **1**, S. 341—356.
— Über Orthogonalsysteme von Polynomen. **4**, S. 139—151.
— Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. (I. Mitteilung.) **6**, S. 167 bis 202.
— Über Potenzreihen, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind. **8**, S. 36—51.
— Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. **9**, S. 163 bis 166.
— Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. (Fortsetzung.) **9**, S. 167—190.
— Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. **9**, S. 218—270.
— Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. **12**, S. 61—94.
— Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. **13**, S. 28—55.

Szegö, G., Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. **21**, S. 203—208.
— Über einen Satz von A. Markoff. **23**, S. 45—61.
— Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. I. Entwicklungssätze. **25**, S. 87—115.
— Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome. **25**, S. 172—187.
— Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II. Zahlentheoretische Anwendungen. **25**, S. 388—404.
Szidon, S., Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen. **10**, S. 121—127.
Tamarkine, J., Sur le théorème d'unicité des solutions des equations différentielles ordinaires. **16**, S. 207—213.
— Sur la méthode de C. Störmer pour l'intégration approchée des équations differentielles ordinaires. **16**, S. 214 bis 219.
— und **Besikowitsch, A.**, Über die asymptotischen Ausdrücke für die Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen, die von einem Parameter abhängen. **21**, S. 119—125.
Tauber, A., Über konvergente und asymptotische Darstellung des Integrallogarithmus. **8**, S. 52—62.
— Über die Umwandlung von Potenzreihen in Kettenbrüche. **15**, S. 66—80.
Theis, M., Über eine Interpolationsformel von de la Vallée Poussin. **3**, S. 93—113.
Thomas, T. I., The identities of affinely connected manifolds. **25**, S. 714—722.
— A projective theory of affinely connected manifolds. **25**, S. 723—733.
Thomsen, G., Über eine gemeinsame Behandlungsweise verschiedener Differentialgeometrien. **21**, S. 254—285.
Threlfall, W., Bedingt konvergente Reihen. **24**, S. 212—214.
Tietze, H., Über stetige Kurven, Jordansche Kurvenbögen und geschlossene Jordansche Kurven. **5**, S. 284—291.
— Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen. **16**, S. 308—317.
— Nachträgliche Bemerkung zu dem Aufsatz: „Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen." **18**, S. 324.
Timpe, A., Die Airysche Funktion für den Ellipsenring. **17**, S. 189—205.
Titchmarsh, E. C., Reciprocical formulae involving series and integrals. **25**, S. 321—347.
Toeplitz, O., Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. **2**, S. 187 bis 197.
— Über das Wachstum der Potenzreihen in ihrem Konvergenzkreise. I. **12**, S. 189—200.
Torhorst, M., Über den Rand der einfach zusammenhängenden ebenen Gebiete. **9**, S. 44—65.
Tortorici, S., Alcune osservazioni analitiche sulle congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate. **10**, S. 225—282.
Ullrich, E., Zur Korrespondenz zweier Klassen von Limitierungsverfahren. **25**, S. 382—387.
Urysohn, P., Ein Beitrag zur Theorie der ebenen Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges. **21**, S. 133—150.
— Zur ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Ein Fall der Unlösbarkeit. **23**, S. 155—158.
Vietoris, L., Zur Geometrie ebener Massenanziehungsprobleme. **19**, S. 130—135.
Volk, O., Über die Entwicklung von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen nach Laméschen Funktionen. **23**, S. 224 bis 237.
Waelsch, E., Zur Tensoralgebra. **20**, S. 188—192.
Walfisz, A., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. **19**, S. 300 bis 307.
— Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern. **22**, S. 153 bis 188.
Walsh, J. L., Note on the location of the roots of a polynomial. **24**, S. 733—742.
Walther, A., Maximum und Minimum einer harmonischen Funktion auf Kreisen. **11**, S. 157—160.
— Über die reellen Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(z)$. **23**, S. 238—245.
Weinstein, A., Fundamentalsatz der Tensorrechnung. **16**, S. 78—91.
— Ein hydrodynamischer Unitätssatz. **19**, S. 265—275.
— Der Kontinuitätsbeweis des Abbildungssatzes für Polygone. **21**, S. 72—84.

Weitzenböck, R., Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie. **5**, S. 137—146.
— Zur Tensoralgebra. **10**, S. 80—87.
— Über orthogonale und Bewegungsinvarianten von Linearformen. **20**, S. 151 bis 155.
— Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn Waelsch. **20**, S. 193.
Weyl, G., Die Form des Wirkungsprinzips bei der Bewegung starrer Körper aus Invarianzforderungen abgeleitet. **11**, S. 97—104.
Weyl, H., Reine Infinitesimalgeometrie. **2**, S. 384—411.
— Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. **10**, S. 39—79.
— Zur Abschätzung von $\zeta(1 + ti)$. **10**, S. 88—101.
— Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung. **12**, S. 114—146.
— Zur Infinitesimalgeometrie: p-dimensionale Fläche im n-dimensionalen Raum. **12**, S. 154—160.
— Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe. **17**, S. 293—320.
— Korrektur zu: Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe. **19**, S. 152.
— Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. **20**, S. 131—150.
— Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I. **23**, S. 271 bis 309.
— Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. II. **24**, S. 328 bis 376.
— Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. III. **24**, S. 377 bis 395.
— Nachtrag zu der Arbeit: Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. III. (**24**, S. 377—395.) **24**, S. 789—791.
Weyrich, R., Beiträge zur Theorie der Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf krummen Flächen. **16**, S. 249 bis 272.
Wiener, N., On the representation of functions by trigonometrical integrals. **24**, S. 575—616.
Wigert, S., Über das Problem der Gitterpunkte in einem Kreise. **5**, S. 310—318.
Winternitz, A., Über den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis situs. **1**, S. 329—340.
Wintner, A., Zur Hillschen Theorie der Variation des Mondes. **24**, S. 259—265.
— Ein Satz über unendliche Systeme von linearen Gleichungen. **24**, S. 266.
van der Woude, W., Über die Staudeschen Kreiselbewegungen. **16**, S. 170—172.
Zindler, K., Über einen Hauptsatz in der Theorie der konvexen Polyeder. **15**, S. 106—110.
— Über Symmetrisierung konvexer Gebilde. **25**, S. 602—607.
Zygmund, A., Contribution à l'unicité du développement trigonométrique. **24**, S. 40—46.
— Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques. **24**, S. 47—104.
— et **Rajchman, A.**, Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson. **25**, S. 261 bis 273.
— Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson. **25**, S. 274—290.
— Sur un theorème de la théorie de la sommabilité. **25**, S. 291—296.
— Une remarque sur un théorème de M. Kaczmarz. **25**, S. 297—298.